BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

42685 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE
MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXIII. — ANNÉE 1909.

(XLIVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDOYER (H.). — COURS D'ASTRONOMIE. Seconde Partie : ASTRONOMIE STELLAIRE. Paris, librairie scientifique, A. Hermann et fils, 1909, 304 pages.

J'ai eu l'occasion de faire ailleurs [1] une analyse détaillée de la première partie du cours de M. Andoyer; le Volume qui vient de paraître, et qui est sensiblement plus considérable que le premier, complète l'important Ouvrage. Comme le fait remarquer l'auteur dans l'Introduction, il aurait été impossible d'aborder dans un cours, nécessairement restreint, toutes les questions pratiques qui relèvent de l'Astronomie ; aussi on a dû se borner aux problèmes les plus importants en les étudiant à fond. Du reste on est accoutumé à voir l'auteur apporter tous ses soins et toute la rigueur possible dans les sujets dont il s'occupe. C'est une qualité précieuse, surtout chez les professeurs.

Dans tous les problèmes de l'Astronomie pratique, il entre une part d'observation et une part de calcul, pour pouvoir traiter avec

(1) *Rivista di Astronomia,* 1907.

succès ces problèmes, il faut donc bien connaître les instruments et les méthodes à employer, et il faut aussi savoir bien calculer. Les Calculs, les Instruments, les Observations forment ainsi les trois grandes divisions du Volume. Les deux premiers Chapitres, qui composent le Livre I, forment une excellente préparation aux calculs astronomiques, et aussi, on peut le dire, à tous les calculs relatifs aux sciences d'observation. Le Chapitre I (*Principes de calcul; Interpolation; Tables*) est admirable de clarté et de précision. On y trouve, entre autres choses, des principes très précis sur les erreurs numériques. L'auteur, à l'exemple de Gauss, n'a pas dédaigné de descendre à des détails dans les calculs.

La formule de Newton pour l'interpolation y est établie dans sa forme la plus générale; on démontre pourquoi, dans ces développements qui sont comme des séries, on ne s'occupe pas pratiquement du terme complémentaire. On explique aussi le principe des *quadratures mécaniques*. Dans le paragraphe *Usage des Tables de logarithmes*, l'auteur entre dans les détails au sujet de l'erreur qu'on peut commettre en se servant de ces Tables par interpolation. Un bon nombre d'exemples bien choisis, basés quelquefois sur les données de la *Connaissance des Temps*, viennent à l'appui des théories.

Pour ce qui concerne la théorie des erreurs, M. Andoyer déclare qu'il se borne à l'exposition de la théorie universellement adoptée, sans aucune étude critique, mais ailleurs (Chap. VI), il ne manque pas de faire remarquer que, surtout lorsqu'on détermine les constantes fondamentales de l'Astronomie, en discutant la précision des observations d'après la théorie des erreurs, on ne doit pas oublier que les conclusions auxquelles conduit cette théorie sont plus d'une fois illusoires. Dans l'exposition de cette théorie on s'appuie sur quelques principes du calcul des probabilités. Au sujet de la loi de Gauss, on fait remarquer avec raison qu'on ne peut en aucune façon la regarder comme correspondant à la vérité rigoureuse; elle ne fournit qu'une approximation. M. Andoyer s'occupe de la résolution du problème de la combinaison des observations d'une manière très générale et montre que, même dans ce cas, l'erreur suit la loi de Gauss.

Quant à la méthode des moindres carrés, l'auteur entre dans le détail des principes théoriques qui la justifient, en s'arrêtant à

l'expression de ce qu'il appelle la *détermination principale* d'une fonction Ψ linéaire et homogène de p quantités indépendantes, dont on possède n fonctions linéaires et homogènes quelconques, n étant plus grand que p. La détermination principale de Ψ est celle qui a un poids maximum, et la méthode des moindres carré en découle. Sans doute M. Andoyer n'aurait pas manqué de dire que la règle de la moyenne arithmétique a été démontrée d'une manière rigoureuse tout dernièrement par M. Schiaparelli, si cette partie du cours n'avait pas été imprimée lors de la publication de la démonstration du savant astronome italien.

La méthode de calcul relative aux moindres carrés est exposée avec clarté, et les applications bien choisies n'y manquent pas.

Avant de décrire les instruments complets, M. Andoyer s'occupe des instruments accessoires : *pendules*, *chronomètres*, *cercles divisés*, *niveaux*, *lunettes* et *micromètres*. Pour ces derniers, on s'est borné à la forme ordinaire, sans s'occuper du micromètre dit *impersonnel*. La détermination des erreurs de division dans les cercles des grands instruments méridiens est exposée minutieusement, en faisant toutefois remarquer que la méthode indiquée n'a rien d'absolu et peut être modifiée et simplifiée, comme l'a montré le regretté M. Lœwy.

La description, la théorie et l'usage de presque tous les instruments de l'Astronomie moderne sont exposés de main de maître. Au sujet du théodolite, M. Andoyer fait remarquer que cet instrument est employé dans la grande majorité des cas pour des observations relatives, et que souvent on s'arrange de manière à éviter la lecture des cercles (qui sont petits), et à observer des temps. Pour l'équatorial, l'auteur entre dans tous les détails de la détermination des constantes instrumentales, des erreurs des vis, etc. ; il explique les deux méthodes de mesure des différences d'ascension droite, c'est-à-dire par passages ou au moyen de vis micrométriques ; enfin il donne une idée des mesures d'étoiles doubles.

En traitant du cercle méridien, l'auteur explique avec soin les différentes espèces de flexion. Il s'occupe des mires et des collimateurs, en faisant remarquer que l'étoile fictive définie par un collimateur n'est pas invariable comme celle définie par la mire, et ne peut être regardée comme fixe que pendant un temps assez

court. On pourrait ajouter que l'emploi des collimateurs d'ouverture considérablement plus petite que celle de la lunette méridienne ne peut assurer l'orientation exacte de celle-ci, avec la précision qu'exige sa puissance, malgré la coïncidence des fils des deux lunettes ; bref, qu'il y a manque de proportion.

M. Andoyer rattache à la théorie du théodolite et de l'instrument méridien la méthode de Talcott pour la détermination de la latitude, aujourd'hui employée fréquemment, surtout pour l'étude de la variation de la latitude. Sans entrer dans tous les détails que l'on peut trouver dans les instructions pour l'emploi de la lunette zénithale publiées par le Bureau central de l'*Association géodésique internationale,* l'auteur ne manque pas de faire remarquer que le succès de la méthode tient à la perfection du niveau et du micromètre, « qui doivent être étudiés avec le plus grand soin ».

Ce que l'auteur dit à la page 149, au sujet de l'instrument méridien, pourrait être répété pour chaque instrument et pour toute méthode d'observation ; voici le passage : « Ce qui précède suffit pour faire comprendre les méthodes qu'on emploie pour étudier un instrument, et il serait inutile d'insister davantage sur les multiples précautions dont il faut s'entourer dans des recherches aussi délicates pour éviter toute cause de perturbation ». En effet, le cours d'Astronomie pratique dans les Facultés permet d'apprendre à étudier les instruments, mais n'est pas destiné à former les jeunes astronomes. Pour atteindre ce dernier but, il n'y aurait jamais assez de livres et d'explications, car il faut se mettre en communication directe avec le ciel. Mais il est nécessaire que dans un cours on mette en évidence les principes généraux qu'on suit lorsqu'il s'agit d'étudier un instrument.

Dans le Chapitre V (*Instruments divers*), on étudie d'abord le sextant, dont on expose la théorie avec beaucoup plus de soin qu'on ne le fait ordinairement; ensuite on s'occupe rapidement du cercle à réflexion et de l'héliomètre. On n'oublie pas l'équatorial coudé et l'excellent instrument portatif inventé par MM. Claude et Driencourt, qui est appelé à rendre de grands services dans la géodésie expéditive.

Le Chapitre VI (*Détermination des constantes fondamentales de l'Astronomie*) est très intéressant, quoiqu'on se soit borné au strict nécessaire. Dans une Introduction magistrale, l'auteur, après

avoir défini nettement l'objet propre de l'Astronomie en indiquant son problème général et le problème inverse, fait remarquer le rôle que jouent nécessairement dans l'étude de l'Astronomie certaines hypothèses suggérées par l'expérience, et il montre comment la théorie et l'observation entrelacent leurs puissants moyens pour nous conduire à la connaissance de l'univers. Les constantes astronomiques sont divisées en plusieurs groupes, savoir : *constantes physiques et mécaniques ; parallaxes, éléments des orbites et de la rotation des corps célestes, coordonnée des étoiles fondamentales,* etc. La constante de la réfraction vient en premier lieu et les méthodes de M. Lœwy ne sont pas oubliées. La détermination de la parallaxe solaire est expliquée dans ses grandes lignes.

Vient ensuite l'*Astronomie géographique et nautique* (Chap. VII), qui occupe 71 pages. On y trouve une exposition claire et rigoureuse de presque toutes les méthodes employées pour la détermination des coordonnées géographiques. On y voit que l'astronome qui s'est occupé longuement de la théorie la plus profonde, celle de la Lune, a pu se tenir au courant des moindres détails des observations d'astronomie, de géodésie et de navigation. Un Chapitre comme celui-ci ne peut se résumer, puisqu'il est lui-même une espèce d'encyclopédie.

Ce deuxième Volume se clôt avec un Chapitre complémentaire qui satisfait à un vœu que j'avais exprimé en faisant le compte rendu du premier. En effet, l'auteur n'a pas négligé la théorie des orbites, quoiqu'il se soit borné à exposer la détermination de l'orbite d'un astre de notre système nouvellement découvert, d'après la méthode classique de Gauss, en y introduisant les notations généralement adoptées aujourd'hui.

D'après ce que nous venons de dire, on peut prévoir que l'Ouvrage de M. Andoyer occupera une place distinguée parmi les Traités et les cours destinés à l'enseignement dans les Facultés. Ce nouveau cours vient confirmer encore une fois ce mot d'un ancien : « Il est bon que les mêmes choses soient exposées par plusieurs de différentes manières ».

Signalons en terminant que l'exécution typographique de l'Ouvrage est parfaite à tous égards. Jean Boccardi.

HENSEL (K.). — THEORIE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLEN. Erster Band. 1 vol. in-8, XI-349 pages. Leipzig et Berlin, Teubner, 1908.

Sans prétendre analyser complètement cette *Théorie des nombres algébriques*, où M. Hensel expose d'une façon claire et systématique un ensemble de recherches originales, qu'il a commencées il y a près de 20 ans, je voudrais au moins expliquer sommairement, d'après lui, ce que sont les instruments dont il se sert, instruments qui jouent, dans la théorie des nombres algébristes, le même rôle que les séries entières dans la théorie des fonctions, si bien que les deux théories arrivent parfois à se ressembler d'une façon vraiment singulière. Combien sont précieux en général, pour le progrès de la Science, ces rapprochements inattendus, c'est ce qu'on sait assez. Les simplifications que les méthodes de M. Hensel apportent dans la théorie de la divisibilité des nombres algébriques, qui est complètement développée dans ce premier Volume, sont fort remarquables.

Soient p un nombre premier et $a_r, a_{r+1}, \ldots$, une suite illimitée de nombres entiers, ou *chiffres*, pris parmi les nombres 0, 1, 2, ..., $p-1$. M. Hensel considère des symboles de la forme

$$a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \ldots \tag{1}$$

auxquels, bien entendu, il ne faut pas attacher l'idée de quelque valeur numérique, puisque la série (1) est divergente, sauf dans le cas où tous les chiffres sont des zéros, à partir d'un certain rang; ce qui définit un pareil symbole, c'est l'ordre r de son premier terme et la loi de succession de ses chiffres $a_r, a_{r+1}, \ldots$; un pareil symbole est ce que l'auteur appelle un nombre p-adique.

Le nombre rationnel

$$a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \ldots + a_k p^k \qquad (k \geq r)$$

en est la $k^{\text{ième}}$ valeur approchée.

Le nombre p-adique considéré est qualifié d'*entier* si son ordre r n'est pas négatif, de *fractionnaire* dans le cas contraire; un nombre entier p-adique pourra donc être représenté par un

symbole tel que

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots$$

qu'on écrit aussi

$$a_0, \quad a_1 a_2 \dots;$$

il est qualifié d'unité pour le domaine de p si a_0 n'est pas nul; un entier p-adique d'ordre positif r pourra s'écrire d'une façon analogue, les r premiers chiffres, y compris celui qui précède la virgule, étant des zéros; pour les nombres fractionnaires d'ordre négatif $-r$, on placerait $r+1$ chiffres avant la virgule; les entiers p-adiques n'ont qu'un chiffre avant la virgule.

Considérons maintenant un symbole de la forme

$$(2) \qquad \alpha_r p^r + \alpha_{r+1} p^{r+1} + \dots,$$

où l'on fait abstraction, en général, de la convergence ou de la divergence de la série, et où, encore une fois, ce qui importe, c'est le nombre r et la loi de succession des coefficients α_r, α_{r+1}, α_{r+2}, ... On suppose essentiellement que ces coefficients sont des nombres entiers mod p, c'est-à-dire soit des nombres entiers au sens ordinaire du mot, soit des fractions irréductibles dont le dénominateur n'est pas divisible par p. Les coefficients peuvent d'ailleurs être positifs ou négatifs.

Sous ces conditions, il y a un *chiffre* a_r pris parmi les nombres $0, 1, 2, \dots, p-1$ tel qu'on puisse écrire

$$\alpha_r = a_r + \varepsilon_r p,$$

ε_r étant une fraction irréductible positive ayant le même dénominateur que α_r; imaginons que, dans le symbole (2), on remplace le premier coefficient α_r par a_r, et le second coefficient par $\alpha_{r+1} + \varepsilon_r$; ce second coefficient, ainsi modifié, sera encore un entier mod p; on le mettra de même sous la forme $a_{r+1} + \varepsilon_{r+1} p$, on remplacera le second coefficient par a_{r+1} et le troisième par $a_{r+2} + \varepsilon_{r+2}$, etc.; ce procédé, poursuivi indéfiniment, conduira à une suite définie de chiffres a_r, a_{r+1}, ..., c'est-à-dire à un nombre p-adique; on regarde le symbole (2) comme étant la même chose que le nombre p-adique qu'on vient de définir; le symbole (2) est lui-même qualifié de nombre p-adique, non réduit. C'est là, d'ailleurs, un cas particulier qui rentre dans la définition générale de l'égalité des nombres p-adiques, laquelle sera donnée un peu plus

loin. Si l'on suppose, par exemple,

$$r = 0, \qquad \alpha_0 = p, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = p - 1,$$

on reconnaît immédiatement, en appliquant le procédé de réduction expliqué antérieurement, qu'on a affaire à un nombre p-adique dont tous les chiffres sont nuls et qu'il est ainsi naturel de regarder comme étant égal à zéro.

On peut appliquer le procédé de réduction à un nombre rationnel quelconque, pourvu qu'il soit entier mod p; on n'aura, dans les calculs précédemment décrits, qu'à prendre α_r égal à ce nombre rationnel, et les autres coefficients égaux à zéro; il est manifeste qu'on parviendra ainsi à un entier p-adique. Si, en particulier, le nombre rationnel dont on part est un entier positif, le mode de réduction revient à l'écrire dans la base p, mais en adoptant l'ordre inverse de l'ordre habituel. Les chiffres qui suivraient le dernier devraient être regardés comme nuls, il est inutile de les écrire. La série est alors limitée; si l'on part d'un nombre fractionnaire (entier mod p), ou d'un nombre négatif, on engendre une série illimitée, dont il est aisé de voir qu'elle est périodique. Considérons maintenant un nombre rationnel qui ne soit pas entier mod p, il sera de la forme p^{-r}E; E étant un nombre entier ou une fraction irréductible dont ni le numérateur ni le dénominateur ne sont divisibles par p; le nombre E, traité comme on l'a expliqué, engendre un nombre entier p-adique (une unité pour le domaine de p), lequel est d'ailleurs périodique; en divisant chaque terme par p^r, on voit que p^{-r}E engendre ainsi un nombre p-adique fractionnaire commençant par un terme en p^{-r} et qui, d'ailleurs, est périodique. Réciproquement, tout nombre p-adique périodique (simple ou mixte) est engendré par un nombre rationnel déterminé. Le nombre p-adique ainsi engendré par un nombre rationnel en est dit le développement p-adique.

Deux nombres p-adiques, écrits sous la forme générale (2), sont dits *égaux dans le domaine de* p, quand leurs $k^{\text{ièmes}}$ valeurs approchées sont congrues mod p^{k+1} quel que soit k : c'est ce qui arrivera manifestement si le second des deux nombres résulte du premier par cette réduction, expliquée plus haut, qui permet de trouver successivement les chiffres d'un nombre p-adique. Quant à deux nombres p-adiques réduits (écrits avec les chiffres 0, 1, ...,

$p - 1$), ils ne peuvent être égaux, pour le domaine de p, que s'ils sont identiques, chiffre à chiffre. Notons en passant que deux nombres p-adiques réduits sont dits *congrus* suivant le module p^{k+1} quant leurs $k^{\text{ièmes}}$ valeurs approchées sont identiques. Un nombre rationnel doit être regardé comme égal, pour le domaine de p, au nombre p-adique périodique qu'il engendre.

La proposition qui suit fera saisir au lecteur la différence qu'il y a entre cette sorte d'égalité et l'égalité numérique ordinaire.

Revenons au symbole (2) où les coefficients sont seulement assujettis à être entiers mod p. Ce peut être une série convergente, et l'on peut le désigner alors sous le nom de *série* p-adique. Il est assez clair qu'un nombre quelconque A, rationnel ou non, étant donné, on peut trouver une infinité de séries p-adiques dont la somme lui soit égale; mais M. Hensel établit qu'on peut trouver une pareille série qui, pour le domaine de p, soit égale à tel nombre p-adique qu'on voudra; en particulier, si A est un nombre rationnel, il y aura une série p-adique dont la somme sera A et qui, traitée comme on l'a expliqué au début, engendrera le même nombre p-adique A; cette série p-adique mérite le nom, que lui donne M. Hensel, de *représentation* p-adique du nombre A. Par exemple, si n est un entier plus grand que p, et si a est un nombre rationnel entier mod p, la série p-adique

$$a + a\frac{p}{n} + a\left(\frac{p}{n}\right)^2 + \ldots$$

sera, au sens qu'on vient de dire, la représentation p-adique de la fraction

$$\frac{a}{1 - \frac{p}{n}}.$$

Quant à l'addition, à la soustraction, à la multiplication, à la division des nombres p-adiques, elles se définiront par les règles mêmes qui servent pour effectuer ces opérations sur les séries qui procèdent suivant les puissances entières d'une variable. Les calculs se font aisément quand les nombres p-adiques sont écrits sous forme réduite; on n'a qu'à se laisser guider par les analogies avec la numération décimale. Il va de soi que la division par zéro est exclue.

Un nombre p-adique A est divisible par un nombre p-adique B quand le quotient est un entier p-adique. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi consiste en ce que l'ordre de A soit égal ou supérieur à l'ordre de B. Un nombre entier p-adique est divisible par n'importe quelle unité p-adique. Si A est un nombre p-adique, l'un des deux nombres A, $\frac{1}{A}$ est entier. Les unités ne sont divisibles que par les unités. Le nombre p-adique réduit $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ est divisible par p; si a_1 n'est pas nul, il n'admettra pas d'autre diviseur que p, les unités p-adiques et le produit de p par une telle unité; il est, d'ailleurs, égal au produit de $0, 1 = p$ par l'unité $a_1, a_2 a_3 \ldots$. Si l'on convient de ne pas distinguer entre deux nombres p-adiques qui ne diffèrent que par un facteur égal à une unité p-adique, on peut dire que p est le seul nombre autre que 1, qui ne soit divisible que par lui-même ou par l'unité; de ce point de vue, p est le seul nombre premier.

Par les opérations rationnelles effectuées sur des nombres p-adiques, on engendre toujours des nombres p-adiques; l'ensemble des nombres p-adiques constitue un corps K (p), qui contient manifestement le corps K(1) des nombres rationnels.

Si l'on considère une équation

$$\varphi(x, y, \ldots) = 0$$

dont le premier membre est une fonction rationnelle, à coefficients rationnels, les explications qui précèdent donnent une signification claire à ces mots : « l'équation est vérifiée quand on y remplace x, y, ... par les nombres p-adiques A, B, ... ». Lorsque A, B, ... sont les développements p-adiques de nombres rationnels a, b, ..., cela revient à dire que le nombre ordinaire $\varphi(a, b, \ldots)$ est nul.

On peut considérer des polynomes en x à coefficients p-adiques et, spécialement, à coefficients p-adiques entiers. La théorie de ces polynomes, pour ce qui concerne les opérations fondamentales, la division en particulier, la notion des racines (simples ou multiples), de plus grand commun diviseur, l'élimination, la décomposition en facteurs irréductibles, pour le domaine de p, se poursuit assez facilement sur le même plan que la théorie des

polynomes à coefficients entiers. Je signalerai deux propositions relatives à la réductibilité.

Soit

$$F(x) = A_0 x^{\lambda} + A_1 x^{\lambda-1} + \ldots + A_{\lambda}$$

un polynome à coefficients p-adiques entiers dont l'un au moins est une unité (n'est pas divisible par p). Si ce polynome est irréductible dans le corps $K(p)$, et si l'un des coefficients extrêmes A_0, A_{λ} est divisible par p, tous les coefficients intermédiaires A_1, A_2, ..., $A_{\lambda-1}$ sont divisibles par p : il résulte de là que l'un des coefficients A_0, A_{λ} est une unité, pour le domaine de p. La même conclusion s'applique si le polynome $F(x)$ est une puissance d'un polynome irréductible.

Si dans un polynome $f(x)$ à coefficients p-adiques, on remplace chaque coefficient par sa $k^{\text{ième}}$ valeur approchée, on obtient un polynome $f_k(x)$, au sens ordinaire du mot, qu'on peut désigner comme le $k^{\text{ième}}$ polynome approché de $f(x)$. Lorsque $f(x)$ est à coefficients p-adiques entiers, le polynome $f_0(x)$ obtenu en ne gardant dans chaque coefficient que le premier chiffre et dont, ainsi, les coefficients sont pris parmi les nombres 0, 1, 2, ..., $p - 1$ joue un rôle important; on comprend que la réductibilité, pour le domaine de p, du polynome p-adique $f(x)$ soit liée à la réductibilité, suivant le module p, du polynome $f_0(x)$. En fait, quand le polynome $f_0(x)$ est congru, mod p, au produit des polynomes $g_0(x)$, $h_0(x)$, premiers entre eux mod p, le polynome p-adique $f(x)$ est le produit de deux polynomes p-adiques $g(x)$, $h(x)$ dont $g_0(x)$, $h_0(x)$ sont respectivement les $0^{\text{ièmes}}$ polynomes approchés : il est à peine utile de dire que dans ces polynomes $g_0(x)$, $h_0(x)$ les coefficients sont supposés réduits suivant le module p, en sorte que ces coefficients sont encore pris parmi les nombres 0, 1, ... $p - 1$. Par exemple, de ce que le polynome $x^{p-1} - 1$ est congru, suivant le module p, au produit

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1),$$

il résulte que, pour le domaine de p, l'équation

$$x^{p-1} - 1 = 0$$

a pour racines $p - 1$ nombres entiers p-adiques dont les premiers chiffres sont respectivement 0, 1, ..., $p - 1$. La théorie des équa-

tions binomes, pour le domaine de p, donne d'ailleurs lieu à des développements intéressants.

Les nombres p-adiques considérés jusqu'ici seront désignés sous le nom de nombres p-adiques *rationnels*. La notion ainsi acquise, pour prendre toute son importance, a besoin d'être généralisée.

Cette généralisation suppose d'abord une généralisation, d'ailleurs facile, de la notion d'entier algébrique.

De même, qu'on désigne sous le nom d'*entier rationnel* mod p une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas divisible par p, il est naturel de désigner sous le nom d'*entier algébrique* mod p toute racine d'un polynome dans lequel le coefficient de la plus haute puissance est 1 et dont tous les autres coefficients sont des entiers mod p. Les racines des équations dont le premier membre est un polynome à coefficients entiers qui ne peut pas être mis sous la forme qu'on vient de dire sont dites *fractionnaires* mod p. La plupart des propriétés des entiers algébristes s'étendent sans peine aux entiers algébriques mod p. Ainsi : un nombre entier algébrique mod p qui est rationnel est un nombre entier rationnel mod p. La somme, la différence, le produit de deux entiers algébriques mod p sont des entiers algébriques mod p. Les racines d'une équation algébrique de degré λ dans laquelle le coefficient de x^λ est 1 et dans laquelle les autres coefficients sont des entiers algébriques mod p sont aussi des entiers algébriques mod p.

Si le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ de deux nombres algébriques α, β est un entier algébrique mod p, α est dit *algébriquement divisible par* β, pour le domaine de p.

Considérons maintenant une équation

$$f(x) = 0,$$

de degré λ, à coefficients rationnels, irréductible dans le corps K (1) des nombres rationnels; soit α une racine de cette équation et considérons le corps K (α), ensemble de toutes les fonctions rationnelles à coefficients rationnels de la racine α. Un système

$$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \ldots, \gamma^{(\lambda)})$$

d'entiers algébriques du corps K (α) sera désigné sous le nom de

système fondamental si tout entier mod p du corps peut, et cela d'une seule façon, être mis sous la forme

$$u_1 \gamma^{(1)} + u_2 \gamma^{(2)} + \ldots + u_\lambda \gamma^{(\lambda)},$$

où les coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ sont des entiers rationnels mod p; une pareille expression ne peut être algébriquement divisible par une puissance de p que si les coefficients u sont divisibles par p; d'où la notion de congruence pour deux telles expressions, suivant une puissance de p. Un entier algébrique

$$\varepsilon = e_1 \gamma^{(1)} + e_2 \gamma^{(2)} + \ldots + e_\lambda \gamma^{(\lambda)},$$

où les coefficients $e_1, e_2, \ldots, e_\lambda$ sont pris parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, est un *nombre entier réduit* mod p du domaine $K(\alpha)$. Il y a p^λ tels nombres; tout entier algébrique mod p est congru, suivant le module p, à un de ces nombres réduits; c'est maintenant ces p^λ nombres qui vont jouer le rôle de *chiffres* que jouaient les nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$ pour les nombres p-adiques rationnels. Les nombres p-adiques algébriques du corps $K(\alpha)$, ou plus brièvement les nombres du corps $K(p, \alpha)$, seront des expressions de la forme

$$\varepsilon^{(r)} p^r + \varepsilon^{(r+1)} p^{r+1} + \ldots,$$

où les coefficients sont des nombres entiers réduits mod p. Les nombres algébriques du domaine $K(\alpha)$, en employant un procédé de réduction semblable à celui qu'on a expliqué tout au long pour les nombres p-adiques rationnels, donnent naissance à de pareilles expressions où les chiffres se reproduisent périodiquement. Le calcul des nombres p-adiques algébriques est semblable au calcul des nombres p-adiques rationnels. Un nombre du corps $K(p, \alpha)$ peut aussi bien être regardé comme une fonction rationnelle $\varphi(\alpha)$ dont les coefficients seraient des nombres p-adiques rationnels. A ce point de vue, les nombres du corps $K(p, \alpha)$ donnent lieu à une théorie toute pareille à celle des nombres algébriques ordinaires, pourvu que l'équation dont α est racine, et qu'on a supposée irréductible dans le domaine $K(1)$, soit aussi irréductible dans le domaine $K(p)$. C'est ce que je supposerai dans la suite. Si α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\lambda$ sont les diverses racines de l'équation irréductible que

vérifie α, les nombres

$$\varphi(\alpha_1), \quad \varphi(\alpha_2), \quad \ldots, \quad \varphi(\alpha_\lambda)$$

sont dits *conjugués;* il est clair que $\varphi(\alpha)$ est une racine de l'équation

$$[y-\varphi(\alpha_1)][y-\varphi(\alpha_2)]\ldots[y-\varphi(\alpha_\lambda)]=0,$$

dont on reconnaît immédiatement que les coefficients, quand on l'a développée, sont des nombres rationnels p-adiques. Le polynome p-adique en y est irréductible ou la puissance d'un polynome irréductible. Si ses coefficients sont des entiers p-adiques, le nombre $\varphi(\alpha)$ sera dit *algébriquement entier.*

Comme pour les nombres algébriques ordinaires, le nombre rationnel p-adique

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_\lambda)$$

sera dit la norme du nombre $\varphi(\alpha)$.

Tout d'abord, il est assez aisé de montrer, en s'appuyant sur une proposition qu'on a signalée plus haut sur les polynomes irréductibles à coefficients p-adiques entiers, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre β du corps $K(p, \alpha)$ soit algébriquement entier consiste en ce que sa norme soit un entier p-adique. Le nombre β est une unité quand sa norme est une unité p-adique; son inverse est alors, comme lui-même, un nombre algébriquement entier. Si β, γ sont deux nombres du corps $K(p, \alpha)$, β sera dit *divisible* par γ si $\frac{\beta}{\gamma}$ est algébriquement entier, c'est-à-dire si la norme $n(\beta)$ de β est divisible par la norme $n(\gamma)$ de γ, ou encore si l'ordre du nombre rationnel p-adique $n(\beta)$ est supérieur ou égal à l'ordre du nombre rationnel p-adique $n(\gamma)$. L'un des deux nombres β, γ, au moins, est divisible par l'autre. La notion de congruence s'étend immédiatement aux nombres du corps $K(p, \alpha)$. Si deux nombres de ce corps sont congrus suivant une puissance de p, leurs normes sont congrues suivant cette puissance ou une puissance plus élevée.

Dans le corps $K(p, \alpha)$ le nombre p peut perdre la qualité de nombre premier qu'il avait encore dans le corps $K(p)$. La norme d'un nombre algébriquement entier du corps $K(p, \alpha)$ qui n'est pas une unité est divisible par une puissance de p; soit π un de

ces nombres algébriquement entiers, qui ne soit pas une unité et pour lequel l'ordre de la norme soit le plus petit possible; soit f cet ordre; on démontre que f est nécessairement un diviseur de λ. Il est d'ailleurs bien aisé de voir que π et tout nombre obtenu en multipliant π par une unité du corps $K(p, \alpha)$ jouissent de la propriété qui caractérise les nombres premiers; il n'est divisible que par lui-même ou par l'unité; d'ailleurs, il n'y a pas, dans le corps $K(p, \alpha)$, d'autres nombres qui jouissent de cette propriété. Lorsque f est égal à λ, le nombre premier π n'est autre chose que le nombre p, puisque la norme de p est précisément p^λ. D'une façon générale, si l'on suppose

$$\lambda = ef,$$

p est algébriquement divisible par π^e et non par une puissance supérieure, comme on le voit immédiatement en comparant les normes.

Le fait que le nombre p peut perdre ainsi sa qualité de nombre premier dans le corps $K(p, \alpha)$ fait comprendre comment, à la forme

$$\varepsilon^{(r)} p^r + \varepsilon^{(r+1)} p^{(r+1)} + \ldots$$

sous laquelle on a mis les nombres de ce corps, il convient d'en substituer une autre où le nombre premier π remplacera p. Je rappelle que, dans la forme précédente, chacun des chiffres $\varepsilon^{(r)}$, $\varepsilon^{(r+1)}$ doit être un des p^λ nombres du type

$$\varepsilon_1 \gamma_1 + \varepsilon_2 \gamma_2 + \ldots + \varepsilon_\lambda \gamma_\lambda,$$

où les coefficients $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\lambda$ sont pris parmi les nombres 0, 1, 2, ..., $p - 1$. Ces p^λ nombres sont incongrus suivant le module π^e, mais non suivant le module π. On démontre que, parmi eux, il y en a $\sigma = p^f$

$$\overset{(0)}{\varepsilon}, \quad \overset{(1)}{\varepsilon}, \quad \ldots, \quad \overset{(\sigma-1)}{\varepsilon}$$

qui forment un système complet de nombres incongrus suivant le module π. C'est précisément ces σ nombres qui jouent alors le rôle de chiffres, et le même procédé de réduction qu'on a exposé au début montre finalement que tout nombre p-adique du corps $K(p, \alpha)$ et, en particulier, tout nombre algébrique du corps $K(\alpha)$ peuvent

être représentés, et cela d'une façon unique, sous la forme

$$\beta = \varepsilon^{(\rho)}\pi^{\rho} + \varepsilon^{(\rho+1)}\pi^{\rho+1} + \ldots,$$

où les coefficients $\varepsilon^{(i)}$ sont des nombres déterminés du système

$$\overset{(0)}{\varepsilon}, \quad \overset{(1)}{\varepsilon}, \quad \ldots, \quad \overset{(\sigma-1)}{\varepsilon}.$$

Si l'on se rappelle que π^e ne diffère de p que par un facteur égal à une unité, le précédent développement et ceux qui correspondent aux valeurs conjuguées de β apparaissent comme très analogues aux développements suivant les puissances fractionnaires de $x - a$, qui conviennent pour un point d'embranchement a d'une fonction algébrique. Le nombre p, en conservant toujours les notations précédentes ($\lambda = fe$), est désigné sous le nom de *nombre d'embranchement du $e^{\text{ième}}$ ordre* pour le corps $K(x)$. Si e est égal à 1, p est un nombre premier régulier pour ce même corps.

Je me contenterai d'énoncer la proposition suivante qui montrera la portée des propositions précédentes :

Une équation algébrique

$$F(x) = 0,$$

du degré n, dont les coefficients sont des nombres entiers ordinaires, admet, pour le domaine d'un nombre premier quelconque p, autant de racines qu'il y a d'unités dans son degré; ces racines se séparent en autant de cycles de nombres algébriques p-adiques conjugués qu'il y a de facteurs irréductibles de $F(x)$, pour le domaine de p.

En général, les développements des nombres p-adiques, racines de l'équation, procèdent suivant les puissances de p. C'est seulement pour un nombre limité de nombres premiers p (les nombres d'embranchement de l'équation), qu'il y a lieu de faire intervenir les développements suivant les puissances fractionnaires de p.

J. T.

DELEGUE (L.). — Essai sur les principes mathématiques. 1 vol. in-8°, 132 pages. Paris, Vuibert et Nony, 1908.

On ne peut se défendre de quelque sympathie pour le jeune officier qui a composé cet *Essai*, dans ses heures de loisir. Sa pensée ne manque pas de vigueur, il l'exprime avec franchise et parfois sous une forme très heureuse; on l'imagine volontiers, « dans le calme des longues soirées d'hiver », près de la lampe qui éclaire la petite cellule où il travaille ; la neige a fait la solitude autour du fort où il sert. Voici, sur sa table, quelques livres choisis et les manuscrits que son père lui a légués, avec le goût de la Science : tout cela a été lu et relu, annoté, médité ; il y revient encore ; il quitte son livre ou ses notes pour s'abîmer dans ses pensées et s'enivrer d'abstractions....

Malheureusement, il est difficile d'aboutir dans ces sujets sur lesquels ont pâli tant de philosophes et de savants, difficile d'éviter quelques erreurs de détail, d'apercevoir toutes les fissures d'un raisonnement, de ne faire que des énumérations complètes, de ne jamais être la dupe d'une phrase à la tournure séduisante, de ne pas prendre pour l'évidence quelque clarté subjective qui nous a ébloui un instant. Sans doute l'auteur croit se comprendre quand il écrit : « Deux grandeurs sont égales lorsqu'elles ne diffèrent que par leur individualité distincte », ou la distance de deux points est la « différence d'individualité de ces points l'une par rapport à l'autre » ; sans doute ses cinq axiomes relatifs à la durée, ou à l'étendue, lui paraissent clairs ; mais je crains bien que cette clarté ne se communique pas.

J. T.

SAUTREAUX (C.). — Essai sur les axiomes des Mathématiques (Étude critique élémentaire). 1 vol. in-8, 78 pages. Grenoble, A. Gratier et J. Rey, 1909.

« Si cette dissertation est moins probante que je n'imagine, elle pourra, du moins, entretenir la discussion, éternellement ouverte, sur les bases de la science mathématique. Son insuffisance n'éton-

nera personne, l'insuccès dans ces recherches des premiers principes étant la règle. » On voit que l'auteur pratique la modestie et la recommande aux autres.

Je n'ai pas la prétention de décider s'il a ou non échappé à la règle ; mais je voudrais dire, à propos de son *Essai,* combien je m'émerveille, et depuis longtemps, de la diversité des esprits et de la clarté qui illumine pour les uns des notions qui restent profondément obscur pour d'autres. L'auteur, qui a fait d'intéressantes recherches en Hydrodynamique, est un maître très apprécié de tous ceux qui le connaissent; il a formé de nombreux élèves; ce n'est nullement un isolé ; il est de ceux qui savent communiquer leur pensée. Or, pour lui, les notions de cause, de force ou d'absence de force, sont assez claires pour servir de point de départ à la Géométrie : « La ligne droite est la trajectoire dans l'espace absolu d'un point inerte sur lequel aucune force n'agit plus. » C'est de cette définition et d'un « principe d'inertie généralisé » qu'il veut déduire la Géométrie euclidienne.

La seconde partie de son *Essai* « a pour but de montrer que les principes de la Dynamique et ceux de la Statique ne sont qu'un accord de la pensée avec elle-même et n'ont rien d'empirique ».

J. T.

BYERLY. — AN ELEMENTAR TREATISE ON FOURIER'S SERIES AND SPHERICAL, CYLINDRICAL AND ELLIPSOIDAL HARMONICS, WITH APPLICATIONS TO PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS. 1 vol. in-8° de 287 pages. London, Ginn and Cy.

Des Livres récents sur les séries de Fourier et les fonctions sphériques ou cylindriques renvoient les lecteurs au Traité plus ancien de Byerly sur ces sujets. Celui-ci, voulant rester d'un accès facile, ne contient pas, sur les séries de Fourier, les développements rigoureux qui sont maintenant entrés dans l'enseignement. Mais un très grand nombre d'exemples empruntés à la Physique mathématique, un exposé facile à suivre et réunissant, aux propriétés les plus simples des fonctions étudiées, des renseignements très précis et très clairs sur les résultats plus difficiles à établir, font de ce Traité élémentaire un très utile instrument de travail et une excellente Introduction au Livre de Riemann-Weber sur les équa-

tions aux dérivées partielles de la Physique, à celui de Heine sur les fonctions sphériques et à d'autres plus récents.

1. Une Introduction d'une trentaine de pages débute par une revue des équations du second ordre les plus importantes : équations de la chaleur, de la propagation des ondes dans un milieu élastique en coordonnées rectilignes, polaires, semi-polaires, en coordonnées curvilignes orthogonales quelconques. Le problème de Fourier sur la distribution permanente des températures dans une plaque rectangulaire de longueur infinie et le problème des cordes vibrantes montrent comment on est amené à étudier les développements en séries trigonométriques. Le potentiel dû à un anneau circulaire de section très petite conduit à l'équation différentielle des fonctions de Legendre $P_n(x)$, puis à un développement suivant les fonctions $P_n(\cos\theta)$. Enfin les vibrations d'une membrane circulaire introduisent la fonction $J_0(x)$ de Bessel et donnent l'occasion d'étudier l'équation différentielle des fonctions $J_s(x)$ et les fonctions de Bessel de seconde espèce.

2. Deux Chapitres (38 pages pour les deux) sont consacrés aux développements en séries de Fourier, à la discussion de la convergence de ces séries et à l'intégrale de Fourier.

Le lecteur remarquera, de suite, le très grand nombre des exemples traités en détail et 16 figures où sont rapprochées la courbe qui représente la fonction et les courbes qui correspondent aux premiers termes de la série trigonométrique.

Une place plus grande (65 pages) est réservée aux problèmes de Physique résolus à l'aide des séries ou des intégrales de Fourier. Les principaux de ces problèmes peuvent être groupés ainsi :

Potentiel logarithmique : Propagation de l'électricité dans une plaque infinie quand la valeur du potentiel est donnée le long d'une droite indéfinie, de deux droites rectangulaires ou de deux droites parallèles. — *Élasticité :* Mouvement d'une corde élastique avec ou sans résistance du milieu, mouvement d'une plaque rectangulaire et lignes nodales. — *Propagation de la chaleur :* Solide indéfini dont une face plane est maintenue à une température constante, à une température fonction du temps. Propagation dans une barre. Refroidissement de la sphère. Il est bon de signaler des

applications numériques dont les plus intéressantes sont empruntées à Lord Kelvin et se rapportent au refroidissement de la Terre, l'explication de l'emploi des *sources* et des *fuites :* explication reprise depuis avec plus de détails dans l'Introduction à la Théorie de la chaleur de Carlslaw.

3. Les fonctions sphériques sont étudiées dans deux Chapitres (75 pages). Dans le premier de ces Chapitres, on considère d'abord le cas où la fonction sphérique exprimée en coordonnées polaires r, θ, φ est indépendante de la longitude φ; c'est le cas des fonctions sphériques zonales.

Leurs propriétés sont rattachées à celles des polynomes de Legendre $P_m(x)$ définis par l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}} = \Sigma z^m P_m(x).$$

Les propriétés de ces polynomes sont établies par les méthodes les plus simples et rapprochées de façon que leur ensemble s'aperçoit sans peine, et l'on a soin de donner les expressions développées, avec la valeur numérique des coefficients, pour les sept premières de ces fonctions. Des figures donnent la forme des courbes

$$y = P_n(\cos\theta)$$

ou

$$y = P_n(x)$$

pour

$$n = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 7,$$

x variant de 0 à 1, et des Tables numériques donnent, avec quatre décimales, les valeurs de ces fonctions pour des valeurs de θ de degré en degré, ou pour des valeurs de x de centième en centième depuis 0 jusqu'à 1.

Les exemples sont empruntés aux théories du potentiel newtonien, de l'électricité ou de la chaleur : attraction d'un anneau matériel circulaire de petite section; potentiel dû à un disque circulaire électrisé, à des hémisphères ou à des sphéroïdes homogènes; cas où le potentiel doit prendre des valeurs données sur des sphères concentriques données, avec une symétrie circulaire autour d'un diamètre; problèmes sur le potentiel quand la densité est donnée, traités comme applications de la formule de Green.

Laissant de côté le cas particulier où la fonction sphérique est indépendante de φ, on aborde le cas général en cherchant pour l'équation de Laplace une solution de la forme $R\Theta\Phi$, chacun des facteurs ne dépendant que de l'une des trois variables indépendantes r, θ, φ. Le développement d'une fonction $f(\theta, \varphi)$ suivant les fonctions $Y_n(\theta, \varphi)$ de Laplace est expliqué, en admettant la possibilité de ce développement, et appliqué à des cas simples pour lesquels la vérification directe est facile.

Des Tableaux très clairs donnent tous les termes de $\frac{d^n P_m(\mu)}{d\mu^n}$ pour les valeurs de m et de n qui ne dépassent pas 8 et les termes de la fonction sphérique, particulièrement utile,

$$P_m[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)]$$

pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Parmi les exemples traités en détail, je citerai les suivants :

Trouver la valeur, en un point extérieur, du potentiel d'une sphère solide dont la densité en chaque point est le produit

$$r^k Y_m(\theta, \varphi)$$

d'une puissance de r par une fonction de Laplace.

Une sphère conductrice reliée au sol par un fil est sous l'influence d'un point électrisé, trouver la valeur du potentiel dû à la charge induite.

4. Sur les fonctions de Bessel, les résultats les plus usuels et des applications sont rassemblés dans une vingtaine de pages. Ceci ne peut être obtenu qu'en renvoyant le lecteur à d'autres Traités ou à des Mémoires pour les développements un peu longs comme ceux qui conduisent à la seconde solution de l'équation différentielle dans le cas d'un indice entier ou l'expression asymptotique de $J_n(x)$.

Il n'est question aussi que de variables réelles, sauf dans une application où interviennent très simplement des arguments purement imaginaires.

Une Table donne, avec trois décimales, les neuf premières racines de $J_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; une autre les douze premières racines de J_0 et de J_1 avec quatre décimales, enfin une autre les

valeurs de $J_0(x)$ et de $J_1(x)$ pour des valeurs de x croissant, de dixième en dixième, depuis 0 jusqu'à 15.

Comme applications, on étudie des problèmes de températures stationnaires dans un cylindre, les données étant symétriques autour de l'axe du cylindre, le refroidissement de manchons cylindriques, les vibrations d'une membrane circulaire.

5. L'équation de Laplace en coordonnées curvilignes est l'objet d'un Chapitre d'une trentaine de pages. On examine en particulier les coordonnées sphéroïdales, ellipsoïdales, coniques, toroïdales, relatives aux cas où les conditions initiales sont données pour un ellipsoïde de révolution, un ellipsoïde à trois axes inégaux, un cône, un tore, et dans chacun de ces cas la substitution, aux coordonnées primitives, des paramètres thermométriques de Lamé. Le cas de l'ellipsoïde à trois axes inégaux est traité avec plus de détails, l'introduction de l'équation différentielle de Lamé est expliquée, mais sans se servir des fonctions elliptiques (sauf pour l'évaluation de quelques intégrales); des Tables donnent sous forme algébrique les fonctions de Lamé des degrés 1, 2, 3.

La recherche d'un potentiel dont les valeurs sont données sur la surface d'un ellipsoïde est indiquée, avec la remarque que les calculs pratiques, même si l'on se limite aux premiers termes des développements, sont très pénibles.

6. Un dernier Chapitre donne, sur les questions traitées, un sommaire historique avec renvoi aux Mémoires mentionnés, et une liste de livres à consulter.

L'Appendice contient six Tables : outre celles dont j'ai déjà parlé, l'une de ces Tables donne, pour x croissant par centième, de 0 à 1, les valeurs de e^x, e^{-x}, $\sinh x$, $\cosh x$ et $\operatorname{gd} x$ (gudermanien de x).

E. Lacour.

FISCHER (P.). — Déterminanten. 1 volume in-8, 134 pages. Leipzig, Göschen, 1908.

C'est le n° 402 de la *Sammlung Göschen*, une collection qui, comme on voit, est déjà fort riche; tous les Volumes de cette col-

lection coûtent uniformément 80 pfennig; la plupart ont un caractère scientifique ou technique; il y en a environ une trentaine sur les Mathématiques,

Naturellement, avec le format réduit qu'impose le prix modique de chaque Volume, les auteurs ne peuvent pas beaucoup s'étendre.

Dans le court espace dont il disposait, M. Fischer a su trouver la place de quelques notions historiques, d'une petite introduction sur les théorèmes d'analyse combinatoire utiles à son sujet, des propositions les plus fondamentales de la théorie des déterminants, enfin de quelques applications importantes. L'exposition est claire et simple.

J. T.

SCHAFHEITLIN (P.). — DIE THEORIE DER BESSELSCHEN FUNKTIONEN. 1 volume, v-127 pages in-8. Leipzig, Teubner, 1908.

Cette théorie des fonctions de Bessel est le quatrième Volume d'une nouvelle collection (1) que dirige M. Jahnke et que publie la maison Teubner. Cette collection s'adresse particulièrement aux ingénieurs : elle comprendra des Volumes d'une centaine de de pages environ; chaque Volume se rapportera à un sujet limité et qui forme un tout; il permettra au lecteur de se mettre rapidement et facilement au courant des méthodes et des propositions les plus importantes, concernant le sujet; pour mesurer l'importance, on tiendra le plus grand compte des applications pratiques et l'on ne s'attachera pas, avant tout, à l'extrême rigueur.

C'est bien dans ce sens qu'est écrit le livre de M. Schafheitlin sur les fonctions de Bessel, qui tiennent un rôle important dans un grand nombre de questions de Physique, de Mécanique et d'Astronomie. Ce livre rendra assurément service au public spécial pour lequel il a été composé; les étudiants, qui veulent s'initier à la théorie de ces fonctions, le liront aussi avec profit.

L'auteur traite successivement des fonctions de Bessel de première et de seconde espèce, de leur représentation par des séries

---

(1) *Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende*, herausgegeben von E. Jahnke.

et des intégrales définies, de leurs expressions asymptotiques pour de grandes valeurs de l'argument, des développements en série suivant les fonctions de Bessel, de diverses intégrales définies où elles figurent, des expressions de $J_n(x+y)$ et de $J_n(x, y)$, des fonctions J_0 et Y_0 pour des valeurs réelles ou purement imaginaires de l'argument, des zéros de la fonction J_n.

Les formules fondamentales sont groupées dans les sept dernières pages; enfin, une planche montre l'allure des fonctions $J_{\frac{1}{2}}$, $Y_{\frac{1}{2}}$, J_0, Y_0, J_7.

J. T.

RUNGE (C.). — Analytische Geometrie der Ebene. 1 vol. in-8, 198 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Ce qui constitue l'originalité de ce petit Livre, c'est le souci évident qu'a eu l'auteur de l'adapter aux besoins d'un public de techniciens. Les lecteurs ont appris ailleurs à effectuer des constructions graphiques ; avec M. Runge, ils apprendront à calculer au besoin les résultats de ces constructions, et, sur les exemples mêmes, ils verront comment il convient de procéder, suivant qu'on se sert de Tables logarithmiques, de Tables naturelles, d'une règle à calcul, d'une machine à calculer ; ils apprendront aussi à se rendre compte du degré d'approximation sur lequel ils peuvent compter. Je dois signaler aussi le soin qu'a pris l'auteur de traiter les questions qui pouvaient être utiles en Mécanique, ou de choisir des applications dans cette science. L'étude des transformations linéaires lui permet de déduire les propriétés des coniques de celles du cercle par une méthode simple et instructive. Quelques pages enfin sur l'emploi des coordonnées homogènes, qui terminent le Livre, n'ont sans doute qu'une valeur théorique; mais il n'est pas défendu à un futur technicien de savoir par quelques exemples que la théorie est intéressante, ni à son maître de le lui montrer, avec discrétion.

J. T.

THOMAE (J.). — Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen. 1 vol. in-8, VI-182 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

M. Thomae commence par rappeler les notions et propositions élémentaires de la théorie des fonctions (bornes supérieure et inférieure, continuité, etc.), qui sont indispensables à la rigueur de l'exposition. Après avoir introduit la notion de fonction primitive, il développe celle d'intégrale définie comme limite d'une somme, au sens de Riemann, et relie les deux notions en insistant avec soin sur les précautions à prendre. Les méthodes classiques d'intégration, les théorèmes de la moyenne fournissent déjà d'intéressants exemples d'évaluation d'intégrales définies. La règle de la différenciation, sous le signe $\int$, est d'abord rattachée à la possibilité d'intervertir l'ordre des dérivations. Un exemple simple, pour lequel la règle conduit à un résultat inexact, montre la nécessité des précautions. L'auteur traite ensuite des intégrales dont les limites sont infinies, ou pour lesquelles la quantité sous le signe $\int$ devient infinie entre les limites d'intégration. Tous ces sujets sont traités avec rigueur et avec discrétion. L'auteur se borne aux cas simples et usuels.

Un important Chapitre est ensuite consacré aux séries de Fourier. Au début, M. Thomae reprend avec raison l'analyse de Lagrange, si naturelle et si élégante, qui constitue une excellente introduction au sujet. Il développe ensuite l'analyse de Dirichlet et montre, sur un exemple dû à M. Schwarz, qu'une fonction continue peut n'être pas développable en série de Fourier. Les séries trigonométriques lui donnent l'occasion de citer l'exemple de la fonction sans dérivée de Weierstrass. L'étude de l'équation des cordes vibrantes montre sur un exemple intéressant l'importance des séries trigonométriques en Physique mathématique.

Les intégrales doubles fournissent souvent un moyen aisé pour évaluer certaines intégrales simples. L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

à laquelle M. Thomae s'attache pour en développer diverses géné-

ralisations, est un exemple classique. Après avoir donné divers exemples d'évaluation d'intégrales doubles, l'auteur s'arrête sur l'intégrale de Fourier

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_a^b f(\lambda)\cos\mu(\lambda - x)\,d\lambda\,d\mu,$$

qui donne lieu à des applications et à des remarques intéressantes.

Après avoir consacré un Chapitre aux propriétés les plus importantes des intégrales eulériennes, il passe aux intégrales curvilignes pour aboutir aux intégrales de fonctions d'une variable complexe. Le théorème fondamental de Cauchy est établi par la méthode de Riemann. Quelques applications font ressortir en partie l'importance de ce théorème.

Enfin, M. Thomae termine en établissant une curieuse formule, due à Gauss, qui donne, sous forme d'une intégrale double, le nombre d'entrelacements de deux courbes dans l'espace.

J. T.

MÉLANGES.

SUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES SURFACES;

Par M. Bohuslav HOSTINSKY.

Soient u et v les coordonnées curvilignes d'un point M sur une surface dont les lignes de courbure sont représentées par les équations

$$v = \text{const.}, \qquad u = \text{const.},$$

et soient R le premier rayon de courbure principal au point M, c'est-à-dire le rayon de courbure de la section normale menée par la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ en M, R' l'autre rayon de courbure principal.

Les trois équations fondamentales de la théorie des surfaces (équations de Gauss et de Codazzi) prendront dans le système (u, v) la forme suivante :

$$(1) \qquad R_v = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}\frac{R(R'-R)}{R'},$$

$$(2) \qquad R'_u = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\frac{R'(R-R')}{R},$$

$$(3) \qquad -\frac{\sqrt{EG}}{RR'} = \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v,$$

où E, G sont les coefficients dans la formule

$$(4) \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

qui donne l'élément linéaire de la surface. Nous représenterons par

$$(5) \qquad \rho = \frac{1}{R}, \qquad \rho' = \frac{1}{R'},$$

les courbures principales ; par α et β les arcs des lignes

$$v = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad u = \text{const.}$$

qui se croisent en M.

Rappelons encore les formules suivantes qui expriment les dérivées d'une fonction $\Phi(u, v)$ prises par rapport aux arcs α et β :

$$(6) \qquad \Phi_\alpha = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u, \qquad \Phi_\beta = \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = \frac{1}{\sqrt{G}}\Phi_v.$$

En remplaçant Φ par Φ_α ou Φ_β, on obtient les formules pour les dérivées secondes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \Phi_{\alpha\alpha} = \dfrac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u\right)_u, & \Phi_{\beta\beta} = \dfrac{\partial\Phi_\beta}{\partial\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Phi_v\right)_v, \\ \Phi_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\Phi_u\right)_v, & \Phi_{\beta\alpha} = \dfrac{\partial\Phi_\beta}{\partial\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\Phi_v\right)_u. \end{cases}$$

Il faut remarquer que $\Phi_{\alpha\beta} \neq \Phi_{\beta\alpha}$ (tandis que $\Phi_{uv} = \Phi_{vu}$), car on ne peut pas, en général, choisir α et β pour coordonnées curvilignes.

Cela posé, nous allons montrer comment on peut transformer le système (1) des équations (2) et (3), de sorte que le nouveau

système formé par les équations (I), (II) et (III) ne contienne que ρ et ρ' et leurs dérivées du premier et du second ordre par rapport à α et β.

Calculons les deux expressions suivantes :

$$A = \rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}, \qquad A' = \frac{\rho_\beta(\rho_\alpha + \rho'_\alpha)}{\rho - \rho'},$$

en nous servant des équations (5), (6), (7), (1) et (2). On trouve

$$A = A' = \frac{R_v(R_u R'^2 + R'_u R^2)}{R^3 R'(R' - R)\sqrt{EG}},$$

donc

$$\text{(I)} \qquad \rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha} = \frac{\rho_\beta(\rho_\alpha + \rho'_\alpha)}{\rho - \rho'}.$$

Il est clair qu'on peut échanger α et β, pourvu qu'on échange en même temps ρ et ρ'. Cela conduit à l'équation

$$\text{(II)} \qquad \rho'_{\beta\alpha} - \rho'_{\alpha\beta} = \frac{\rho'_\alpha(\rho'_\beta + \rho_\beta)}{\rho' - \rho}.$$

Pour obtenir la troisième équation (III), calculons les deux expressions

$$B = \rho'_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta} - \rho\rho'^2 + \rho^2\rho', \qquad B' = \frac{\rho'_\alpha(2\rho'_\alpha - \rho_\alpha)}{\rho' - \rho} - \frac{\rho_\beta(2\rho_\beta - \rho'_\beta)}{\rho - \rho'}.$$

On trouve

$$B = B' = \frac{E_v}{2EGR'}\left[\frac{E_v(R - R')}{ER} + \frac{R'_v}{R'}\right] - \frac{G_u}{2EGR}\left[\frac{G_u(R' - R)}{GR'} + \frac{R_u}{R}\right];$$

donc

$$\text{(III)} \qquad \rho'_{\alpha\alpha} - \rho_{\beta\beta} = \rho\rho'^2 - \rho^2\rho' + \frac{\rho'_\alpha(2\rho'_\alpha - \rho_\alpha)}{\rho' - \rho} - \frac{\rho_\beta(2\rho_\beta - \rho'_\beta)}{\rho - \rho'}.$$

Toutes les quantités qui figurent dans le système (I), (II), (III) ont une signification géométrique indépendante du choix des coordonnées curvilignes. Le résultat que nous venons d'obtenir consiste en ce qu'on a remplacé le système de trois équations fondamentales par un système de trois équations *intrinsèques*.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J.-G. LEATHEM. — The elementary theory of the symmetrical optical instruments. In-8, vi-74 pages. Cambridge University Press Warehouse. Prix : 2 sh. 6 d.

E.-T. WHITTAKER. — The theory of optical instruments. In-8, viii-72 pages. Ibid. Prix : 2 sh. 6 d.

Ces deux petits Livres, dont le premier a 74 pages, le second 72, appartiennent à la collection intitulée *Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*. Leur lecture, qui ne demande que quelques heures, est nettement agréable; et chacun d'eux renferme ce qu'il est essentiel de connaître sur la théorie des instruments d'optique.

Le second de ces Ouvrages a été publié en 1907; le premier, en 1908. En écrivant plus haut les titres, on a rétabli l'ordre méthodique. Bien que les deux Livres aient le même nombre de pages et qu'ils traitent les mêmes questions, ils n'ont pas la même allure : l'exposé contenu dans le Livre de Leathem est plus élémentaire ; celui de l'astronome royal d'Irlande, aussi sobre d'ailleurs, contient plus de développements algébriques.

I. Pour exprimer l'effet de la réfraction sur un rayon lumineux qui rencontre la surface de séparation de deux milieux, Leathem remplace l'équation de cette surface par celle d'un paraboloïde. Il profite ainsi de ce que la portion de surface utilisée est toujours très étroite. Il donne le moyen de passer du cas d'une seule réfraction à celui de plusieurs réfractions successives; il montre l'existence des lignes focales d'un pinceau. Le cas d'un instrument de révolution autour d'une droite donne des formules simples ; l'introduction des *distances réduites*, définies comme produits des longueurs par les indices des milieux où elles se trouvent, les abrège encore. L'auteur exprime naturellement

les quantités relatives aux images en fonction de celles qui concernent les objets ; il s'introduit, comme on sait, quatre constantes liées par une relation ; l'une d'elles est la *puissance* de l'instrument. Les propriétés géométriques se présentent de la manière la plus simple.

L'auteur donne la valeur des constantes d'un instrument formé d'éléments simples ; le cas où la puissance est zéro, le cas d'une surface plane, ceux des lunettes ou télescopes et des combinaisons de deux instruments sont traités de la façon la plus claire. A propos de l'existence d'une lentille mince équivalente à un système optique, M. Leathem expose les avantages des systèmes composés, diminution des aberrations, accroissement du champ; il montre aussi que l'impossibilité de placer l'œil, en telle ou telle position par rapport à la lentille, rend souvent impossible l'emploi d'une lentille simple équivalente à un système donné. Un paragraphe est consacré à l'Unilentille du major Baden-Powell, qui a l'inconvénient d'imposer à l'œil une accommodation excessive.

Le cas de la réflexion est traité en un court Chapitre. Un autre est consacré à l'ouverture libre et à l'anneau oculaire.

Ensuite vient l'étude de la dispersion, du pouvoir dispersif, de l'achromatisme, de l'achromatisme partiel. Il en est fait application à plusieurs lentilles minces plongées dans l'air, en particulier à deux lentilles ; après quoi il est traité, avec le détail nécessaire, de l'achromatisme des oculaires de télescopes, de celui des objectifs. Des données numériques renseignent sur les verres d'Iéna ; il est rapporté des exemples numériques d'objectifs achromatiques.

En huit pages consacrées aux aberrations du troisième ordre, l'auteur montre que ces aberrations dépendent de cinq paramètres correspondant respectivement à l'aberration sphérique, à la distorsion, aux *coma,* à l'astigmatisme, à la courbure du champ.

L'Ouvrage se termine par un corps de propositions d'allure plus mathématique, relatives à la fonction caractéristique et aux lignes focales. Les derniers paragraphes se rapportent à la réfraction oblique et aux milieux hétérogènes.

II. Whittaker emploie davantage les théorèmes généraux. Au début, il établit le principe de Fermat d'après lequel la variation

de l'intégrale $\int \mu\, ds$ est nulle. Il introduit avec généralité la correspondance entre l'espace-objet et l'espace-image, en fait application aux lentilles, aux miroirs. Dans le même Chapitre, il traite de l'astigmatisme et montre sur des figures la forme des sections d'un faisceau qui a traversé obliquement un système optique. Il y explique l'existence des lignes focales.

Dans un second Chapitre sont étudiés les moyens de supprimer l'astigmatisme, soit par l'emploi d'un diaphragme, soit en pleine ouverture. L'auteur établit les trois conditions de Seidel, relatives, la première à l'aberration sphérique, la deuxième à la suppression des coma, la troisième à celle de l'astigmatisme. A propos de la seconde, il démontre l'équation dite *des sinus* et définit l'aplanétisme. Il donne la condition de Petzval pour que le champ soit plan et celle qui, ensuite, exprime qu'il n'y a pas de distorsion. Il établit une condition donnée par John Herschel pour qu'un instrument dépourvu d'astigmatisme pour la position centrale de l'objet le soit aussi pour une position voisine et démontre, d'après Klein, l'impossibilité d'un instrument parfait.

Passant à l'achromatisme, à la suppression du spectre primaire, il se borne à fournir des indications pour le spectre secondaire.

Le pouvoir séparateur d'un objectif vient ensuite ; l'auteur donne l'expression du rayon de la tache centrale d'une image d'étoile et la règle de Dawes. Le second Chapitre se termine par l'étude du pouvoir séparateur des spectroscopes.

Le troisième et dernier Chapitre contient des études sur l'objectif photographique, la téléphotographie, l'objectif à deux verres, les loupes et les oculaires, le réfracteur astronomique visuel, le réflecteur, les lunettes terrestres, les jumelles à prismes, les microscopes, le spectroscope à prismes.

L'étude si aisée de ces deux excellents Livres peut suffire à la plupart des lecteurs. Elle est, pour les autres, une introduction encourageante à celle des importants Ouvrages publiés dans ces dernières années par divers physiciens anglais et allemands, notamment par les ingénieurs de la manufacture d'Iéna.

B. B.

NIELS NIELSEN. — LEHRBUCH DER UNENDLICHEN REIHEN. 1 vol. in-8, VIII-287 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Ces intéressantes leçons sur les séries seront lues avec grand profit par les étudiants, et plus d'un mathématicien, qui n'a pas fait du sujet une étude spéciale, s'étonnera, en les parcourant, du nombre de propositions qu'il ignorait. C'est que, par la nature même des choses, dans cette matière, les vérités sont partielles, isolées ; elles ne s'enchaînent pas dans une de ces théories qui se fixent solidement dans l'esprit, où chaque vérité nouvellement acquise se rattache naturellement à ce qu'on savait déjà et dont les liens mêmes permettent d'évoquer à volonté les diverses parties. Tel théorème qu'on a lu en passant et qu'on n'a pas eu l'occasion d'appliquer est sorti de la mémoire ; on en apprécie la valeur en le retrouvant, avec ses conséquences, dans un Livre comme celui de M. Nielsen.

Ce Livre est d'un caractère élémentaire ; l'auteur a même repris la définition des nombres irrationnels, les propositions les plus élémentaires concernant les limites, les notions de la théorie des ensembles et des fonctions dont il pouvait avoir besoin ; en outre, il a multiplié les exercices, les applications intéressantes et faciles à traiter ; enfin, les renseignements bibliographiques, sans être aussi développés que dans les Livres d'un caractère plus savant qu'on doit à M. Nielsen, sont encore très nombreux.

La première Partie contient les définitions et propositions fondamentales concernant les suites infinies, dont les termes sont des nombres à simple ou à double entrée ; elles sont classées en suites *convergentes, divergentes, oscillantes*. J'en extrais la proposition suivante, qui est due à M. Jensen :

Si la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ satisfait aux deux conditions

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} |a_n| = \infty,$$

$$(2) \qquad |a_1| + |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \ldots + |a_n - a_{n-1}| < B\,|a_n|,$$

dont la seconde doit avoir lieu quel que soit le nombre naturel n, B étant un nombre positif fixe, et si la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ a

pour limite le nombre Φ, on a

$$(3) \qquad \Phi = \lim_{n=\infty} \left[\frac{a_1\varphi_1 + (a_2 - a_1)\varphi_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})\varphi_{n-1}}{a_n} \right].$$

Cette proposition peut être regardée comme une généralisation du théorème bien connu de Cauchy, en vertu duquel on a

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{b_n}{n} \right) = \lim_{n=\infty} (b_n - b_{n-1})$$

quand $b_n - b_{n-1}$ a une limite pour n infini.

M. Pringsheim a donné une généralisation du théorème de Cauchy pour les suites à deux indices; M. Nielsen montre que le procédé employé par M. Jensen permet de généraliser le théorème de M. Pringsheim. Aux conditions déjà imposées à la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ajoutons la suivante : en désignant par A_n la quantité qui figure au premier membre de l'inégalité (2), on peut faire correspondre à chaque nombre naturel n un nombre naturel q qui grandisse indéfiniment avec n, ainsi que $n - q$, et tel qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{n-q+1}}{A_{n+1}} = 1.$$

Désignons maintenant par φ_{pq} le terme général d'une suite convergente à double entrée; supposons que l'ensemble des nombres $|\varphi_{pq}|$ soit borné ([1]), et soit Φ la limite de la suite à double entrée; on aura

$$\Phi = \lim_{n=\infty} \frac{a_1\varphi_{0,n} + (a_2 - a_1)\varphi_{1,n-1} + \ldots + (a_{n+1} - a_n)\varphi_{0,n}}{a_{n+1}}.$$

La seconde Partie est consacrée aux séries à termes numériques. On y trouvera, naturellement, développées comme il convient, toutes les propositions classiques concernant les règles de conver-

---

([1]) Cette supposition n'est pas, comme pour les suites simples, impliquée par l'existence d'une limite Φ : dire que Φ est la limite de la suite à double entrée, c'est dire qu'à chaque nombre positif ε correspondent deux nombres positifs P, Q tels que les inégalités $p > P$, $q > Q$ entraînent $|\Phi - \varphi_{pq}| < \varepsilon$; or il peut en être ainsi et il peut se faire en même temps, par exemple, que, pour certaines valeurs de q, φ_{pq} augmente indéfiniment avec p.

gence; je dois signaler, comme moins courantes, les recherches de M. Pringsheim sur les critères de convergence des séries à termes positifs [1], le Chapitre sur la multiplication des séries, celui qui concerne les méthodes de transformation, dues à Euler et à M. Markoff, qui permettent d'augmenter la convergence de certaines séries.

Dans cette même Partie, on trouve un Chapitre sur les produits infinis, un autre enfin, assez considérable, sur les séries à double entrée, d'après M. Prinsgsheim.

La troisième Partie est consacrée aux séries et aux produits infinis dont les termes sont des fonctions. L'auteur, après avoir développé ce qui concerne la convergence uniforme, traite successivement de la fonction Γ, des séries trigonométriques, des séries de puissances, des séries de Dirichlet et des séries de facultés.

Pour les séries trigonométriques, il établit, en supprimant des restrictions inutiles, une proposition qu'on doit à Malmstèn :

Les deux séries

$$\sum a_n \cos nx, \quad \sum a_n \sin nx$$

convergent uniformément dans l'intervalle $(\alpha, 2\pi - \alpha)$, où α est un nombre positif aussi petit qu'on le veut, si l'on a

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

et si la série

$$\sum | a_n - a_{n+1} |$$

est convergente.

Outre diverses propositions dues à M. Pringsheim, sur la multiplication des séries trigonométriques, il donne la règle suivante :

---

(1) C'est encore à M. Pringsheim qu'est due la proposition élémentaire que voici :

Si l'on a, quel que soit n, $a_{n+1} \geq a_n > 0$ et $\lim a_n = \infty$, la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\rho}}$$

est convergente quand l'exposant ρ est positif.

Soient

$$f_1(x)=\sum_1^\infty a_n\cos nx,\qquad f_2(x)=\sum_1^\infty b_n\cos nx,$$
$$g_1(x)=\sum_1^\infty a_n\sin nx,\qquad g_2(x)=\sum_1^\infty b_n\sin nx;$$

les quatre produits $f_1 f_2, f_1 g_2, f_2 g_1, f_2 g_2$ peuvent s'effectuer par la règle de Cauchy, si les deux séries qu'on multiplie sont convergentes pour la valeur de x considérée qui, toutefois, ne doit pas être un multiple de π et si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1° On a

$$\lim_{n=\infty}\sum_{p=1}^{p=n}|a_p b_{n-p}|=0;$$

2° L'une au moins des quatre séries

$$\sum_1^\infty |a_n \pm a_{n+1}|,\qquad \sum_1^\infty |b_n \pm b_{n+1}|$$

est convergente.

Sur les séries de puissances, outre les théorèmes classiques, on trouvera une intéressante généralisation du théorème d'Abel, due à M. Frobenius ; si la série $P(x)=\sum a_n x^n$ est sommable (au sens de Cesàro) pour $x=\omega$ et si sa somme moyenne est s, $P(x)$ s'approche de s quand le point x se rapproche du point ω en restant à l'intérieur d'un angle, de sommet ω, dont les côtés sont deux cordes du cercle de convergence qui partent de ce point.

Les propositions concernant la convergence des séries de Dirichlet

$$D(x)=\frac{a_0}{\lambda_0^x}+\frac{a_1}{\lambda_1^x}+\ldots+\frac{a_n}{\lambda_n^x}+\ldots,$$

des séries de facultés, de première et de seconde espèce,

$$\Omega(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{n!\,a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$
$$B(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2\ldots n},$$

sont établies d'une façon simple : dans ces diverses séries, les coefficients a_n sont indépendants de x; dans la série $D(x)$, les coefficients des λ_n sont positifs et l'on suppose

$$\lambda_{n+1} \geqq \lambda_n, \qquad \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty;$$

toutes ces séries convergent uniformément à droite d'une parallèle à l'axe des ordonnées : il faut toutefois exclure, s'il y a lieu, pour la série $\Omega(x)$ les points $0, -1, -2, \ldots$. J. T.

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION GÉOMETRIQUE DE L'EXISTENCE DE L'INTÉGRALE DANS UN TYPE HYPERBOLIQUE PARABOLIQUE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. FILIPPO SIBIRANI, à Milan.

Dans sa Thèse *Sur les suites infinies de fonctions* [1], M. Montel, au paragraphe 31, a démontré pour l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f(x, y, z),$$

$f(x, y, z)$ étant une fonction continue, dans un certain domaine Δ, de l'ensemble des variables x, y, z, l'existence d'une intégrale continue qui se réduit pour $y = y_0$ à $\varphi(x)$ et pour $x = x_0$ à $\psi(y)$, $x_0 y_0$ étant un point du domaine Δ et $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$.

Dans cette petite Note, je veux montrer que la méthode des paraboloïdes, dont fait usage M. Montel, peut s'employer à la

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 1907.

démonstration de l'existence de l'intégrale pour un type hyperbolique parabolique d'équations, dans lequel rentre, comme cas particulier, l'équation (1); plus précisément je démontre la proposition suivante :

Étant donnée l'équation de l'ordre n

$$(2)\qquad \frac{\partial^n z}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{p-q} z}{\partial x^p\,\partial y^q}, \ldots\right)$$

où p ne surpasse pas $m-1$ et q ne surpasse pas $n-m-1$, et où f est une fonction finie et continue dans un domaine Δ des arguments qu'elle contient, il existe toujours une fonction $z = z(x,y)$ continue avec les dérivées partielles, qui paraissent dans (2), continues, laquelle satisfait à l'équation proposée. En outre, on a

$$\frac{\partial^{m-i} z}{\partial x^{m-i}} = \varphi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

pour $x = x_0$, et

$$\frac{\partial^{n-m-i} z}{\partial y^{n-m-i}} = \psi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m)$$

pour $y = y_0$; $\varphi_i(y)$ et $\psi_i(x)$ étant les fonctions arbitrairement préfixées, pourvu que les dérivées des φ jusqu'à l'ordre $n-m-1$ et les dérivées des ψ jusqu'à l'ordre $m-1$ soient continues, comprises entre certaines limites, et satisfassent aux conditions

$$\varphi_k^{(n-m-h)}(y_0) = \psi_h^{(m-k)}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, m \\ h = 1, 2, \ldots, n-m \end{pmatrix},$$

$x_0 y_0$ étant un point de Δ.

Je ferai la démonstration sur un cas particulier ; mais il est facile de voir qu'on peut l'étendre au type général dont j'ai parlé tout à l'heure.

Soit donc l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

f étant une fonction finie et continue dans un certain domaine Δ

des arguments qu'elle contient. Je suppose que la solution à chercher pour la (3) doit s'annuler sur les axes et la $\frac{\partial x}{\partial y}$ sur l'axe y ; à celles-ci on peut ramener les autres conditions aux limites, à l'aide de convenables substitutions des variables x, y, z.

Soit M le maximum de la fonction f dans le domaine

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c, \quad -d \leq \frac{\partial z}{\partial y} \leq d,$$

et je suppose que $\mathrm{M}ab < d$ et $\frac{\mathrm{M}ab^2}{2} < c - \omega$, ω étant un nombre positif préfixé aussi petit qu'on veut.

Divisons le rectangle construit sur les segments $(0 \ldots a)$ $(0 \ldots b)$ en hk rectangles partiels par les droites

$$x = x_i = i\delta, \quad y = y_j = j\eta \quad \left(\delta = \frac{a}{h}, \ \eta = \frac{b}{k}\right).$$

Envisageons le paraboloïde hyperbolique à plans directeurs $u\mathrm{O}x$, $u\mathrm{O}y$

$$\begin{aligned} u = u_{ij} &+ (x - x_i)(y - y_j) f(x_i\, y_j\, g_{ij}\, u_{ij}) \\ &+ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(u_{i+1j} - u_{ij}) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}(u_{ij+1} - u_{ij}); \end{aligned}$$

il passe par les points $(x_i y_i u_{ij})$, $(x_{i+1} y_j u_{i+1j})$, $(x_i y_{j+1} u_{ij+1})$ et il satisfait à la condition

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f(x_i\, y_j\, g_{ij}\, u_{ij}).$$

De ce paraboloïde je ne considère que le morceau dont les points se projettent à l'intérieur du rectangle de sommets $(x_i y_j)$, $(x_{i+1} y_j)$, $(x_{i+1} y_{j+1})$, $(x_i y_{j+1})$. Dans chacun des hk rectangles, je peux définir de semblables morceaux de paraboloïde lorsque je fais les conventions qui suivent. Avec u_{ij} je dénote l'ordonnée u dans le point $x_i y_j$ au paraboloïde défini dans le rectangle qui a le point $x_i y_j$ pour sommet supérieur droit ; avec g_{ij} j'indique la valeur en $(x_i y_j)$ de la fonction $g(x, y)$ définie, dans le rectangle de

sommets $(x_i y_{j-i})$, $(x_i y_j)$, $(x_{i+1} y_{j-1})$, $(x_{i+1} y_j)$, par

$$g(x, y) = \sum_{r=0}^{j-2} \Big[u_{ir}(y_{r+1} - y_r) + \frac{1}{2}(x - x_i)(y_{r+1} - y_r)^2 f(x_i y_r g_{ir} u_{ir})$$
$$+ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(u_{i+1r} - u_{ir})(y_{r+1} - y_r) + \frac{1}{2}(y_{r+1} - y_r)(u_{ir+1} - u_{ir}) \Big]$$
$$+ u_{ij-1}(y - y_{j-1}) + \frac{1}{2}(x - x_i)(y - y_{j-1})^2 f(x_i y_{j-1} g_{ij-1} u_{ij-1})$$
$$+ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(u_{i+1j-1} - u_{ij-1}) + \frac{1}{2} \frac{(y - y_{j-1})^2}{y_j - y_{j-1}}(u_{ij} - u_{ij-1});$$

enfin, pour définir les morceaux de paraboloïdes relatifs aux deux rangées de rectangles qui ont un côté sur les axes, je pose

$$u_{i0} = u_{0j} = 0 \qquad \text{et} \qquad g_{i0} = g_{0j} = 0.$$

L'ensemble des hk morceaux des paraboloïdes considérés forme une surface $\sum_{hk}$ qui est la représentation géométrique d'une fonction $\upsilon_{[hk]}(x, y)$ [1] définie dans le rectangle construit sur les segments $(0 \ldots a)(0 \ldots b)$. Et dans le même rectangle se trouve définie une fonction $\gamma_{[hk]}(x, y)$ par la (4) étendue à tous les rectangles partiels.

On voit immédiatement que

$$\gamma_{[hk]}(x, y) = \int_0^y \upsilon_{[hk]}(x, y)\, dy.$$

Il y a une infinité de fonctions $\upsilon_{[hk]}(x, y)$, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre des rectangles partiels, qui forme une famille de fonctions également continues, comme je le démontrerai.

Chaque section de $\sum_{hk}$ avec un plan parallèle à uOx par un point de l'axe y compris entre 0 et y_1 est une ligne polygonale dont les côtés ont des coefficients angulaires inférieurs, en valeur absolue, à ηM; alors, dans le rectangle $(0 \ldots y_1)(0 \ldots x_i)$,

$$|\upsilon_{[hk]}| < M \eta i \delta.$$

Les sections de $\sum_{hk}$ avec des plans parallèles à uOx pour y

---

(1) Les indices $[hk]$ dénotent que les côtés du rectangle $(0 \ldots a)(0 \ldots b)$ ont été divisés en h et k parties respectivement.

compris entre y_j et y_{j+1} sont des polygonales dont les coefficients angulaires $q(y)$ sont compris entre $q(y_j)$ et $q(y_{j+1})$, qui sont les coefficients angulaires des sections par $y=y_j$ et $y=y_{j+1}$. A l'aide de simples considérations, on voit que, pour $y_{j-1} \leqq y \leqq y_j$,

$$|q(y)| < \mathrm{M} j \eta$$

et par conséquent que, dans le rectangle $(0\ldots a)(0\ldots b)$,

$$|q(y)| < \mathrm{M} b.$$

Alors la $|\upsilon_{[hk]}|$ dans le rectangle $(y_{j-1}\ldots y_j)(0\ldots x_i)$, et *a fortiori* en $(0\ldots y_j)(0\ldots x_i)$, reste inférieure à $\mathrm{M} i \delta j \eta$.

Il est facile de voir que, en $(0\ldots y_j)(0\ldots x_i)$, on aura

$$|\gamma_{[hk]}| < \mathrm{M} i \delta \left(\frac{j+1}{2}\right) \eta^2,$$

d'où l'on tire que dans le rectangle $(0\ldots a)(0\ldots b)$ on a

$$|\upsilon_{[hk]}| < \mathrm{M} h \delta k \eta = \mathrm{M} ab < d,$$

$$|\gamma_{[hk]}| < \mathrm{M} h \delta \left(\frac{k+1}{2}\right) \eta^2 = \frac{\mathrm{M} ab^2}{2} + \frac{\mathrm{M} ab^2}{2k} < \frac{\mathrm{M} ab^2}{2} + \omega < c$$

pour h quelconque et $k > \dfrac{\mathrm{M} ab^2}{2\omega}$.

Si je dénote avec $p(x)$ le coefficient angulaire des sections de $\sum_{hk}$ par des plans parallèles à $u\mathrm{O}y$ conduits par un point d'abscisse x, on verrait facilement que

$$|p(x_{i+1}) - p(x_i)| < \mathrm{M}(x_{i+1} - x_i),$$

d'où, quel que soit x,

$$|p(x)| < \mathrm{M} a.$$

Toutes les fonctions $\upsilon_{[hk]}(x, y)$ forment donc une famille de fonctions également continues; on peut choisir une suite de fonctions, où h et k croissent tous les deux, qui tende uniformément à une fonction continue $\mathrm{U}(x, y)$. Alors la suite des $\gamma_{[hk]}$, douées des mêmes indices, tend uniformément à

$$\int_0^y \mathrm{U}(x, y)\, dy.$$

D'un autre côté, la suite des fonctions

$$f(x, y, \gamma_{[hk]}, \varphi_{[hk]}),$$

toujours pour les mêmes indices h et k jadis considérés, tend uniformément à

$$f\left[x, y, \int_0^y \mathrm{U}(x, y)\, dy, \mathrm{U}(x, y)\right].$$

Mais, puisque, sur les sommets des rectangles qui se rapportent à chaque division,

$$\frac{\partial^2 \varphi_{[hk]}}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, \int_0^y \varphi_{[hk]}\, dy, \varphi_{[hk]}\right),$$

on aura encore

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, \int_0^y \mathrm{U}\, dy, \mathrm{U}\right)$$

ou, si nous posons

$$\int_0^y \mathrm{U}\, dy = \mathrm{Z}(x, y),$$

il viendra

$$\frac{\partial^3 \mathrm{Z}}{\partial x\, \partial y^2} = f\left(x, y, \mathrm{Z}, \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}\right).$$

En outre, comme

$$\varphi_{[hk]}(0, y) = \varphi_{[hk]}(x, 0) = 0, \qquad \gamma_{[hk]}(0, y) = \gamma_{[hk]}(x, 0) = 0,$$

on a

$$\mathrm{Z}(x, 0) = \mathrm{Z}(0, y) = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

La fonction Z satisfait donc l'équation (3) et vérifie les conditions aux limites que nous avons imposées; ainsi le théorème est démontré.

En somme, nous avons pris comme nouvelle fonction inconnue la $\frac{\partial z}{\partial y} = u$; la z devient $\int_0^y u\, dy$ si l'on veut que la condition $z(x, 0) = 0$ soit remplie, et alors on doit déterminer la fonction u qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, \int_0^y u\, dy, u\right)$$

et qui s'annule sur les axes.

Si nous avons l'équation générale (2), nous pouvons, avec de simples substitutions, nous réduire au cas que $x_0 = y_0 = 0$ et que les fonctions φ_i et ψ_i qui paraissent dans l'énoncé soient nulles.

Si nous posons

$$\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-m-1}} = u(x, y),$$

$$\int_0^x \int_0^y u(x, y)\, dx^{m-p-1}\, dy^{n-m-q-1} = g^{(m-1-p,\, n-m-1-q)}(u),$$

l'équation (2) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f[x, y, g^{(m-1, n-m-1)}(u), g^{(m-2, n-m-1)}(u), g^{(m-1, n-m-2)}(u), \ldots, g^{(m-1-p, n-m-1-q)}(u), \ldots, u].$$

On construira une surface $\sum_{hk}$ à l'aide de morceaux de paraboloïdes, en définissant des fonctions $\gamma_{[hk]}^{(m-1-p, n-m-1-q)}(x, y)$ analogues à la $\gamma_{[hk]}$, jadis considérée, de façon qu'on ait

$$\int_0^x \int_0^y \gamma_{[hk]}^{(m-1-p, n-m-1-q)}(x, y)\, dx^{m-1-p}\, dy^{n-m-1-q} = \upsilon_{[hk]}(x, y)$$

si $u = \upsilon_{[hk]}(x, y)$ est l'équation de la surface $\sum_{hk}$.

Les $\upsilon_{[hk]}$ forment une famille de fonctions également continues; il y a alors une suite de fonctions $\upsilon_{[h'k']}$ qui tend uniformément à une fonction U, et les suites de fonctions $\gamma_{[h'k']}^{m-1-p, n-m-1-q}$ tendent uniformément aux fonctions

$$\int_0^x \int_0^y \mathrm{U}\, dx^{m-1-p}\, dy^{n-m-1-q}$$

pour toutes les valeurs de p et de q, et l'on a

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\, \partial y} = f[x, y, g^{(m-1, n-m-1)}(\mathrm{U}), \ldots, g^{(m-1-p, n-m-1-q)}(\mathrm{U}), \ldots, \mathrm{U}],$$

ou bien

$$\frac{\partial^n \mathrm{Z}}{\partial x^m\, \partial y^{n-m}} = f\left(x, y, \mathrm{Z}, \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{p+q} \mathrm{Z}}{\partial x^p\, \partial y^q}, \ldots, \frac{\partial^{n-2} \mathrm{Z}}{\partial x^{m-1}\, \partial y^{n-m-1}}\right),$$

si nous posons

$$\mathrm{Z} = \int_0^x \int_0^y \mathrm{U}\, dx^{m-1}\, dy^{n-m-1}.$$

La fonction Z satisfait à la (2) et aux conditions aux limites que nous avons imposées ([1]).

CORRESPONDANCE ENTRE LIOUVILLE ET DIRICHLET ([2]).

Publiée par M. J. TANNERY.

(*Suite.*)

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Ne vous étonnez pas, cher et excellent ami, si je réponds un peu tard à votre lettre qui ne m'a pas trouvé ici lorsqu'elle est arrivée mercredi dernier. Je viens de faire une absence de plusieurs jours, ayant profité avec quelques amis, Riess, Magnus, Rose et Poggendorf, des vacances de Pâques et du printemps si précoce dont nous jouissons cette année pour faire une petite excursion dans les environs de Dresde. C'est seulement la veille de notre départ que j'avais eu connaissance de la liste présentée par vous au nom de la Commission ([3]), grâce à l'obligeante attention de M. de Humboldt qui l'avait extraite pour moi du journal du savant abbé ([4]). En voyant cette liste qui porte si visiblement l'empreinte de votre indulgente amitié, j'avais bien conçu quelque

([1]) Si la fonction f satisfait à la condition de Lipschitz, la fonction Z est unique. On peut voir à ce propos : F. Sibirani, *Unicità dell' integrale in alcuni tipi di equazioni alle derivate parziali* (*Periodico di Matematica*, Livorno, 1908).

([2]) Voir *Bulletin*, t. XXXII_1, 1908, p. 47 et p. 88. Page 55, la date de la lettre de Liouville à Dirichlet, 26 mai 1840, a été omise.

([3]) La Commission élue le 6 mars 1854, afin de présenter une liste de candidats pour la place d'Académicien étranger vacante par suite de la mort de Léopold de Buch, était composée de : Liouville, Élie de Beaumont, Biot (Sciences mathématiques); Flourens, Thénard, Chevreul (Sciences physiques); Combes, président en exercice; la liste présentée le 10 avril comprenait Dirichlet en première ligne et, en seconde ligne : Airy, Ehrenberg, Herschel, Liebig, Melloni, Müller, Murchison, Owen, Plana, Struve. Le 17 avril, Dirichlet fut élu par 41 voix contre 6 à Airy, 2 à Müller et 1 à Ehrenberg.

([4]) La composition de la Commission est annoncée dans le *Cosmos* du 10 mars 1854, p. 300.

espoir de réussir sans toutefois partager la confiance de Mr de H. qui ne doutait plus de ma nomination. Mais l'incertitude où j'étais a enfin cessé vendredi dernier au moment de me rendre à la gare de Dresde pour revenir ici, ayant lu dans un journal que l'Académie des Sciences m'avait fait l'honneur insigne de me recevoir, moi chétif géomètre, au nombre de ses huit associés étrangers. Je n'ai pas besoin de vous dire combien cette heureuse nouvelle me rendait impatient de rentrer chez moi, où j'étais sûr de trouver une lettre de vous, et de vous témoigner ma reconnaissance la plus vive. C'est à mon très grand regret qu'un refroidissement gagné en route et qui m'a retenu plusieurs jours au lit, ne m'a pas permis plus tôt de m'acquitter d'un devoir qu'il me tardait tant de remplir. En prenant enfin la plume pour vous écrire, je ne sais comment vous exprimer les sentiments de gratitude si vifs qui m'animent et comment vous remercier dignement vous et nos amis communs, de la bonté pleine d'indulgence que vous avez montrée dans une circonstance si importante pour moi. Veuillez être l'interprète de ma reconnaissance auprès de Mrs Chasles, Lamé, Pelouze, Sturm, Poncelet et Duhamel et être assuré avec eux que le souvenir d'un si grand bienfait est à jamais gravé dans mon cœur et que tous mes efforts tendront désormais à justifier dans la mesure de mes faibles moyens la bienveillance de tant d'hommes éminents qui m'a valu d'une manière si prématurée la plus haute distinction qu'un savant puisse ambitionner.

En attendant que je puisse adresser mes remerciements (¹) à l'Académie, ce que je ne dois faire, à ce que je suppose, qu'après que ma nomination m'aura été annoncée par Mr de Beaumont, je prends la liberté de vous prier, cher ami, de vouloir exprimer ma vive reconnaissance aux membres de la Commission qui, sans me connaître personnellement et pour la plupart étrangers aux sciences mathématiques, m'ont traité si favorablement sur votre autorité à juste titre si puissante, mais que dans le cas particulier l'amitié que vous me portez pouvait rendre un peu suspecte.

Je suis si loin de vous en vouloir de votre long silence que je me suis au contraire reproché plus d'une fois à moi-même de ne pas vous avoir écrit pour vous témoigner la vive part que je prenais

(¹) Ils sont mentionnés aux *Comptes rendus* de la séance du 22 mai.

aux chagrins que devaient vous causer les persécutions odieuses exercées contre vos amis et même contre votre fils (1) au début dans sa carrière. C'est avec une satisfaction bien vive que j'apprends de vous même que vous ne perdez pas courage et je pense comme vous que lorsqu'on ne veut que ce qui est juste et vrai, on peut attendre l'avenir avec confiance.

Ayez la bonté de présenter mes respects à Madame Liouville et de lui dire que je pense souvent avec délices aux jours si agréables qu'il m'a été donné de passer dans votre intérieur. Ne m'oubliez pas non plus auprès de Mesdemoiselles Louise et Marie, ainsi qu'auprès de Mrs votre fils et votre frère et recevez encore une fois l'assurance de la gratitude et de l'amitié éternelle de

Votre dévoué

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Berlin, ce 25 avril 1854.

N'oubliez pas de m'envoyer la note de ce qui vous manque du journal de Crelle. Les anciens volumes commencent à être rares et il n'y a pas de temps à perdre pour compléter votre collection.

DIRICHLET A MADAME LIOUVILLE.

MADAME,

Ce n'est pas parce que, comme vous le disiez le jour de mon départ, depuis l'établissement des chemins de fer tout voyageur a le devoir d'accuser promptement son arrivée, je me hâte de vous écrire, c'est bien plutôt parce que j'éprouve le besoin de vous renouveler à vous et à toute votre famille l'expression de ma vive reconnaissance pour les marques de bienveillance dont vous m'avez comblé pendant mon séjour dans la capitale du monde. Grâce à cette bienveillance j'ai pu, en même temps que je jouissais de tous les agréments de la grande ville, me croire chez moi lorsque je me trouvais dans votre intérieur.

Mon voyage a été singulièrement favorisé par le beau temps et

(1) Le Verrier avait été nommé directeur de l'Observatoire le 30 janvier 1854.

la première nuit, la seule que j'ai passée en route, était très belle quoique un peu fraîche ; je m'étais bien promis de saluer la bonne ville par le beau clair de lune que nous avions, mais ma bonne volonté n'a pas résisté aux suites des fatigues de la journée et à celles de votre copieux dîner. Je n'ai qu'un souvenir confus que notre arrivée à Épernay et Bar-le-Duc a été annoncée, mais je ne me suis nullement aperçu de notre passage à Toul et je ne me suis entièrement réveillé que dans la gare de Metz. C'est là sans doute un grand méfait dont je demande humblement pardon à Mademoiselle Louise.

J'ai trouvé Mad. Dirichlet assez souffrante à mon arrivée, les fatigues du déménagement et un refroidissement gagné plus tard ayant fortement agi sur ses nerfs, qui, comme vous savez, Madame, sont loin d'être dans un état normal; mais le beau temps dont nous jouissons depuis quelques jours et nos deux jardins ne tarderont pas à lui rendre son état de santé ordinaire. Elle se joint à moi pour vous remercier des nombreuses commissions que vous avez bien voulu faire pour elle. Tout ce que j'ai apporté fait sensation ici et personne ne veut m'écouter lorsque je réclame une part, bien modeste sans doute, dans le choix des robes pour moi. A propos de modestie, veuillez dire à Mr Liouville que si l'envoi de l'épreuve de ma lettre ([1]) datée de Paris lui cause le moindre embarras, je le prie d'y faire tous les changements qu'il jugera convenables. En réfléchissant à ce que je viens de dire je vois qu'il ne s'agit pas là de modestie, les changements qu'il y ferait ne pouvant que tourner à mon profit.

Remerciez, s'il vous plaît, M. Ernest de toutes les complaisances qu'il a eues pour moi et remerciez-le surtout de sa bienveillante attention de me conduire au chemin de fer. Son étoile changeante ([2]) avait déjà attiré l'attention de notre astronome adjoint ([3]) qui ne manquera pas d'en faire une étude suivie. En

---

([1]) *Sur l'équation* $t^2 + u^2 + v^2 - w^2 = 4m$ (*Journal de Liouville*, 2e série, t. I, 1856, p. 210); il en est question dans la dernière lettre de Dirichlet.

([2]) Le Tome XLII (1856) des *Comptes rendus* contient (p. 546) une Note d'Ernest Liouville *Sur deux étoiles variables*.

Les observations d'Ernest Liouville remontent à l'année 1853 ; il avait eu l'intention de les poursuivre : « Mais, dit-il, les moyens de travail me manquent. »

([3]) D'après l'indication donnée au Compte rendu (*en marge*).

attendant que M. Ernest devienne célèbre au barreau, il est donc sûr d'acquérir l'immortalité par son étoile.

Agréez, s'il vous plaît, Madame, les compliments de Mad. Dirichlet, faites agréer mes souvenirs affectueux à toute la famille et recevez les hommages respectueux de

Votre dévoué

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Göttingen, ce 25 avril 1856.

LIOUVILLE A DIRICHLET (1).

Mon cher ami,

Vous me comblez. Il y a quelques jours, M. Deville m'a remis de votre part la médaille de Gauss. J'allais vous en faire mes remerciements quand une lettre de M. Haussmann arrive et m'apprend que je viens d'être nommé associé étranger de la Société royale des Science de Gœttingue. Je réponds à M. Haussmann et je le prie de transmettre au corps illustre qu'il représente comme secrétaire l'expression de ma vive gratitude. Mais c'est à vous surtout que je dois une éternelle reconnaissance. Vos bontés me soutiennent et m'encouragent. Je vais me remettre au travail avec une ardeur nouvelle. J'ai été content de mes vacances, et je me porte mieux qu'à l'ordinaire. Tous les miens se rappellent à votre souvenir. Mes respects à vos Dames.

Mille amitiés pour vous.

J. L.

P. S. — Deux mots de réponse, s'il vous plaît, pour me dire si M. Haussmann a reçu ma lettre et si j'ai autre chose [à faire]. Dois-je, par exemple, écrire au Ministre à Gœttingue qui a confirmé mon élection?

---

(1) Cette lettre et la suivante à I.-F. Haussmann sont sur la même feuille.

Les *Nachrichten* de Göttingen pour l'année 1856 (p. 285) mentionnent la nomination de Joseph Liouville, E. Kummer, F.-C. Neumann comme associés étrangers dans la Classe mathématique, et celle de Henri Sainte-Claire Deville comme correspondant dans la Classe de Physique. Étaient nommés correspondants dans la Classe mathématique : G. Rosenhain, C. Weierstrass, O. Hesse, P. Riess, R. Kohlrausch.

LIOUVILLE A HAUSSMANN.

Paris, 4 décembre 1856.

Monsieur,

Je reçois la lettre par laquelle vous m'annoncez que la Société royale des Sciences de Gœttingue vient de m'admettre au nombre de ses associés étrangers. Ce témoignage d'estime de la part d'un corps si distingué me touche vivement et me pénètre de reconnaissance.

Veuillez, Monsieur, recevoir mes remerciements empressés et transmettre à mes nouveaux confrères l'expression de ma profonde gratitude.

A M. Haussmann, secrétaire perpétuel.

DIRICHLET A MADAME LIOUVILLE.

Oui, Madame, après tant de services que vous avez daigné me rendre, j'ose vous en demander un nouveau qui aurait pour moi plus de prix encore que l'emplette de la fameuse robe qui fait toujours l'admiration de la société de Gœttingue. Mais malgré l'importance que j'attache à la chose que je voudrais obtenir par votre bienveillante intervention, je dois vous prier instamment de regarder ma prière comme non avenue, si la chose pouvait vous causer le moindre embarras et ne se trouvait pas, en quelque sorte, sous votre main. Voici, Madame, de quoi il s'agit. Je crois vous avoir dit qu'une de mes nièces prévoyant qu'à la mort de son père — événement survenu depuis — elle se trouverait presque sans fortune, avait eu le bon esprit de se former à l'état d'institutrice et qu'après avoir fait un bon examen et obtenu un diplôme, elle s'était engagée dans un pensionnat de Londres où elle fonctionne depuis près de deux ans. Cette jeune personne — et en la nommant ainsi, je la flatte un peu puisque ma nièce a passé la trentaine — avant de retourner en Allemagne, voudrait se perfectionner dans la langue française et se placer à cet effet vers Pâques, où son

engagement actuel finit, dans quelque pensionnat de Paris. Si donc, Madame, parmi les personnes avec lesquelles vous êtes en relation à Paris, se trouvait quelque maîtresse de pension et que, l'occasion se présentant, vous voulussiez vous informer auprès d'elle, si elle pourrait employer une jeune allemande sachant, outre sa langue, assez bien l'anglais et les éléments des nombreuses sciences dont on est dans l'usage de donner une teinture aux jeunes demoiselles, je vous devrais une éternelle reconnaissance. Dans le cas où la réponse serait favorable, veuillez, Madame, me le dire en deux mots et me donner en même temps l'adresse de la maîtresse de pension pour que ma nièce puisse lui écrire et lui envoyer ses certificats. — Mais, je le répète, Madame, prenez que je n'ai rien dit si vous ne connaissez pas de maîtresse de pension et si le service que je vous demande pouvait exiger des démarches qui vous donnassent le moindre souci.

Puis-je vous prier d'agréer les amitiés de Mad. Dirichlet ainsi que mes hommages respectueux et [de] nous rappeler au souvenir de toute votre famille?

P. S. — Il est sans doute superflu d'ajouter que si ma nièce pouvait se placer dans quelque famille, cela vaudrait mieux encore.

Votre dévoué

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Gœttingue, ce 12 déc. 1856.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

MON CHER AMI,

Par le plus singulier des hasards, je me trouve en mesure de lever la difficulté qui vous tourmente, sans que cela me coûte aucun effort d'esprit et voici comment. Outre M. Riemann dont je vous ai déjà parlé, nous avons ici un autre jeune agrégé de l'Université, fort distingué, M. Dedekind [1] qui s'est beaucoup occupé de la théorie des équations — il connaît à fond les travaux de Galois — et de celle des congruences. Ce jeune savant ayant

---

[1] *En marge :* il y a de lui deux ou trois Mémoires dans *Crelle*.

remarqué, il y a déjà quelque temps, la lacune dont il s'agit dans le Mémoire de M. Kummer (¹) s'est attaché à la combler et, après y être parvenu à la suite de plusieurs tentatives infructueuses, il m'a fait part du moyen très simple dont il avait fait usage, et c'est ce moyen de Dedekind que je vais vous indiquer.

Conservant les notations de Kummer, il s'agit de prouver que la congruence $\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$ aura e racines réelles si le nombre premier q satisfait à la condition $q^f \equiv 1 \pmod{n}$. Avant de le faire, précisons bien le sens de la proposition qui consiste en ceci : il existe toujours des entiers u, u_1, ..., u_{e-1} tels qu'on a *identiquement*

$$\varphi(y) \equiv (y-u)(y-u_1)\ldots(y-u_{e-1}) \qquad (\operatorname{mod} q),$$

c'est-à-dire qu'en développant suivant les puissances de la quantité entièrement indéterminée y, les coefficients des puissances semblables sont congrus mod q.

Le sens d'une congruence renfermant une indéterminée y ainsi fixé, rien n'empêche d'étendre la définition au cas où les coefficients ne sont plus des entiers, mais des fonctions entières à

(¹) Je n'ai pas su préciser le Mémoire auquel il est fait allusion ici. Un peu plus loin, Dirichlet signale le Mémoire du Tome 53 (1857), p. 142-148, du *Journal de Crelle : Ueber die den Gaussischen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln,* où Kummer « revient sur le point en litige et le traite rigoureusement » ; il est à remarquer que Kummer, après avoir énoncé le théorème en question, et avant d'en donner une nouvelle démonstration, renvoie le lecteur d'une part au Mémoire du Tome 35 (1839), p. 327 : *Ueber die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren*, où il a donné divers développements relatifs à ce théorème, et, d'autre part, au Mémoire du Tome 30 (1845), p. 107-116 : *Ueber die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen,* où il en aurait donné une première démonstration rigoureuse : « *Dieses habe ich zuerst in der Abhandlung...streng bewiesen.* »

Quant aux notations qui ne sont pas expliquées dans la lettre de Dirichlet, leur sens résulte sans difficulté des divers Mémoires de Kummer.

Le nombre n est premier, $n-1=ef$; η_a $(a=0, 1, \ldots, e-1)$ est une période au sens de Gauss, c'est-à-dire qu'on a

$$\eta_a = \alpha^{g^a} + \alpha^{g^{a+e}} + \alpha^{g^{a+2e}} + \ldots + \alpha^{g^{a+(f-1)e}},$$

en désignant par α une racine imaginaire de l'équation $x^n - 1 = 0$ et par g une racine primitive de la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$; enfin $\varphi(y)$ est le polynome $y^e + A_1 y^{e-1} + \ldots + A_e$, à coefficients entiers, dont les racines sont les périodes η, η_1, ..., η_{e-1}.

coefficients entiers des périodes η, η_1, ..., les coefficients étant regardés comme congrus lorsque, dans leur différence qu'on peut mettre, et cela d'une manière unique, sous la forme $c\eta + c_1\eta_1 + \ldots$, c, c_1, ... sont tous divisibles par le module q.

Cela posé, considérons la congruence évidemment identique

$$z(z-1)\ldots(z-q+1) \equiv z^q - z \pmod{q},$$

qui ne perdra pas ce caractère en y remplaçant z par $y - \eta_a$, y étant une nouvelle variable; il vient ainsi

$$\begin{aligned}&(y-\eta_a)(y-1-\eta_a)\ldots(y-q+1-\eta_a)\\ &\quad\equiv (y-\eta_a)^q - (y-\eta_a) \equiv y^q - y - (\eta_a^q - \eta) \pmod{q}.\end{aligned}$$

En remplaçant η_a par la somme des racines que cette lettre désigne et ayant ensuite égard à la condition $q^f \equiv 1 \pmod{n}$, on trouve facilement

$$\eta_a^q \equiv \eta_a \pmod{q},$$

ce qui réduit le second membre à $y^q - y$. Posant

$$a = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad e-1$$

et multipliant, il viendra

$$\varphi(y)\varphi(y-1)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv (y^q-y)^e \equiv y^e(y-1)^e\ldots(y-q+1)^e \pmod{q}.$$

De cette dernière congruence on conclut sur le champ la proposition qu'il s'agit d'établir; il suffit d'y appliquer un théorème connu et d'ailleurs facile à prouver. Pour énoncer ce théorème, soient $f(y)$, $f_1(y)$, $f_n(y)$ des polynomes à coefficients entiers, les coefficients des plus hauts termes étant supposés pour plus de simplicité égaux à l'unité. Si maintenant nous disons que $f(y)$ est divisible par $f_1(y) \pmod{q}$ lorsqu'il existe une congruence identique

$$f(y) \equiv f_1(y) f_n(y) \pmod{q}$$

et que nous appellions le polynome $f(y)$ irréductible suivant le module q lorsqu'il n'est divisible par aucun polynome de degré inférieur, en exceptant le degré zéro, mod q, le théorème en question consiste en ce qu'un polynome irréductible $(\text{mod}\, q)$ qui divise $(\text{mod}\, q)$ le produit d'autres polynomes, divise nécessairement $(\text{mod}\, q)$ l'un de ces derniers. Or, toute expression du pre-

mier degré étant irréductible, l'application du théorème à notre dernière cong. donne immédiatement comme je l'ai déjà dit, la proposition en question.

Il y a deux Mémoires très intéressants de M. Schönemann sur les congruences renfermant une variable y et rapportées à un module premier [*Crelle*, vol. 19, p. 306 (1), vol. 31, p. 269 (2)] dont le premier contient (à la page citée) une proposition qui est au fond la même que celle dont M. Kummer fait usage et dont nous venons de nous occuper (3). M. Kummer ne faisant pas mention des ingénieuses recherches de Schönemann, il faut croire qu'il ne les a pas connues. J'ajoute en terminant cette longue lettre que dans le dernier cahier de Crelle-Borchardt, vol. 53, cah. 2, que je viens de recevoir, M. K. revient de son côté sur le point en litige et le traite rigoureusement, mais, je crois, d'une manière moins simple que Dedekind.

Veuillez remercier Madame Liouville en mon nom de la communication qu'elle a bien voulu me faire, lui présenter mes respects et les compliments de Mad. Dirichlet, et nous rappeler au souvenir de toute la famille.

Votre tout dévoué

DIRICHLET.

Gœttingue, ce 1er fév. 1857.

P. S. — Comme vous étiez souffrant, j'attends *sans retard* des nouvelles de votre santé ainsi que de celle de Mr Chasles sur laquelle vous gardez obstinément le silence.

---

(1) *Theorie der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben*, p. 231-243 et 289-308.

(2) *Grundzuge einer allgemeinen Theorie der höheren Congruenzen, deren Modul eine reelle Primzahl ist*, p. 269-325.

(3) Au lieu de considérer le polynome $\varphi(y)$ dont les racines sont les diverses périodes, Schönemann considère, d'une façon générale, le polynome

$$\Phi(y) = y^e + A'_1 y^{e-1} + \ldots,$$

à coefficients entiers, dont les racines s'obtiendraient en remplaçant, dans une fonction symétrique entière à coefficients entiers des variables $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{f-1}$, ces variables par les racines de $x^n - 1 = 0$ dont les périodes sont les sommes respectives: Schönemann démontre que si q est un nombre premier, non inférieur à e, satisfaisant à la condition $q^f \equiv 1 \pmod{n}$, la congruence $\Phi(y) \equiv 0 \pmod{q}$ a q racines réelles.

DIRICHLET A MADAME LIOUVILLE.

Permettez-moi, Madame, de vous adresser une nouvelle et je crois pouvoir ajouter dernière prière en faveur de ma nièce Mademoiselle Baerns dans l'intérêt de laquelle vous avez déjà eu la bonté de prendre quelques informations et qui vous remettra ces lignes. Je regrette infiniment la peine qu'ont dû vous donner ces informations maintenant sans objet par un changement récemment survenu dans la position de ma nièce. Ayant accepté une place avantageuse qui lui était offerte en Allemagne, elle a dû renoncer à l'idée de prendre un engagement à Paris, où elle se trouve en ce moment pour ainsi dire de passage et pour un temps très limité. Si pendant les quelques semaines qu'elle se propose de passer à Paris, vous vouliez bien, Madame, lui permettre de vous voir quelquefois et lui accorder un peu de cette bienveillance à laquelle vous avez habitué depuis longtemps, vous et toute la famille, l'oncle de la jeune personne, je vous en aurais la plus grande obligation. Je ne dirai toutefois pas que cela augmenterait la reconnaissance dont les bienfaits de la famille Liouville m'ont pénétré depuis longtemps, car mariée à la Géométrie vous savez aussi bien que moi que les quantités infinies ne sont pas susceptibles d'accroissement.

Mad. Dirichlet me charge de ses compliments auxquels je joins mes souvenirs affectueux pour toute la famille, sans en excepter le chef, quoique cet illustre chef me traite d'une manière peu amicale. Croiriez-vous, Madame, qu'ayant fourni et fourni de suite, il y a près de 4 mois, à Mons. Liouville un renseignement qu'il m'avait demandé, et l'ayant prié en même temps de me donner promptement des nouvelles de sa santé dont il paraissait peu content, je suis resté sans réponse. Heureusement que le *Compte rendu* et le *Journal des Mathé.* sont là pour me rassurer, un homme productif à ce point ne peut pas être un homme bien malade.

Veuillez, Madame, agréer les hommages respectueux de

Votre dévoué serviteur

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

Gœttingue, ce 21 mai 1857.

DIRICHLET A LIOUVILLE.

Gœttingue, ce 27 août 1858.

MON CHER ET EXCELLENT AMI,

Pour vous prouver que je ne suis pas incorrigible, je me hâte de vous remercier de la promptitude au-dessus de tout éloge avec laquelle vous avez bien voulu me répondre et de vous exprimer en même temps mes regrets les plus vifs de voir renvoyé aux calendes grecques la visite sur laquelle nous avions compté pour cette année. — Mad. Dirichlet est de retour depuis quelques jours, je ne tarderai pas à me mettre en route moi-même. Je me dirigerai probablement vers la Bavière rhénane, le Palatinat (1), pays renommé pour la cure de raisins qui y doit commencer cette année vers le premier septembre, si l'on peut s'en rapporter aux annonces dans les journaux. Comme je me trouverai là sur la frontière de France, à 5 ou 6 heures de Toul, je n'ai pas besoin de vous dire si je suis tenté de faire une apparition dans la ville antique que vous appelez la capitale de la Lorraine. Je crois pourtant que j'aurai la force morale nécessaire pour m'abstenir et pour ne pas pécher de nouveau contre une loi qui doit être sacrée à nous autres surtout *viri arithmetici* comme nous appelait Jacobi, je veux dire la loi de réciprocité.

A propos d'arithméthique, je dois vous exprimer le vif plaisir que m'a causé le beau théorème que vous avez donné dans le cahier d'avril (2). Je n'en ai eu connaissance que hier soir à la bibliothèque, mon exemplaire ne m'étant pas encore parvenu. Comme ce premier article ne contient pas la démonstration de cette pro-

(1) D'après la *Gedächtnissrede auf Gustav-Peter Lejeune-Dirichlet* de Kummer (*Œuvres de Dirichlet*, t. II, p. 339), c'est en Suisse que voyagea Dirichlet; il s'arrêta à Montreux. C'est là qu'il ressentit la première et violente atteinte de la maladie de cœur qui devait l'emporter quelques mois plus tard (5 mai 1859), après la mort subite de sa femme.

(2) *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. III, 1858, p. 143). J'extrais de ce Mémoire l'énoncé que Dirichlet démontre; dans ce qui suit, $f(x)$ désigne une fonction paire.

« Soit m un nombre impair donné à volonté. Décomposons $2m$ en deux parties

position si riche en conséquences, je me hasarderai à vous communiquer celle que j'ai trouvée dans ma promenade du soir, juste à la suite de cette lecture. Comme cette démonstration est fondée sur le même principe que la démonstration du théorème de Jacobi telle que je l'ai exposée dans un article de votre journal ([1]) je conserverai les notations de cet article, je désigne de plus par $\varphi(x, y)$ une fonction paire en x et y et en outre telle que

$$\varphi(y, x) = -\varphi(x, y).$$

Cela posé considérons la somme

$$A = \sum \varphi(a - b, c + d)$$

qui doit être étendue à toutes les solutions de l'équation

(1) $$ad - bc = 2m.$$

---

impaires m', m'', de manière qu'on ait

$$2m = m' + m'',$$

m' prenant successivement les valeurs

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2m-3, \quad 2m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires ou correspondantes

$$2m-1, \quad 2m-3, \quad \ldots, \quad 5, \quad 3, \quad 1.$$

» Désignons généralement par d' un quelconque des diviseurs de m' et par d'' un quelconque des diviseurs du nombre correspondant m'', puis formons la somme triple

$$S = \sum \left\{ \sum \sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] \right\}.$$

» Les deux premières sommations se rapportent aux diviseurs d', d'' de chacun des groupes m', m'' et le troisième Σ indique qu'on doit faire le total des sommes partielles ainsi obtenues pour les groupes successifs

$$1, \quad 2m-1; \quad 3, \quad 2m-3; \quad \ldots; \quad 2m-1, \quad 1.$$

» La valeur de la somme complète S peut toujours être exprimée simplement au moyen des diviseurs d de l'entier impair donné m. Je trouve en effet que

$$S = \sum d[f(0) - f(2d)]. \text{ »}$$

([1]) *Sur l'équation*

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4m,$$

par M. G. Lejeune-Dirichlet. (*Journal de Liouville,* 2e série, t. I, 1856, p. 210. — *Œuvres de Dirichlet,* t. II, p. 203.) « ... Tous les entiers que nous désignerons par des lettres latines sont positifs et impairs ..... »

Laissant de côté pour un instant les solutions pour lesquelles $a = b$, il est évident qu'on peut supposer $a > b$ et doubler le résultat. Mais les solutions qui remplissent cette condition sont toujours associées deux à deux de cette manière que, pour deux solutions associées a, b, c, d; a', b', c', d'; on a

$$a - b = c' + d', \qquad c + d = a' - b';$$

il suit de là et de l'hypothèse faite sur la fonction $\varphi(x, y)$ qu'on a

$$\varphi(a' - b', c' + d') = \varphi(c + d, a - b) = -\varphi(a - b, c + d).$$

Les termes répondant à des solutions associées se détruisent ainsi deux à deux; il ne reste dans A que les termes pour lesquels on a $a = b$, et l'on aura

$$\sum \varphi(a - b, c + d) = \sum e\, \varphi(0, 2e),$$

cette dernière somme s'étendant aux diviseurs e de m. Si maintenant on suppose $\varphi(x + y) = f(x) - f(y)$, $f(x)$ étant une fonction paire, on obtient votre théorème, en observant qu'à cause de la manière symétrique dont l'équation (1) contient ces deux groupes a, b; c, d, on peut au lieu de

$$\sum [f(a - b) - f(c + d)]$$

écrire plus simplement

$$\sum [f(a - b) - f(a + b)].$$

J'ai oublié l'autre jour de vous dire que l'attraction d'un ellipsoïde plein s'exprime sous forme finie pour toute loi d'attraction de la forme $\frac{1}{2m}$, m étant un entier > 1. C'est une conséquence très simple du cas particulier où $m = 2$ et de la propriété générale presque évidente que de l'attraction exercée par une masse quelconque pour le cas d'une loi d'attraction exprimée par la formule $\frac{1}{r^a}$, on peut déduire par de simples différentiations l'attraction pour le cas de $\frac{1}{r^{a+2}}$, pourvu qu'on n'ait pas $a = 2$.

Mais en voilà assez de grimoire.

Ayez la bonté de présenter les compliments de Mad. Dirichlet et mes respects à vos dames.

Totus tibi

G. LEJEUNE-DIRICHLET.

P. S. Quoique je doive être absent de Gœttingue pour un mois à peu près, ce n'est pas une raison pour que vous n'écriviez pas pendant ce temps. Votre lettre adressée ici me sera envoyée quelque part que je me trouve.

LIOUVILLE A DIRICHLET (1).

Toul, 21 octobre 1858.

J'étais si souffrant hier en vous écrivant que je crains fort de vous avoir très mal expliqué les éléments de la formule dont je vous faisais part. Il faut se donner à volonté un nombre entier m et considérer toutes les solutions de l'équation $m = m'^2 + m''$, où l'on prend pour m' un entier positif, nul ou négatif, indifféremment et pour m'' un entier essentiellement positif. Pour chaque groupe m', m'' ainsi obtenu on décompose m'' dans le produit $2^{\alpha''} d'' \delta''$, où d'' et δ'' sont des entiers positifs impairs, et où l'exposant α'' doit être supposé égal à zéro quand m'' est impair. Cela posé, soit $F(x, y)$ une fonction telle que l'on ait

$$\begin{aligned} F(x, -y) &= +F(x, y), \\ F(-x, y) &= -F(x, y), \\ F(0, y) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire une fonction qui change de signe avec x et se réduise à zéro pour $x = 0$, tandis qu'elle ne dépend pas du signe de y.

(1) Mme de Blignières a retrouvé récemment le brouillon de cette lettre qui, quoi qu'en dise Liouville, est écrit avec le plus grand soin. Il est bien vraisemblable qu'elle était destinée à Dirichlet, mais il n'y a pas certitude. Elle est inachevée, il n'est pas certain non plus qu'elle ait été envoyée. Pour le contenu, le lecteur pourra consulter les articles de Liouville dans son Journal : *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres*, qui se trouvent dans le Tome III (1858) de la deuxième série et plus spécialement le septième, le huitième, le neuvième et le dixième, p. 1, 73, 111, 195 du Tome IV (1859).

Faisons la somme des expressions de la forme

$$(-1)^{m''} F(2^{\alpha''} d'' + m', 2m' - \delta'')$$

pour toutes les valeurs de $2^{\alpha''} d''$ et δ'' dont le produit est m'', m' et m'' restant fixes; puis sommons de nouveau le résultat pour tous les groupes (m', m'') dont il a été question plus haut et qui donnent $m = m'^2 + m''$.

Cette somme double

$$\sum\sum (-1)^{m''} F(2^{\alpha''} d'' + m', 2m' - \delta'')$$

sera généralement égale à zéro. Mais il y a exception quand m est un carré, et alors la somme est égale à

$$-\left[F(\sqrt{m}, 1) + F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) + \ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right].$$

Vous voyez que les valeurs de y employées dans $F(x, y)$ sont toutes impaires; mais les valeurs de x sont paires ou impaires, suivant que m est pair ou impair.

Prenons $m = 3$. Nous aurons ces quatre décompositions :

$$m = m'^2 + m''; \qquad m' = 0, \qquad m'' = 1.3 \quad \text{et} \quad m'' = 3.1;$$
$$m' = \pm 1, \qquad m'' = 2.1.$$

De là, pour notre somme double,

$$-F(1, -3) - F(3, -1) + F(3, 1) + F(1, -3),$$

et, comme $F(3, -1) = F(3, 1)$, on trouve bien *zéro* pour résultat.

Mais si $m = 1$, on n'a que cette décomposition $1 = 0^2 + 1.1$, et notre somme devient $(-1)^2 F(1, -1)$ ou $-F(1, 1)$, vu que $F(1, -1) = F(1, 1)$.

Cela s'accorde avec ce que j'ai dit ci-dessus, parce que 1 est un carré.

Pour $m = 4$, on doit trouver

$$-[F(2, 1) + F(2, 3)],$$

et cela résulte en effet des décompositions $m = m'^2 + m''$, qui sont alors au nombre de cinq, savoir : $m' = 0$, $m'' = 4.1$; $m' = \pm 1$ avec $m'' = 3.1$ et avec $m'' = 1.3$; ce qui donne

$$F(4, -1) - F(4, 1) - F(2, -3) - F(2, -1) - F(0, 5);$$

il suffit d'observer à présent que $F(4, -1) = F(4, 1)$,

$$F(2, -3) = F(2, 3), \qquad F(2, -1) = F(2, 1), \qquad F(0, -5) = 0.$$

Il me semble qu'hier j'ai écrit pour la valeur de la somme double, dans le cas de m carré,

$$-\sqrt{m}\left[F(\sqrt{m}, 1) + F(\sqrt{m}, 2) + \ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right],$$

au lieu de

$$-\left[F(\sqrt{m}, 1) + F(\sqrt{m}, 3) + F(\sqrt{m}, 5) + \ldots + F(\sqrt{m}, 2\sqrt{m} - 1)\right],$$

barbouillant à la hâte le papier (ce que je fais encore aujourd'hui) et prenant une formule pour une autre dans mes cahiers qui sont tout en désordre. Excusez-moi et croyez bien que du moins je ne me trompe pas en vous répétant que tout dépend des identités

$$\begin{aligned} m'^2 + (p - m')\delta'' &= (\delta'' - m')^2 + (p + m' - \delta'')\delta'' \\ &= (2p + m' - \delta'')^2 + (\delta'' - p - m')(4p - \delta'') \\ &= (m' - 2p)^2 + (p - m')(\delta'' - 4p). \end{aligned}$$

Une autre formule d'une importance égale dépend de cette autre identité

$$m'^2 + (p - m')\delta'' = p^2 + (p - m')(\delta'' - p - m').$$

Pour l'écrire, il faut d'abord décomposer m comme ci-dessus et considérer la somme double

$$\sum\sum (-1)^{m''}(2^{\alpha''}d'' + m' - \delta'')f(2^{\alpha''}d'' + m', 2m' - \delta''),$$

$f(x, y)$ étant cette fois une fonction paire tant par rapport à x que par rapport à y. Il faut ensuite, avec les mêmes éléments, former cette seconde somme

$$\sum\sum (2^{\alpha''}d'' - \delta'')f(m', 2^{\alpha''}d'' + \delta'').$$

Le théorème consiste en ce que les deux sommes sont égales.

Soit $m = 1$. La première somme sera égale à zéro, la seconde aussi. Soit $m = 2$; la première somme sera [à cause de

$2 = 0^2 + 2.1 = (\pm 1)^2 + 1.1]$

$$(2-1)f(2,-1)-(1+1-1)f(2,1)-(1-1-1)f(0,-3) \quad \text{ou} \quad f(0,-3);$$

et la seconde (¹)

$$(2-1)f(0,3)+(1-1)f(1,2)+(1-1).$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ostwald (W.). — *Die Energie.* Gr. in-8°, 167 p. Leipzig, Barth. (*Wissen u. Können,* Sammlung von Einzelschriften aus reiner u. angewandter Wissenschaft. Herausgeg. v. B. Weinstein. Bd. I.) Relié, 4 m. 40 pf.

Crelle (A.-L.). — *Calculating Tables;* giving the products of every two numbers from one to one thousand and their applications to the multiplication and division of all numbers above one thousand. New ed., by *O. Seeliger;* with tables of the square-numbers and cube-numbers from 1 to 1000. In-f°. New-York, Lemcke et Büschner. 5 s.

Descroix (L.). — *Les règles et cercles à calculs de Fred.-W. Taylor et Carl-G. Barth.* In-4°, 20 p. Paris, H. Dunod et E. Pinat. 1 fr.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, publiée sous la direction de J. Molk, t. I, vol. I, fasc. III : *Nombres complexes,* d'après *Study,* par *E. Cartan. Algorithmes illimités de nombres complexes,* d'après *Pringsheim,* par *M. Fréchet.* In-8°, 160 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

Encyclopédie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschafteen zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. IV. Bd. in 4 Teilbdn. *Mechanik.* Red. v. *Fel. Klein* u. *Conr. Müller.* 2 Tl. 1. Abtlg. 4. Heft. In-8°, XI et p. 473-593. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 20 pf.

Rouse Ball. — *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes.* Paris, A. Hermann. 5 fr.

(¹) La lettre et même la formule finale sont interrompues. Dans cette formule le dernier terme devrait être écrit

$$(1-1)f(-1, 2).$$

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CZUBER (E.). — EINFÜHRUNG IN DIE HÖHERE MATHEMATIK. 1 vol. in-8, x-382 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Cette *Introduction aux hautes Mathématiques* contient ce qu'on peut regarder comme indispensable à un étudiant qui veut suivre un cours de Calcul différentiel et intégral; elle correspond donc en partie à ce qui s'enseigne chez nous dans la classe de Mathématiques spéciales; je dis *en partie*, parce que, aujourd'hui, le Calcul intégral et la Mécanique tiennent dans cette classe une place très importante, et il n'en est pas question dans le Livre de M. Czuber.

Ce Livre peut être divisé en trois Parties, qui sont à peu près d'égale longueur.

Dans la première, après avoir rappelé ou développé les définitions et les propositions les plus importantes relatives à la notion de nombre réel ou imaginaire, l'auteur traite des limites, des séries et des produits infinis; il introduit d'une façon très claire les notions de fonction et de continuité, en s'aidant beaucoup de la représentation géométrique; il développe les éléments du Calcul différentiel.

La seconde Partie se rapporte à l'Algèbre : on y trouvera successivement la théorie des déterminants et des équations du premier degré, les propositions fondamentales sur les équations algébriques, la résolution des équations numériques, la résolution algébrique des équations du troisième et du quatrième degré.

La troisième Partie, enfin, contient les premiers éléments de la Géométrie analytique, à deux ou trois dimensions. J. T.

VAHLEN (K.-TH.). — ABSTRAKTE GEOMETRIE : *Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie.* 1 vol. in-8°, XI-302 pages. Leipzig, Teubner, 1905.

Réduire au plus petit nombre possible les concepts fondamentaux (*Grundbegriffe*) — les concepts qu'on ne ramène pas à d'autres concepts — et les théorèmes fondamentaux (*Grundsätze*), — les théorèmes qu'on ne démontre pas, qu'on les regarde d'ailleurs comme des axiomes ou des postulats; — en même temps, réduire au minimum le contenu de chaque concept et de chaque théorème fondamental, tel est le but que s'est proposé M. Vahlen en écrivant cette *Géométrie abstraite*. Elle mérite bien son épithète : les concepts géométriques, comme ceux du point ou de la droite, n'ont plus rien de ce qui reste encore en eux d'intuitif ou de concret dans la Géométrie usuelle. L'intuition spatiable n'intervient pas dans les démonstrations : celles-ci résultent logiquement de définitions ou d'énoncés des concepts ou des théorèmes fondamentaux, qui ne suggèrent aucune image, qui contiennent tout juste ce qui est indispensable pour les déductions, et rien de plus; les uns et les autres sont introduits et développés au fur et à mesure, de manière à mettre en évidence la parfaite indépendance de chacun des théorèmes et de ceux qui le précèdent, à montrer qu'ils sont nécessaires et suffisants pour le développement ultérieur de la Science et à faire nettement ressortir les points où bifurquent les diverses géométries. Les concepts que l'on continue de traduire par les dénominations géométriques habituelles peuvent d'ailleurs être réalisés au moyen de systèmes de nombres (coordonnées) et d'équations de façon à satisfaire aux théorèmes fondamentaux (axiomes et postulats). On est ainsi bien assuré que les systèmes de ces axiomes et postulats ne comportent pas de contradiction.

Les nombres tenant ainsi un rôle essentiel dans la Géométrie, M. Vahlen devait reprendre les notions fondamentales qui les concernent, et les *Grundlagen der Arithmetik* par où commence son Livre n'en sont pas la partie la moins originale. Le lecteur éprouvera peut-être quelque étonnement en lisant les définitions de l'égalité, de la continuité, du nombre lui-même ; mais il se rappellera que *l'étonnement est le commencement de la science*, et

ces définitions lui donneront grandement à réfléchir. Il ne peut d'ailleurs manquer de s'intéresser à la façon ingénieuse et profonde dont cette arithmétique prépare à la géométrie.

Le développement de celle-ci comporte quatre parties : deux sont consacrées à la géométrie projective ; la première traite des problèmes de construction (*Verbinden und Schneiden*), et la seconde des propositions relatives à l'ordre. L'auteur s'occupe ensuite de la *géométrie affine*, qui se distingue de la géométrie projective par l'introduction des points impropres : dans la géométrie euclidienne il n'y a qu'un point impropre sur chaque droite ; il y en a une infinité dans la géométrie de Bolyai-Lobotchefsky. Enfin la cinquième et dernière partie est consacrée à la géométrie métrique ; elle se termine par quelques pages sur les aires et les volumes. J. T.

Joannis Bolyai in Memoriam. *Libellus post sæculum quam Joannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII. a. d. kalendas januarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam ejus immortalem ex consilio ordinis mathematicorum et naturæ scrutatorum regiæ litterarum universitatis hungaricæ Francisco-Josephinæ Claudiopolitanæ editus*. Claudiopoli MCMII, typis societatis Franklinianæ Budapestinensis.

La Faculté des Sciences de l'Université François-Joseph, à Budapest, pour célébrer le centenaire de Jean Bolyai, avait décidé de publier un Ouvrage destiné à mettre en évidence les services que la Géométrie absolue fondée par cet illustre géomètre a rendus aux autres disciplines mathématiques, au cours du siècle qui vient de finir.

La rédaction de cet Ouvrage avait été confiée à un géomètre bien connu, M. L. Schlesinger, professeur à l'Université de Budapest et membre de l'Académie hongroise des Sciences, qui s'est acquitté de cette tâche avec tout le soin et tout le talent auxquels on pouvait s'attendre.

Le Volume commence par la traduction latine d'une lettre écrite par J. Bolyai à son père, Wolfgang, lettre dont le fac-similé forme en quelque sorte le frontispice du Volume.

Vient ensuite un Mémoire de M. L. Schlesinger, *De nonnullis absolutæ geometriæ ad theoriam complexæ variabilis functionum applicationibus*. L'auteur y développe des propositions intéressantes relatives à l'*Analysis situs* et à différents problèmes de représentation conforme.

Vient ensuite un Mémoire de M. P. Stäckel, *De ea mechanicæ analyticæ parte quæ ad varietates complurium dimensionum spectat*. Ce travail sera consulté avec grand profit par tous ceux qu'intéresse ce sujet de haut intérêt, qu'a si bien approfondi M. Stäckel.

Enfin, l'opuscule se termine par un index, dû à M. R. Bonola, des Ouvrages qui ont quelque rapport à la *Géométrie absolue*.

Ce précieux index ne comprend pas moins de 683 numéros se rapportant à des écrits mathématiques et de 292 numéros comprenant les Mémoires critiques, historiques et philosophiques.

Ce résumé succinct suffit à montrer combien l'Ouvrage que nous signalons à nos lecteurs est intéressant et vraiment digne du grand inventeur dont la nation hongroise est fière à juste titre.

D. G.

RICHTER (O.). — KREIS UND KUGEL IN SENKRECHTER PROJECTION FÜR DEN UNTERRICHT UND ZUM SELBSTSTUDIUM. 1 vol. in-8, x-188 pages avec 147 figures dans le texte. Leipzig et Berlin, Teubner, 1908.

Comme l'indique son titre, l'Ouvrage du Dr Richter, professeur au Gymnase König-Albert de Leipzig, est un Ouvrage d'enseignement destiné à servir de complément aux Manuels et aux Traités de Géométrie descriptive. Il sera consulté avec grand profit, nous en sommes convaincu, par les professeurs de nos lycées dont la préoccupation est d'élargir et d'améliorer sans cesse leur enseignement. Voici les titres des principales divisions de la Table :

1re Section : l'ellipse ; 2e Section : projection orthogonale de la sphère ; 3e Section : applications, prisme, pyramide, cylindre, cône, sections de la sphère, solides réguliers, tore, etc.

J. G.

LORIA (Gino). — Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione, accresciuta di uno sguardo allo sviluppo della Geometria in quest' ultimo decennio. In-8, XXIII-475 pages. Turin, Hans Rinck, 1907.

Depuis que nous avons rendu compte, il y a plus de 10 ans, de la première et de la deuxième édition de cet Ouvrage que l'auteur plaçait sous l'invocation d'un de nos grands écrivains, Bossuet, le beau travail de M. Loria a obtenu dans tous les pays le succès qu'il méritait à tous égards. Les travaux relatifs à l'histoire des Sciences sont devenus aujourd'hui plus indispensables que jamais. Écrit avec une grande connaissance du sujet, un souci incontestable d'impartialité, celui du savant et érudit professeur de l'Université de Gênes avait droit au succès qu'il a obtenu. Il a été traduit en allemand, en anglais, en polonais ; nous regrettons qu'on n'ait pas encore songé à nous en donner une traduction française. Cela tient sans doute à la négligence dans laquelle on tient aujourd'hui la Géométrie ; mais on ne tardera pas, nous en sommes convaincu, à y revenir. On s'apercevra bientôt sans doute qu'elle est le fondement indispensable, et trop négligé, aux études qui ont pour le moment la faveur des mathématiciens : j'allais dire des géomètres.

La nouvelle édition a encore été améliorée. Elle contient un appendice étendu faisant connaître les progrès accomplis dans les différentes branches depuis la publication de la deuxième édition. Cet appendice, qui ne comprend pas moins de 120 pages, se divise en plusieurs sections, ce qui rend les recherches des plus faciles.

Des travaux comme ceux de M. Loria seront plus tard les guides les plus précieux et les plus autorisés pour les futurs historiens de la Science mathématique.

G. D.

MÜLLER (FÉLIX). — FÜHRER DURCH DIE MATHEMATISCHE LITERATUR MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER HISTORICH-WICHTIGEN SCHRIFTEN. 1 vol. in-8, x-252 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1909.

Ce n'est pas à proprement parler une Bibliographie mathématique qu'a voulu composer M. Müller. Il a été moins ambitieux, ou plus sage; il a voulu seulement nous orienter à travers les œuvres si variées publiées par les géomètres. Nous croyons qu'il a atteint le but qu'il se proposait et que ce guide à travers la littérature mathématique qu'il offre à ses lecteurs sera bien propre à faciliter leurs travaux et leurs recherches. Sans aucune prétention à être complet, M. Müller s'est attaché à signaler les écrits les plus importants de toute nature, et il a généralement réussi.

Son Livre se partage en trois Parties. La première fait connaître les écrits didactiques, les œuvres complètes, les encyclopédies, etc. La deuxième comprend la philosophie, les questions d'enseignement, l'Algèbre, l'Arithmétique et l'Analyse. La troisième est consacrée à la Géométrie. G. J.

P. STÆCKEL UND W. AHRENS. — DER BRIEFWECHSEL ZWISCHEN C.-G.-J. JACOBI UND P.-H. VON FÄSS UEBER DIE HERAUSGABE DER WERKE LEONHARD EULERS, herausgeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fusschen Histe der Eulerschen Werke ergänzt. 1 vol. in-8°, XI-184 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Il nous suffira évidemment de signaler cette intéressante publication qui vient à point, au moment où l'on s'occupe de réaliser le désir, exprimé de toutes parts et par les savants les plus autorisés, de publier les Œuvres d'Euler. Des écrits tels que celui que nous avons la bonne fortune de signaler sont une excellente préparation à la publication des Œuvres complètes, et en même temps elles donnent la garantie que cette publication pourra se faire dans les meilleures conditions. D. J.

BÔCHER (M.). — AN INTRODUCTION TO THE STUDY OF INTEGRAL EQUATIONS. 1 vol. in-8, 72 pages. Cambridge, University press Warehouse, 1909.

Ce petit Volume fait partie des *Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*, dont nous avons eu plusieurs fois l'occasion de parler. Il sera le très bien venu : l'auteur a exposé d'une façon concise et claire les propositions les plus importantes de la théorie des équations intégrales ; l'exposition est faite en tenant le plus grand compte de l'ordre historique ; les découvertes, ainsi enchaînées, apparaissent comme plus naturelles, sans que le mérite de ceux qui les ont faites soit en rien diminué. Tout au contraire, chaque progrès fait mieux ressortir l'importance des résultats antérieurement obtenus dans cette belle et difficile théorie, dont je vais essayer de retracer l'histoire, d'après le Livre de M. Bôcher.

Ce Livre vient d'autant mieux à son heure que le sujet n'a guère pu être développé dans les Traités classiques [1] et que l'intérêt des applications est sans doute loin d'être épuisé.

M. Bôcher commence par développer quelques lemmes concernant les intégrales définies, qu'il aura souvent l'occasion d'appliquer ; je ne retiens de ces premières pages que la définition suivante, dont j'aurai besoin : on dit que les discontinuités d'une fonction des deux variables x, y sont régulièrement distribuées dans le carré S défini par les inégalités

$$a \leq x \leq b, \qquad a \leq y \leq b,$$

ou dans le triangle T défini de même par les inégalités

$$a \leq y \leq x \leq b,$$

si elles se trouvent toutes sur un nombre fini de courbes qui admettent des tangentes tournant d'une façon continue et qui ne sont coupées qu'en un nombre fini de points par les parallèles à l'axe des x ou des y.

---

[1] Nous signalons un peu plus loin les quelques pages consacrées aux équations intégrales dans les *Exercices et Leçons d'Analyse*, de M. d'Adhémar.

Le premier exemple de résolution d'une équation intégrale est fourni par la célèbre formule de Fourier

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \cos(xz)\cos(zz_1)f(z_1)\,dz\,dz_1,$$

valable sous certaines conditions imposées à la fonction $f(x)$ et qui montre, en supposant ces conditions vérifiées, que l'équation intégrale

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xz)u(z)\,dz,$$

où $f(x)$ est une fonction donnée et $u(x)$ la fonction inconnue, admet la solution

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xz)f(z)\,dz.$$

Ce n'est pas, toutefois, à ce point de vue que Fourier s'est placé.

La première équation intégrale posée explicitement se rencontre dans la généralisation par Abel du problème des tautochrones; elle a la forme

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(z)\,dz}{(x-z)^\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1);$$

elle appartient au type que M. Bôcher désigne comme étant de première espèce; la fonction inconnue $u(z)$ n'y figure pas en dehors du signe $\int$.

Abel en a obtenu la solution par deux méthodes différentes; M. Goursat est revenu récemment sur ce sujet (*Acta mathematica,* t. XXVII, 1903). M. Bôcher reproduit l'ingénieuse solution de Liouville (*Journal de Liouville,* t. IV, 1839). Ce n'est pas, d'ailleurs, la seule contribution que Liouville s'est trouvé apporter à une théorie dont l'importance devait apparaître beaucoup plus tard. Dans le Tome II de son journal (1837), il montre en effet que l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\rho^2 - \sigma(x)]y = 0,$$

où ρ est une constante et $\sigma(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b), admet une solution $u(x)$ satisfaisant aux conditions initiales,

$$u(a) = 1, \qquad u'(a) = 0,$$

qui vérifie l'équation intégrale

$$u(x) = \cos\rho(x-a) + \frac{1}{\rho}\int_a^x \sigma(z)\sin\rho(x-z)\,u(z)\,dz,$$

laquelle n'a, d'ailleurs, qu'une solution continue.

Or, il arrive que la méthode de *substitutions successives* qu'a employée Liouville pour résoudre cette dernière équation s'applique tout aussi bien à la résolution de l'équation intégrale *de seconde espèce*

$$(1) \qquad u(x) = f(x) + \int_a^b \mathrm{K}(x, z)\,u(z)\,dz,$$

où l'on suppose que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et que les discontinuités du *noyau* $\mathrm{K}(x, y)$, s'il y en a, sont régulièrement distribuées dans le carré S, où l'on admet, en outre, que la fonction $\mathrm{K}(x, y)$ est bornée. Cette méthode consiste à poser

$$u_0(x) = f(x), \qquad u_n(x) = f(x) + \int_a^b \mathrm{K}(x, z)\,u_{n-1}(z)\,dz,$$

$$v_1(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x, z)\,u_0(z)\,dz,$$

$$v_n(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x, z)\,v_{n-1}(z)\,dz.$$

On reconnaît sans peine que la série

$$(2) \qquad u_0(x) + v_1(x) + \ldots + v_n(x) + \ldots$$

satisfait formellement à l'équation intégrale ; si donc la série est uniformément convergente dans l'intervalle (a, b), sa somme fournira une solution de cette équation, continue dans l'intervalle (a, b) ; il est, d'ailleurs, aisé de voir qu'il n'y a pas d'autre solution continue.

Or, la convergence uniforme de la série apparaît aisément dans

deux cas, celui où la fonction $K(x, y)$ est supposée nulle dans S pour $y > x$, en sorte que l'équation intégrale peut s'écrire

$$(3) \qquad u(x) = f(x) - \int_a^x K(x, z)\, u(z)\, dz,$$

et celui où, en désignant par M la borne supérieure de la fonction $K(x, y)$ dans le carré S, on a

$$M(b-a) < 1.$$

M. Bôcher montre encore que la même méthode s'applique aussi à l'équation intégrale

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{G(x, z)}{(x-z)^\lambda} u(z)\, dz \qquad (0 < \lambda < 1),$$

où l'on suppose que la fonction $G(x, y)$ est bornée dans le triangle T et que ses discontinuités, si elle en a, sont régulièrement distribuées dans ce triangle.

M. Volterra [1] a indiqué un nouveau point de vue et obtenu des résultats très importants. M. Bôcher expose la méthode sur l'équation (1), en supposant toujours que la fonction $K(x, y)$ soit bornée dans S et que ses discontinuités, si elle en a, soient régulièrement distribuées dans cette aire. Ce cas contient, comme on vient de le voir, celui qu'a considéré M. Volterra, où l'équation intégrale a la forme (3).

En posant

$$K_1(x, y) = K(x, y), \qquad K_i(x, y) = \int_a^b K(x, z)\, K_{i-1}(z, y)\, dz,$$

on trouve sans peine, quels que soient les nombres naturels i et j,

$$(4) \qquad K_{i+j}(x, y) = \int_a^b K_i(x, z)\, K_j(z, y)\, dz.$$

La série

$$(5) \qquad K_1(x, y) + K_2(x, y) + K_3(x, y) + \ldots$$

est d'ailleurs absolument et uniformément convergente dans S ou

---

(1) *Voir* les *Atti* de l'Académie de Turin et les *Rendiconti* de l'Académie des Lincei pour 1896.

dans T, dans les deux mêmes cas où l'on a vu que cette convergence était assurée pour la série (2). Supposons la série (5) uniformément convergente; désignons sa somme par $-k(x,y)$ et son reste par $R_m(x,y)$, en la limitant au $m^{\text{ième}}$ terme. On montre sans grande difficulté, en tenant compte de l'identité (4), que l'on a

$$R_m(x,y) = -\int_a^b k(x,z)\,K_m(z,y)\,dz = -\int_a^b K_m(x,z)\,k(z,y)\,dz,$$

d'où l'on déduit en particulier, pour $m=1$,

$$(6)\qquad K(x,y)+k(x,y) = \int_a^b K(x,z)\,k(z,y)\,dz = \int_a^b k(x,z)\,K(z,y)\,dz.$$

Ces dernières égalités, indépendamment de la façon dont on les a obtenues, permettent de définir les fonctions $K(x,y)$, $k(x,y)$, dont on suppose les discontinuités régulièrement distribuées dans S, comme étant *réciproques* dans S; leur somme est une fonction continue dans S. Il n'y a qu'une fonction réciproque d'une fonction donnée $K(x,y)$. Toutes les fois qu'on a obtenu une fonction $k(x,y)$ réciproque de $K(x,y)$, on a une solution de l'équation (1), à savoir

$$u(x) = f(x) - \int_a^b k(x,z)\,f(z)\,dz.$$

Dans les cas qu'on a signalés, cette solution peut s'écrire

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_a^b K_n(x,z)\,f(z)\,dz.$$

M. Volterra avait aussi remarqué que les équations du type

$$f(x) = \int_a^b K(x,z)\,u(z)\,dz$$

pouvaient être regardées comme une forme limite d'un système de n équations du premier degré à n inconnues où n augmente indéfiniment, et cette remarque s'étendait d'elle-même au cas des équations de seconde espèce. C'est, comme on le sait,

M. Fredholm [1] qui a eu le grand mérite de montrer comment on pouvait, en partant de cette idée, aussi simple mais plus difficile à réaliser que l'œuf de Colomb, parvenir à la solution des équations du type (1), équations auxquelles son nom est resté attaché.

La résolution, par la règle de Cramer, des équations du premier degré obtenues en regardant, dans l'équation (1), l'intégrale définie comme une somme et en remplaçant x par les bornes des intervalles partiels, puis en supposant que les intervalles partiels tendent vers zéro, un passage à la limite, analogue à celui qui conduit du développement de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ à la série e^x, amènent à la considération d'un nombre D (le *déterminant*) et d'une fonction D (x, y) (la fonction *adjointe*), qui sont définies par les séries

$$(7)\qquad D = 1 - \int_a^b K(z_1, z_1)\,dz_1 + \frac{1}{1.2}\int_a^b \begin{vmatrix} K(z_1, z_1) & K(z_1, z_2) \\ K(z_2, z_1) & K(z_2, z_2) \end{vmatrix} dz_1\,dz_2 - \ldots,$$

$$(8)\qquad D(x,y) = K(x, y) - \int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y) & K(x, z_1) \\ K(z_1, y) & K(z_1, z_1) \end{vmatrix} dz_1 + \frac{1}{1.2}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x, z_1) & K(x, z_2) \\ K(z_1,y) & K(z_1, z_1) & K(z_1, z_2) \\ K(z_2,y) & K(z_2, z_1) & K(z_2, z_2) \end{vmatrix} dz_1\,dz_2 - \ldots\ldots,$$

et l'on a la proposition précise que voici :

A chaque fonction $K(x, y)$ bornée dans S, dont les discontinuités sont régulièrement distribuées dans S et pour laquelle $K(x, x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, b), correspond un déterminant D donné par la série absolument convergente (7) et une fonction adjointe D (x, y) donnée par la série (8) absolument et uniformément convergente ; cette fonction adjointe est bornée dans S ; elle est continue en tout point où la fonction K (x, y) est continue ; cette dernière fonction, le déterminant D et la fonction

[1] *Ofversigt of K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, t. LVII, 1900; *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903.

adjointe D (x, y) vérifient les identités

$$(9)\quad D(x, y) - DK(x, y) = \int_a^b K(x, z) D(z, y) dz = \int_a^b D(x, z) K(z, y) dz,$$

qui montrent que $-\frac{D(x, y)}{D}$ est la fonction réciproque $k(x, y)$ de K (x, y), lorsque le déterminant D n'est pas nul.

D'après ce qu'on a dit plus haut, l'équation (1) admet alors la solution

$$(10)\quad u(x) = f(x) - \frac{1}{D} \int_a^b f(x) D(x, z) dz.$$

Telle est la solution de M. Fredholm. M. Bôcher la présente sous une forme très suggestive et claire, en indiquant d'abord à grands traits la suite des idées, puis, la solution une fois obtenue, il l'établit d'une façon rigoureuse.

Nous ne devons pas oublier le rôle que joue, pour la démonstration de la convergence des séries (7) et (8), le beau théorème sur le maximum de la valeur absolue d'un déterminant, que M. Hadamard a donné dans le *Bulletin* (t. XVII_2, 1893) quelques années avant la découverte de M. Fredholm. On doit à M. Wirtinger une démonstration simple de ce théorème, moins profonde que la démonstration algébrique de M. Hadamard, mais commode pour l'enseignement.

Il peut être utile de considérer [1] à côté de la fonction K(x, y), dans S, une fonction $K_0(x, y)$ qui lui est égale quand x est différent de y, qui est nulle pour $x = y$. La solution de M. Fredholm subsiste quand on remplace le déterminant D et la fonction adjointe D(x, y) par le déterminant D_0 et la fonction adjointe $D_0(x, y)$, qui se rapportent à la fonction $K_0(x, y)$: il est à remarquer que D_0 et $D_0(x, y)$ peuvent exister lorsque D et D(x, y) n'existent pas.

En particulier, quand l'équation appartient au type (3) considéré par M. Volterra, et qu'on la ramène au type (1) en supposant, comme on l'a expliqué, $K_0(x, y) = 0$ pour $y > x$, on a alors

---

(1) HILBERT, *Gottinger Nachrichten*, 1904, p. 82. M. Hilbert avait principalement en vue le cas où la fonction K(x, y) peut devenir infinie. M. Bôcher ne traite pas ce cas.

$D_0 = 1$ et la série qui donne $D_0(x, y)$ se réduit à la série (5), en sorte qu'on retrouve la solution de M. Volterra.

La considération de l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, z)\, u(z)\, dz,$$

qui se déduit simplement de l'équation (1) en remplaçant $K(x, z)$ par $\lambda K(x, z)$ (λ constant), donne lieu à d'intéressants développements ; les séries D et $D(x, y)$, qu'il convient maintenant de désigner par $D(\lambda)$ et $D(x, y; \lambda)$, sont alors ordonnées suivant les puissances entières et positives de λ. Si λ n'est pas une racine de $D(\lambda)$, la solution précédente s'applique sans difficulté : on prévoit, dès lors, l'importance que vont prendre les racines de l'équation $D(\lambda) = 0$, qu'on désigne comme étant les racines pour la fonction $K(x, y)$. Cette importance apparaît en particulier pour les équations intégrales homogènes

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)\, u(z)\, dz,$$

qui, lorsque λ n'est pas une racine pour K, n'ont pas d'autre solution continue qu'une fonction $u(x)$ identiquement nulle. M. Fredholm a montré que, si λ est une racine, l'équation a une ou plusieurs solutions continues, autres que zéro : elles sont dites *solutions principales* relatives à la racine. M. Kneser (*Rendiconti* du Cercle de Palerme, t. XXII, 1906) a donné une démonstration très simple de ce théorème, que reproduit M. Bôcher. Le nombre des solutions principales relatives à une racine, qui sont linéairement indépendantes, s'appelle l'*indice* de la racine. M. Fredholm, par l'étude approfondie de séries qui correspondent aux mineurs du déterminant d'un système d'équations du premier degré, est parvenu à montrer que l'indice d'une racine ne peut pas excéder son ordre de multiplicité. M. Bôcher se contente d'établir, d'après M. Schmidt, que l'indice d'une racine réelle de $D(\lambda)$ est fini.

Le cas où le noyau $K(x, y)$ est symétrique est intéressant en lui-même et par les nombreuses applications auxquelles il donne lieu, enfin parce qu'il peut servir de fondement à une théorie des

équations intégrales à noyau non symétrique [1]. M. Bôcher établit les propositions fondamentales relatives à ce cas, celle-ci en particulier pour laquelle il a utilisé une démonstration due à M. Goursat [2]. Si $\varkappa(x, y)$ est une fonction symétrique bornée dans S, à discontinuités régulièrement distribuées et qui n'est pas nulle en tous les points de S où elle est continue, si $p(x)$, $q(y)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle (a, b), qui ne s'annulent pas dans cet intervalle, il y a pour la fonction

$$K(x, y) = p(x)\,q(y)\,\varkappa(x, y)$$

au moins une racine; toutes les racines sont réelles et la fonction réciproque de $\lambda K(x, y)$, considérée comme une fonction de λ, n'a pas d'autres singularités que des pôles du premier ordre.

Deux solutions principales $u_1(x)$, $u_2(x)$ d'une équation intégrale linéaire et homogène à noyau symétrique, qui correspondent à deux racines distinctes, jouissent de la propriété qu'exprime l'égalité

$$\int_a^b u_1(x)\,u_2(x)\,dx = 0;$$

en d'autres termes, elles sont orthogonales l'une à l'autre dans l'intervalle (a, b). On peut alors constituer un système fini ou infini de solutions principales

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_n(x), \quad \ldots$$

orthogonales l'une à l'autre, et qui est dit *complet* parce que toutes les solutions principales dépendent linéairement de celles-là.

L'étude des développements suivant les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... s'impose. On doit d'importants résultats sur ce sujet à M. Hilbert, à M. Schmidt (Mémoires cités plus haut) et à M. Kneser [3]. M. Bôcher démontre, d'après M. Schmidt, la proposition suivante, qu'on doit à M. Hilbert :

---

[1] *Voir* les Mémoires publiés par M. Hilbert dans les *Nachrichten* de Göttingen, à partir de 1904, sous le titre *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* et dans les *Math. Annalen,* à partir de 1907, ceux de M. Schmidt intitulés : *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.*

[2] *Comptes rendus,* t. CXLVI, 1908, p. 327.

[3] *Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung der Wirkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik* (*Math. Annalen,* t. LXIII, p. 477).

Si la fonction symétrique $K(x, y)$ est bornée dans S, si ses discontinuités sont régulièrement distribuées, si les fonctions $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... constituent un système complet de solutions correspondant respectivement aux racines λ_1 λ_2, ..., λ_n, ... ;

Si l'on a enfin, quel que soit le nombre naturel n,

$$\int_a^b u_n^2(x)\,dx = 1,$$

la série

$$\frac{u_1(x)u_1(y)}{\lambda_1} + \frac{u_2(x)u_2(y)}{\lambda_2} + \ldots,$$

quand elle converge uniformément dans S, représente la fonction $K(x,y)$ en tout point où cette fonction est continue.

Dans les dernières pages de son Livre, M. Bôcher revient sur l'équation de première espèce et, en particulier, sur l'équation de Volterra,

$$f(x) = \int_a^x K(x, z)\,u(z)\,dz,$$

soit que le noyau soit borné, soit qu'il ait la forme

$$K(x, z) = \frac{G(x, z)}{(x-z)^\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Il établit diverses propositions dues soit à M. Volterra lui-même, soit à M. Holmgren [1], soit à M. Lalesco [2].

J. T.

LILIENTHAL (R. v.). — VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIALGEOMETRIE. Erster Band : *Kurventheorie*. 1 vol. in-8, VI-368 pages avec 26 figures dans le texte. Leipzig, B.-G. Teubner, 1908.

La première Partie de cet Ouvrage traite des courbes planes et fait connaître les propriétés essentielles relatives à la tangente, à la courbure, aux développées, à la théorie des enveloppes, etc.

---

(1) *Atti* de l'Académie de Turin, t. XXXV, 1900, p. 570.

(2) *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IV, 1908, p. 125.

La seconde Partie contient la théorie des courbes dans l'espace. Nous y avons remarqué plus particulièrement l'exposé de quelques travaux intéressants et trop négligés d'habitude : par exemple, l'étude des courbes si curieuses dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire; celle des courbes de Bertrand; celle de la méthode par laquelle Sophus Lie nous a appris à déduire, d'une courbe à torsion constante, une suite de courbes de même définition, etc. Nous y signalerons également une étude cinématique, toute différente d'ailleurs de la méthode du trièdre mobile. C'est par cette étude que se termine le Volume, qui sera suivi, nous l'espérons, de travaux analogues sur les autres parties de la Géométrie infinitésimale. D. J.

STURM (R.). — Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Erster Band : Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. 1 vol. in-8, XII-415 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1903.

Au moment où le distingué géomètre à qui nous devons tant d'importantes études de géométrie synthétique entrevoit, dans un lointain encore éloigné, nous l'espérons, la fin de son activité professorale et académique à l'Université de Breslau, il a eu l'idée très heureuse de consacrer un Traité étendu à cette branche de la Géométrie vraiment trop négligée aujourd'hui. Le Volume que nous avons à présenter à nos lecteurs n'est que le premier d'un Ouvrage complet qui comprendra quatre Volumes dont le plan est déjà tracé et qui fera reposer la Géométrie sur l'étude des différentes méthodes de transformation.

Quoique étant lui-même géomètre de synthèse, M. R. Sturm n'est pas de ceux qui veulent que la Géométrie se suffise à elle-même et se constitue en quelque sorte un corps de doctrine propre et fermé. Ce n'est pas à v. Staudt qu'il se rattacherait, mais plutôt à Descartes qui a scellé à jamais l'alliance féconde de l'Algèbre et de la Géométrie. Il ne craint pas d'employer la théorie des invariants et d'en exposer les principes. Il y a dans son Traité quelquefois, rarement nous en convenons, des déterminants. Et s'il est loin de repousser les imaginaires, c'est en s'appuyant sur

l'Algèbre qu'il les introduit. Aussi ne trouvera-t-on pas dans son Ouvrage de dissertation sur les fondements de la Géométrie. Il emploie les méthodes de v. Staudt, et nous serions même tenté de lui reprocher de les réunir à celles des autres géomètres, mais il se rattacherait plutôt à Poncelet et à Steiner, à Möbius, à Chasles, et à Crémona dont il a été l'émule pour la théorie des surfaces du troisième ordre.

Le présent Volume est consacré à l'étude des transformations des figures à une dimension, droites ponctuées, faisceaux de rayons dans un plan, faisceaux de plans dans l'espace. On sait, et le Traité de M. Sturm montre, une fois de plus, tout ce que cette étude, si limitée en apparence, peut donner en réalité. Une courte et rapide analyse le montrera mieux encore.

Le Volume débute par la théorie des segments de Möbius et de Chasles, la définition et les propriétés du rapport anharmonique, l'étude de l'involution et de la projectivité. Les propriétés du quadrilatère et du quadrangle y sont établies d'une manière projective. Nous y remarquons aussi la reproduction des belles propositions que M. Zeuthen a données dans ses études sur le théorème fondamental de la géométrie projective parues au Tome CXXV des *Comptes rendus*. Les principes de la théorie des transversales, la définition des angles à l'aide des rapports anharmoniques, les constructions avec des éléments imaginaires, les propriétés, des courbes et des cônes du second degré, celles des surfaces réglées du second ordre se présentent naturellement dans la théorie. L'exposition est toujours accompagnée d'indications historiques faisant connaître à qui appartient chaque théorème important.

La seconde Partie de l'Ouvrage nous représente ce principe de correspondance qui jouait un rôle si important et si utile entre les mains de Michel Chasles et qui paraît si oublié aujourd'hui. M. Sturm nous fait connaître d'après Halphen comment on évaluera le degré de multiplicité de chaque solution fournie par le principe. Au nombre des applications, nous remarquons la démonstration des célèbres formules de Plücker relatives aux points singuliers.

Le Volume se termine par l'étude des correspondances qui sont de degré supérieur et en particulier par l'étude des involutions

de degré quelconque. Nous y signalerons également un Chapitre sur la correspondance trilinéaire entre trois figures à une dimension.

Nous espérons que l'auteur ne nous fera pas trop longtemps attendre la suite de sa belle exposition. J. G.

WRIGHT (J.-E.). — INVARIANTS OF QUADRATIC DIFFERENTIAL FORMS. (*Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics*, n° 9.) 1 vol. in-8, VIII-90 pages. Cambridge, University Press Warehouse, 1908.

Ce petit Volume contient, sous une forme abrégée, des indications qui seront très utiles à tous ceux, et nous aimons à croire qu'ils seront nombreux, qui veulent s'orienter dans une étude susceptible des applications les plus variées : celles des formes quadratiques de différentielles.

Il commence par une introduction donnant la définition d'un invariant différentiel. Le Chapitre premier contient ensuite des notions sommaires sur la définition des groupes de transformations, puis il rappelle dans leur ordre les principaux travaux qui ont été accomplis sur ce sujet, citant le nom de Christoffel (il néglige entièrement Lipschitz), ceux de Ricci et Lévi-Civita, de Lie et de Maschke.

Le Chapitre II contient l'exposé de la méthode de Christoffel, la notion de la forme quadrilinéaire et les conditions d'équivalence de deux formes. Il donne aussi quelques indications, trop brèves peut-être, sur l'excellent Calcul différentiel absolu de MM. Ricci et Lévi-Civita et, en particulier, sur la dérivation covariante et contre-variante.

Le Chapitre III contient l'exposé de la méthode de Sophus Lie reposant sur la considération et les propriétés des groupes continus. Il introduit aussi la définition du rang d'une forme quadratique de n différentielles. (On dit que r est le rang d'une forme à n variables, si celle-ci peut être ramenée à une somme de carrés de $n+r$ différentielles exactes et ne peut pas être équivalente à une somme contenant les carrés d'un moins grand nombre de différentielles.)

Le Chapitre IV contient l'exposé de la méthode symbolique de Maschke qui se rapproche à certains égards de celle qu'on emploie dans la théorie des formes algébriques.

Viennent ensuite les applications de la théorie générale : l'interprétation géométrique des invariants, l'étude des formes quadratiques de deux variables, l'expression des paramètres différentiels dans ce cas spécial en fonction de trois d'entre eux, les conditions d'applicabilité de deux surfaces l'une sur l'autre. M. Wright passe ensuite aux formes quadratiques à trois variables. Il cherche la condition pour qu'une famille de surfaces fasse partie d'un système triple orthogonal et fait connaître une méthode donnée par M. Darboux en janvier 1873 dans les *Comptes rendus*. Il termine enfin par le cas des formes à n variables et les applications à la Mécanique.

On le voit, cet opuscule de 90 pages est rempli de faits intéressants et sera très utilement consulté par ceux qui s'occupent, à des points de vue des plus variés, des formes quadratiques de différentielles. D. G.

SCHÜBEL (HANS). — AUFSTELLUNG VON NICHT-EUKLIDISCHEN MINIMALFLÄCHEN. In-8, 47 pages. Munich, F. Straub, 1906.

M. Darboux a montré autrefois que, si l'on cherche les surfaces minima dans l'espace non euclidien, on est conduit exactement à la même équation aux dérivées partielles que si l'on cherche les surfaces à courbure constante dans l'espace ordinaire. Ce résultat avait été communiqué à Sophus Lie et l'avait vivement intéressé. Dans le petit écrit dont nous rendons compte et qui n'est autre que sa dissertation inaugurale, M. Schübel reprend les équations de M. Darboux pour en faire des applications précises et détaillées. Ces applications, conduites avec habileté, fournissent la détermination complète des surfaces minima non euclidiennes qui correspondent, dans l'espace ordinaire, aux hélicoïdes ou aux surfaces de révolution de courbure constante. J. G.

FESTSCHRIFT ZUR FEIER DES 200 GEBURTSTAGES LEONHARD EULERS, herausgegeben vom Vorstande der Berliner mathematischen Gesellschaft mit 2 Bildnissen Eulers. 1 vol. in-8, 137 pages. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1907.

La Société mathématique de Berlin, désirant fêter le 200ᵉ anniversaire de la naissance d'Euler, a tenu le 15 avril 1907 une séance solennelle dans le grand amphithéâtre de l'Institut de Physique de l'Université. Trois membres de la Société avaient été invités à prendre la parole. M. Valentin fit un récit de la vie d'Euler, et plus particulièrement de son séjour à Berlin pendant la période de 25 ans qui s'étend de 1741 à 1766. M. Kneser lut une intéressante Notice sur la part qu'Euler a prise à la création du *Calcul des Variations*, et M. F. Kötter parla ensuite des travaux d'Euler sur le mouvement de rotation d'un corps solide. La Société mathématique décida de publier les deux premières lectures, en y adjoignant une étude de M. F. Müller qui est une revue des travaux les plus importants d'Euler et un travail de M. Lampe sur l'introduction due à Euler des variables imaginaires dans la théorie de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique.

On a encore accru l'intérêt de cette publication en y reproduisant deux portraits d'Euler, l'un dû à Lorgna et datant de 1787, l'autre dû à Darbes et se rapportant à peu près à la même époque.

J. G.

SCHILLING (E.). — LA PHOTOGRAMMÉTRIE COMME APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. Édition française, rédigée, avec la collaboration de l'auteur, par *L. Gérard*. 1 vol. in-8, 101 pages et 5 planches. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Dans sa Préface, l'auteur nous présente son Livre comme provenant de conférences qu'il a faites, en 1904, aux professeurs des écoles supérieures de la ville de Göttingen, en vue de rattacher à l'enseignement de la Géométrie descriptive la Photogrammétrie,

qui, depuis longtemps, a pris un grand développement et trouvé de nombreuses applications.

Les figures géométrales d'un objet, plan et élévation, étant données, on peut tracer sur un tableau l'ensemble des lignes qui constituent la perspective de cet objet par rapport à un point de vue déterminé. Inversement, on peut déduire les projections horizontale et verticale d'un objet de la connaissance d'une ou de plusieurs de ses perspectives. Tel est le but de la Photogrammétrie (¹).

Les perspectives considérées ici ne sont pas des épures artificielles, mais résultent de photographies d'objets qui nous environnent. A ce propos, il est nécessaire de faire la remarque que voici : la photographie positive d'un objet peut être regardée comme la perspective de cet objet sur un tableau symétrique de la plaque sensible par rapport au centre de l'objectif qui joue le rôle de point de vue ; la distance focale représente la distance du point de vue au tableau.

L'Ouvrage du Dr Schilling est divisé en trois Parties, comprenant respectivement l'exposé des méthodes photogrammétriques quand on connaît une seule perspective, l'extension de ces méthodes aux cas où l'on donne deux ou plusieurs vues, et enfin les applications pratiques de la Photogrammétrie.

Une seule perspective ne suffit pas en général pour définir une figure, car on peut déplacer les points de la figure sur les rayons visuels correspondants sans modifier les traces de ces rayons sur le tableau. Aussi, dans la première Partie, ne considère-t-on que des objets dont certaines propriétés géométriques sont connues *a priori* ou se déduisent de quelques mesures simples prises sur l'objet, comme des monuments, des édifices, des intérieurs d'appartement.

Un premier groupe de théorèmes fait connaître les règles qui permettent de trouver, par des constructions très simples, qui sont en même temps des exercices intéressants de Géométrie, ce que l'auteur appelle la *première orientation,* c'est-à-dire la ligne d'horizon, le point principal et la distance, dans le cas où, le tableau étant vertical, on connaît la perspective d'une colonne

(¹) Désignée en France sous le nom de *Métrophotographie.*

verticale à base carrée, rectangle ou même parallélogramme, pourvu que dans ce dernier cas on ait mesuré sur l'objet le rapport des deux dimensions horizontales.

Le cas du tableau incliné est examiné ensuite avec un objet présentant trois directions principales rectangulaires, dont une verticale.

Enfin, lorsque les renseignements fournis par la perspective donnée sont insuffisants, on peut utiliser, pour obtenir la première orientation, des indications fournies par la chambre noire convenablement préparée et des appareils qui peuvent y être adjoints, comme un théodolite.

Après avoir ainsi posé les règles qui permettent d'obtenir la première orientation dans les différents cas pratiques qui peuvent se présenter, l'auteur fait connaître les tracés qui donnent la restitution de l'objet par sa projection horizontale et les cotes de hauteur. La méthode revient à considérer, comme on le fait en perspective axonométrique, un trièdre trirectangle de coordonnées, formé par les trois directions principales de l'objet et auquel on rapporte tous les autres points. On obtient ainsi seulement une figure semblable à l'objet réel, mais alors la connaissance de la grandeur d'un segment de l'objet suffit pour reconstruire cet objet dans sa grandeur véritable.

Ces tracés sont appliqués à des exemples frappants. C'est ainsi qu'une simple carte postale, donnant une vue d'une école, a permis de restituer, avec la plus grande facilité, le plan et les deux élévations du bâtiment.

De même un tableau d'Albert Dürer, représentant saint Jérôme dans sa cellule, a permis non seulement la reconstruction des objets qui figurent dans cet intérieur, mais encore de pénétrer la pensée du graveur en découvrant, par les points de fuite de certaines lignes, un certain arrangement voulu de ces objets.

L'extension des méthodes photogrammétriques, au cas où l'on connaît deux ou plusieurs perspectives de l'objet, constitue la deuxième Partie du Livre du D[r] Schilling. Ici les restrictions apportées dans la première Partie, et qui impliquaient la connaissance de certaines propriétés géométriques de la figure, ne sont plus nécessaires : avec deux perspectives, faites de deux points de vue dont la position est connue, on peut restituer dans tous les cas les figures générales, à l'échelle près.

L'auteur expose d'abord les diverses manières d'obtenir pratiquement, soit par la photographie, soit au moyen de quelques mesures géodésiques simples, les éléments qui permettent d'établir la *seconde orientation* de la figure, c'est-à-dire les projections, sur un même plan horizontal, des points de vue et des axes principaux.

On obtient ensuite, sur l'épure, le plan de l'objet par un tracé tout à fait analogue à celui qui donne les points d'un levé topographique par la méthode des intersections. Et, de même qu'en Topographie, deux stations suffisent pour relever le polygone du terrain, mais qu'une troisième station est généralement employée pour servir de vérification, de même, en Photogrammétrie, deux photographies sont suffisantes pour déterminer le plan, mais une troisième est souvent utile soit pour vérifier les points obtenus, soit pour mieux fixer la position de certains points mal déterminés par des rayons se coupant sous des angles trop aigus.

Quant aux cotes, elles sont déterminées, comme dans la première Partie, par la considération de deux triangles rectangles semblables qui permettent de construire ou de calculer l'inconnue comme une quatrième proportionnelle.

Deux exemples illustrent cette deuxième Partie : la construction du plan et de l'élévation du théâtre de Göttingen au moyen de deux photographies; puis celles d'un autre édifice plus compliqué, pris de trois points de vue. Une seule mesure, celle de la largeur de l'édifice dans le premier cas, celle de la distance de deux points de vue dans le second, a permis d'établir une échelle géométrale.

La troisième Partie est consacrée à des applications pratiques diverses de la Photogrammétrie, à la Peinture, à l'Architecture, à la Topographie, à la Géophysique et à l'Astronomie et se termine par la description de quelques appareils photogrammétriques.

On y trouve un aperçu historique des rapports de la Photogrammétrie avec ces différents arts ou sciences et des indications bibliographiques nombreuses.

Relativement à la Peinture, l'auteur montre, par l'examen de plusieurs œuvres de maîtres qui illustrent l'Ouvrage, que rien n'est plus propre à cultiver le sentiment de l'art et à donner à son histoire toute sa valeur éducative que l'analyse photogrammétrique d'un tableau ou d'une gravure. Lorsque les règles de la

perspective y ont été convenablement observées, il s'en dégage une impression de relief, la scène prend de la profondeur et l'on a une sensation très nette de l'espace. En même temps, une telle image permet, en général, de restituer la forme et la position des objets représentés. D'où l'importance des règles de la perspective pour la Peinture, règles qui ont été scrupuleusement observées par les grands maîtres de la Renaissance : Léonard de Vinci, Raphaël, Michel-Ange, et par Albert Dürer dans ses gravures; l'une d'elles a donné naissance à la *méthode de la vitre* encore utilisée aujourd'hui.

L'intérêt artistique n'est pas moindre dans l'étude des rapports de la Photogrammétrie avec l'Architecture : des vues d'un même objet, prises à différentes époques, permettent de reconstituer son histoire à travers les siècles, L'auteur nous apprend, à ce propos, qu'un institut pour les levés photographiques de bâtiments, fondé à Berlin en 1885, a permis de fixer pour l'avenir l'état présent des édifices publics d'Allemagne.

Mais c'est surtout en Topographie que la Photogrammétrie, dont l'auteur fait remonter l'origine à Lambert de Zurich (1759), permet de mettre en évidence des avantages pratiques et semble destinée à prendre tout son essor. Les premières applications ont été faites en France, dès 1791, par l'explorateur Beautemps-Beaupré, d'après des croquis perspectifs faits à main levée; puis, après l'invention de la Photographie, par le colonel Laussedat, dans deux Mémoires fondamentaux sur l'application de la chambre claire et de la photographie au levé des plans (1854 et 1864).

Aujourd'hui les levés photographiques se font dans les contrées d'Europe et d'Amérique, principalement dans les régions rocheuses ou glacées. L'auteur cite notamment les tracés du chemin de fer de la Jungfrau, par M. Koppe. J'ajouterai la Carte du mont Blanc, à l'échelle de $\frac{1}{20\,000}$, que M. Vallot vient d'exécuter par les mêmes procédés.

Il indique aussi le moyen d'établir une projection cotée d'une région au moyen de vues prises en ballon. Cette méthode peut devenir féconde avec le progrès des dirigeables et ce ne sera peut-être pas un des moindres résultats que l'avenir de l'Aréonautique nous réserve.

Enfin, les procédés photogrammétriques permettent d'étudier

les phénomènes visibles de l'atmosphère, au moyen de photographies faites simultanément de différents endroits ou d'une même station, à des intervalles déterminés. Elles viennent ainsi en aide à l'Astronomie et à la Météorologie.

Pour terminer, l'auteur indique encore, sans y insister, l'application qui peut en être faite à la Radiographie, à la Microscopie et et à la Cristallographie.

En résumé, l'Ouvrage du Dr Schilling, rédigé en français avec une clarté parfaite par M. Gérard, forme un complément utile aux Traités de Géométrie descriptive. La Photogrammétrie est en effet une simple application de la Géométrie descriptive; ses méthodes ne reposent que sur des principes très élémentaires, accessibles aux commençants.

De même que celle-ci, elle est éminemment propre à développer l'intuition géométrique, à donner aux élèves le sentiment du réel.

Elle fournit une mine inépuisable d'épures; les exemples donnés par le Dr Schilling, empruntés à la vie de tous les jours, sont des plus caractéristiques. Nos élèves ne pourraient manquer de s'y intéresser, soit en prenant eux-mêmes des vues photographiques, soit en utilisant simplement les cartes postales illustrées, si répandues aujourd'hui et à si bon marché.

G. Roubaudi.

WEINSTEIN (B.). — Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. 1 vol. in-8, xiv-543 pages.

M. Weinstein a fait, pendant plusieurs semestres, un cours à l'Université de Berlin sur les fondements philosophiques des Sciences; il a réuni en un Volume ces leçons, qui s'adressent au grand public, et leur a conservé la forme oratoire, qui convient d'ailleurs parfois aux arguments qu'il développe.

Un enseignement sur ce beau sujet est parfaitement à sa place dans une Université; les étudiants peuvent en tirer grand parti, quels que soient leur origine et leur but.

Les uns, qui n'ont pas l'intention d'étudier les sciences posi-

tives, peuvent être désireux d'entendre parler de ces sciences et d'acquérir l'art d'en parler. Dans les lycées français, le professeur de Philosophie n'est jamais mieux écouté, paraît-il, que lorsqu'il parle des Sciences; au contraire, les professeurs scientifiques ne parviennent pas à intéresser les mêmes élèves aux sciences particulières qu'ils sont chargés de leur enseigner, lors même qu'ils s'efforcent de donner à leur enseignement un caractère philosophique. Ce singulier état d'esprit des élèves, qu'on pourrait sans doute expliquer, n'est peut-être pas spécial aux jeunes gens de notre pays.

Quant aux étudiants qui s'adonnent aux sciences positives, ils ont grand bénéfice à connaître le langage et la façon de raisonner des philosophes, leurs méthodes, les problèmes qu'ils posent et qu'ils agitent. Il manque quelque chose à ceux qui n'ont jamais connu l'angoisse métaphysique. D'ailleurs, il est temps de perdre l'habitude, justifiée il y a 50 ans, de reprocher aux philosophes leur dédain pour les Sciences; ne pourrait-on reprocher plus justement à quelques scientifiques leur excessive ignorance de tout ce qui touche à la Philosophie?

Il y aurait, de ma part, grande impertinence à prétendre juger le contenu philosophique du Livre de M. Weinstein. Il m'a paru que l'auteur, très bien renseigné sur les sujets les plus divers, attaché à des doctrines éminemment respectables, développait ses idées avec abondance et ses opinions avec chaleur. Mais la plaisanterie et la satire ne lui réussissent pas aussi bien que les matières sérieuses : après avoir cité, en italien, la question bouffonne qu'on dit que le cardinal d'Este adressa un jour à l'Arioste, il ajoute : *Der eine liest ein Werk als eine der höchsten Kuntschöpfungen, der andere sucht darin — ich möchte kein deutsches Wort brauchen — Cochonerien*. Pour m'expliquer le lien de cette observation un peu banale avec l'anecdote qui la précède, j'ai dû supposer que le vocable français, si élégamment germanisé par M. Weinstein, est pour lui la traduction du mot italien qu'on prête au cardinal, et dont tout le comique consiste en ce que les cardinaux et même les gens de bonne compagnie ne le prononcent guère, non plus que sa *traduction* française. Mais une telle candeur est peu vraisemblable.

J. T.

TIMERDING (E.-H.) — GEOMETRIE DER KRÆFTE. 1 vol. in-8, XII-381 pages avec 27 figures dans le texte. Leipzig, Teubner, 1908.

Le titre de cet Ouvrage ne peut être bien compris et précisé que par ceux qui sont au courant des idées et des travaux de Plücker. L'auteur a voulu exposer cette partie de la Mécanique qui prend son origine dans la *Nouvelle Mécanique* de Varignon, dans les *Éléments de Statique* de Poinsot, dans le *Traité de Statique* de Möbius. Au reste, l'analyse détaillées des questions qui y sont traitées sera de nature à renseigner nos lecteurs beaucoup mieux que des aperçus généraux.

Les premiers Chapitres de l'Ouvrage traitent des vecteurs et se rattachent directement aux travaux d'Hamilton et Grassmann. Nous y voyons définis les vecteurs et les différentes grandeurs introduites par Grassmann, les produits de vecteurs, les définitions et les propriétés des produits intérieur et extérieur, la théorie des moments, etc.

Le sixième Chapitre traite des mouvements infiniment petits d'un solide invariable et de leur composition.

Le septième Chapitre traite des forces et de leur travail, des dynames.

Le huitième Chapitre contient les éléments de la Géométrie de la ligne droite, les complexes et les congruences linéaires et leurs applications.

Le neuvième Chapitre traite des principales propriétés relatives à l'équilibre d'un système de forces.

Les Chapitres suivants exposent au lecteur les théories de Ball.

Le treizième Chapitre traite du cylindroïde et de ses élégantes propriétés géométriques.

Après la théorie de Ball, l'auteur étudie la déformation infiniment petite, à propos de laquelle il introduit l'étude du complexe de Chasles et de Reye formé par les droites qui coupent les quatre faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Puis il passe au problème de l'équivalence astatique, inauguré par les travaux de Minding. On sait en quoi consiste ce problème :

Imaginons des forces appliquées en des points déterminés d'un corps solide. Supposons que le corps se déplace sans que le point d'application et la direction des forces soient changés. Alors se posera un problème nouveau : celui de la réduction et, par suite, de l'équilibre des forces, subsistant indépendamment de l'orientation du corps solide. C'est ce problème que traite M. Timerding.

L'Ouvrage se termine par l'étude des moments d'inertie, du mouvement d'un corps solide libre ou assujetti à des liaisons, et par un retour à la théorie de la déformation infiniment petite et de l'élasticité.

Il est écrit avec grand soin et contient un grand nombre d'indications historiques et bibliographiques qui rendront le plus grand service au lecteur. J. G.

ADHÉMAR (R. d'). — Exercices et leçons d'Analyse. *Quadratures. Équations différentielles. Équations intégrales de M. Fredholm et de M. Volterra. Équations aux dérivées partielles du second ordre.* 1 vol. in-8, VIII-208 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1908.

Ce Livre contient des Chapitres très divers, mais qui, d'ailleurs, sont tous intéressants. Il y a d'abord une trentaine de pages d'introduction ; l'auteur y a résumé les notions, les propositions et les formules les plus importantes de la Géométrie infinitésimale, de la théorie des intégrales à variable réelle ou complexe, des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, etc. Puis viennent des exemples de quadratures et des *Problèmes divers,* dont les uns ont un intérêt théorique véritable, dont les autres sont de bons exercices : ils sont, pour la plupart, empruntés à d'excellents Mémoires ou aux examens de la Sorbonne ; les problèmes divers se rapportent presque tous à la Géométrie ou à la théorie des équations différentielles. Dans le Chapitre suivant, *Sur les transcendantes classiques,* M. d'Adhémar développe quelques propriétés des fonctions de Bessel, des intégrales eulériennes et de la fonction ζ de Riemann.

Beaucoup de lecteurs seront reconnaissants à M. d'Adhémar de son Chapitre IV, qui traite de l'équation de Fredholm. Pour l'ex-

position, il a utilisé l'enseignement de M. Picard : la formule de M. Fredholm est obtenue en suivant la méthode qu'on doit à M. Hilbert. Application est faite aux problèmes de Dirichlet (pour le plan), sur lesquels l'auteur avait donné antérieurement quelques indications, comme aussi sur la théorie du potentiel logarithmique de simple et de double couche ; pour cette dernière théorie, M. d'Adhémar a profité d'un cours récent de M. Darboux.

L'auteur traite ensuite de certaines équations des types hyperbolique et parabolique et, à ce propos, de la méthode de Riemann et de la méthode des approximations successives de M. Picard. Il donne quelques brèves indications sur la façon dont cette dernière méthode permet de traiter l'équation intégrale de M. Volterra.

Enfin, un dernier Chapitre contient les énoncés d'une cinquantaine de problèmes.

Le lecteur de cette brève analyse estimera peut-être que tous ces Chapitres sont un peu disparates; il y a, cependant, une unité dans le Livre de M. d'Adhémar : elle est faite du désir évident qu'a l'auteur d'être utile aux étudiants qui ont le goût des Mathématiques, de leur donner de petits sujets de recherche et de réflexion, enfin de les mettre un peu au courant de certaines questions importantes, actuelles, sur lesquelles il leur est parfois difficile de se renseigner. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ADHÉMAR (R. d'). — *Exercices et leçons d'Analyse.* In-8°, VIII-208 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

ANDRADE (J.). — *La Géométrie naturelle*, en 2 livres. T. I : *Géométrie qualitative.* In-8°. Paris, E. Cornély et Cie. 2 fr.

Connaissance des temps ou des mouvements célestes pour l'année

1910. à l'usage des astronomes et des navigateurs, publ. par le Bureau des Longitudes. In-8°, VIII-919 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

Delègue (L.). — *Essais sur les principes des sciences mathématiques.* In-8°, 132 p. Paris, Vuibert et Nony. 4 fr.

Feuerbach (Wilh.). — *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks u. mehrerer durch sie bestimmten Linien u. Figuren.* 2 nichtgeänd. Ausg. Gr. in-8°, XIII-73 et VI p. avec fig. Haarlem. 2 m. 25 pf.

Hensel (Kurt.). — *Theorie der algebraischen Zahlen.* 1. Bd. gr. in-8°, XI-349 p. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 14 m.

Klein (F.). — *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* I. Tl. *Arithmetik, Algebra, Analysis.* Vorlesung, geh. im Wintersem. 1907-1908. Ausgearb. v. *E. Hellinger.* Gr. in-8°, VIII p. et 590 p. autogr. avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m. 50 pf.

Kübler (J.). — *Beweis des Fermat'schen Satzes, dass die Gleichung* $x^n + y^n = z^n$ *f.* $n > 2$ *in ganzen Zahlen niemals auflöcbar sei.* Gr. in-8°, 18 p. avec 3 fig. et 1 planche. Leipzig. 1 m.

Nielsen (Niels). — *Lehrbuch der unendlichen Reihen.* Vorlesungen, geh. an der Universität Kopenhagen. In-8°, VIII-287 p. Leipzig, Teubner. 11 m.; relié, 12 m.

Reye (Thdr.). — *Die Geometrie der Lage.* Vorträge. I. Abtlg. 5, verb. u. verm. Aufl. Gr. in-8°, VIII-225 p. avec 98 figures. Leipzig, A. Kröner, 8 m.; relié, 10 m.

Turner (H.-H.). — *Halley's Comet.* An evening discourse to the british Association at their meeting at Dublin. In-8°. London, Clarendon Press. 1 s.

Gray (T.). — *Smithsonian physical Tables,* rev. edit. In-8°, 9 × 6, 335 p. London, Wesley. 7 s.

Müller (Fel.). — *Führer durch die mathematische Literatur m. besond. Berücksicht. d. historisch wichtigen Schriften.* (*Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet v. Mor. Cantor. Gr. in-8°.) (X-252 p.) Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m.; relié, 8 m.

Andoyer (H.). — *Cours d'Astronomie de la Faculté des Sciences.* T. II : *Astronomie pratique.* In-8°, 304 p. Paris, A. Hermann. 10 fr.

Ball (Sir Robert). — *A treatise on spherical Astronomy.* In-8°, 518 p. Camb. Univ. Press. 12 s.

Carus (Paul). — *The foundations of mathematics : a contribution to*

the Philosophy of Geometry. IV-141 p. Chicago, Open Court Publishing C°. 75 c.

FLAMMARION (Camille). — *Annuaire astronomique et météorologique pour* 1909. Av. 83 fig. Paris, E. Flammarion. 1 fr. 50 c.

HALE (G.-E.). (Ph.) FOXET. — *The rotation period of the Sun, as determined from the motions of the calcium flocculi.* 54 p. Washington, Carnegie Institution of Washington. 40 c.

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, nouvelle édit. In-8°, IV-112 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr. 50 c.

MANSION. — *Sur la portée objective du calcul des probabilités.* In-8°, 92 p. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 25.

MURRAY (Daniel). — *Differential and integral Calculus.* In-8°. London, Longmans. 7 s. 6 d.

ROUSE-BALL (W.). — *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes.* 2e éd. française avec additions de *J. Fritz-Patrick,* 2e Partie, 364 p. Paris, A. Hermann. 5 fr.

WRIGHT (Edmund-J.). — *Invariants of quadratic differential forms.* In-8°, 90 p. New-York, Putnam. 75 c.



COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (ÉMILE). — TRAITÉ D'ANALYSE. T. III, deuxième édition. 1 vol. in-8, 604 pages. Paris, Gauthier-Villars.

Il n'est pas facile de résumer les parties nouvelles d'un Livre où, sur chaque question, c'est l'essentiel qui est exposé ; et, quant aux aperçus, magistralement donnés sur les idées directrices, le mieux serait de recopier le texte.

J'essaie ici, pour celles des additions de la deuxième édition qui forment des sections nouvelles du Livre, de reproduire la position de la question et la forme du résultat. Je fais seulement d'avance la remarque que l'indication fournie par le nombre des pages ajoutées (40 à peu près) ne renseigne pas du tout sur l'importance des additions faites par M. Picard.

CHAPITRE VIII : SECTION VI. — **De la stabilité des intégrales de certaines équations différentielles; théorème de M. Liapounoff sur l'instabilité de l'équilibre.**

Les équations dont il s'agit sont de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les X_i s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ et les termes du premier degré dans $X_1, X_2 \ldots, X_n$ étant supposés se réduire à

$$\lambda_1 x_1, \quad \lambda_2 x_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n x_n.$$

On a évidemment la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$: on dit que c'est une solution *stable* si les intégrales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui correspondent à des valeurs initiales suffisamment petites, restent, pour toute valeur positive de t, inférieures en valeur absolue à un nombre positif donné l, aussi petit qu'on le veut; on dit que

la solution est *instable* s'il existe un nombre positif l pour lequel on ne peut satisfaire à la condition précédente. (Cette définition, donnée ici sous une forme abrégée, est précisée dans le texte.)

M. Liapounoff a démontré que si, parmi les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, il y en a dont les parties réelles soient positives, la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ sera instable.

La démonstration de ce théorème est une application des théorèmes généraux établis dans le Chapitre VIII sur les équations différentielles de la forme indiquée.

On en déduit un caractère permettant de reconnaître l'instabilité de l'équilibre d'un système, en supposant qu'il existe une fonction des forces. En abrégé, il y a instabilité si la non-existence du maximum de la fonction des forces est indiquée par les termes du second degré.

Voici la conclusion de M. Picard :

« En fait, on peut dire que, en général, ***l'instabilité est la règle***, et *la stabilité, l'exception*. Il semble que ce soient des conditions *d'inégalité* qui suffisent à entraîner ***l'instabilité***, tandis qu'il faut des *conditions d'égalité* pour entraîner *la stabilité*. »

Chapitre XIV : Section IV. — **Application des méthodes d'approximation successives à la recherche des valeurs asymptotiques.**

La méthode est indiquée en envisageant une équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0,$$

où p_1 et p_2 sont des séries entières en $\frac{1}{x}$:

$$p_1 = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots,$$

$$p_2 = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots,$$

convergentes pour $|x|$ suffisamment grand.

On peut faire disparaître le terme constant dans le coefficient de y en faisant la transformation

$$y = e^{\lambda x} Y,$$

λ étant une racine de l'équation du second degré

$$\lambda^2 - a_0\lambda - b_0 = 0,$$

puis, en posant

$$y = x^{\mu} Y',$$

on peut obtenir une équation de même forme que la proposée, mais où le coefficient de y commence par un terme en $\frac{1}{x^2}$.

Le cas simple est celui où, dans l'équation transformée, le coefficient a_0 est négatif et, par suite, devient égal à -1 si l'on remplace x par kx (k convenable et positif).

On peut alors écrire l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{a_1}{x} + \dots\right)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \dots\right) y = 0.$$

Pour les approximations successives, on prendra $y_1 = h$, puis

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} - \frac{dy_n}{dx} = -\left(\frac{a_1}{x} + \dots\right)\frac{dy_{n-1}}{dx} - \left(\frac{b_2}{x^2} + \dots\right) y_{n-1}.$$

On montre assez facilement que y_n tend uniformément vers une limite y (au moins à partir d'une valeur suffisamment grande de x) et que y est une solution de l'équation différentielle.

En calculant de proche en proche $y_2, y_3, \dots, y_n$ et en se servant d'une limite supérieure, à forme simple, de $|y - y_n|$, on obtient pour y une représentation asymptotique ; on en déduit, en revenant à l'équation initiale, une intégrale avec la représentation asymptotique

$$e^{\lambda x} x^{\mu}\left(h + \frac{H_1}{x} + \frac{H_2}{x^2} + \dots + \frac{H_n + \varepsilon_n}{x^n}\right),$$

pour une valeur donnée de l'entier n, les coefficients H étant des constantes fournies par l'analyse précédente, et ε_n tendant vers zéro pour $x = \infty$.

Dans le cas où l'équation du second degré en λ a ses racines imaginaires, la relation qui définit les approximations successives est modifiée. On forme d'abord l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} = 0,$$

qui admet comme solutions

1, [illegible];

l'équation à étudier peut s'écrire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\alpha}{x^2} + \ldots\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\beta}{x^2} + \ldots\right)y,$$

et les approximations sont indiquées par la relation

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} + P(x)\frac{dy_n}{dx} = \left(\frac{\alpha}{x^2} + \ldots\right)\frac{dy_{n-1}}{dx} + \left(\frac{\beta}{x^2} + \ldots\right)y_{n-1}.$$

Une application immédiate de ce dernier cas à l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 J_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu = 0$$

donne la représentation asymptotique

$$\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \ldots\right)\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \ldots\right)\frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

où α_0 et β_0 sont arbitraires.

Section V. — Étude d'une équation récurrente; théorème de M. Poincaré.

Soit la relation récurrente

$$P_2 u_{n+2} + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0;$$

on suppose que les P sont des polynomes entiers en n de degré p et que P_2 ne s'annule pour aucune valeur entière et positive de n. En se fixant les valeurs de u_0 et de u_1, on calculera de proche en proche tous les u.

La question est de chercher la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $n = \infty$.

Pour cela, on considère l'équation

$$cz^2 + bz + a = 0,$$

où a, b, c sont les coefficients de n^p dans P_0, P_1, P_2, et l'on suppose que les racines α et β ont des modules distincts ($|\alpha| > |\beta|$). On démontre, d'après M. Poincaré, que *la limite de* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *est en général* α, *et exceptionnellement* β.

On fait une application de ce théorème à l'étude des séries de polynomes et l'on définit les courbes qui limitent la région de convergence de ces séries.

CHAPITRE XIII : SECTION V. — **Théorème de M. Landau.**

Le théorème de M. Landau s'énonce ainsi :

Soit une fonction transcendante entière

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

dans laquelle a_1 *n'est pas nul; on peut trouver un nombre* $R(a_0, a_1)$ *dépendant seulement de* a_0 *et de* a_1, *tel que, dans le cercle* $|x| < R$, *une au moins des équations*

$$F(x) = 0, \qquad F(x) = 1$$

possède une racine.

La démonstration reproduite ici fait intervenir, suivant l'exemple donné par M. Picard, une fonction modulaire $\nu(y)$, rapport de deux périodes convenables de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-y)}};$$

cette fonction multiforme $\nu(y)$ admet les seuls points singuliers $0, 1, \infty$; on considère son développement dans le voisinage de a_0,

$$\nu(y) = c_0 + c_1(y - a_0) + c_2(y - a_0)^2 + \ldots,$$

et l'on trouve qu'on peut prendre

$$R(a_0, a_1) = \frac{1}{e^{c_0 i} c_1 a_1}.$$

Ce théorème est une généralisation du premier théorème de M. Picard sur les fonctions entières.

En dehors de ces sections nouvelles dont j'ai essayé de donner une idée, des exemples ont été ajoutés, des cas singuliers examinés en détail, notamment à la fin du Chapitre X : **Sur la forme des courbes satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre et du premier degré.**

E. LACOUR.

VOSS (A.). — UEBER DAS WESEN DER MATHEMATIK. Rede gehalten am 11 März 1908 in der öffentlichen Sitzung der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1 vol. in-8, 98 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

On lira avec intérêt ce discours où l'auteur exalte les Mathématiques, retrace leur histoire à grands traits, en insistant particulièrement sur l'histoire moderne et sur les questions dont l'intérêt philosophique est considérable : c'est surtout aux Mathématiques pures, au nombre, aux notions de limite, d'ensemble, de fonction que M. Voss s'attache ; il aborde toutefois la question des fondements de la Géométrie ; il termine en parlant des réformes qu'il conviendrait d'apporter à l'enseignement des Mathémathiques dans les gymnases et les écoles : M. Voss est de ceux qui estiment que des notions de Géométrie analytique et d'Analyse infinitésimale doivent pénétrer dans l'enseignement secondaire ; les savants et les techniciens de tous les pays se mettront certainement d'accord pour proclamer la nécessité de cette réforme qui est réalisée en France depuis plusieurs années, grâce à l'initiative et à l'autorité de M. Darboux.

Le texte est accompagné de notes nombreuses et copieuses, où le lecteur trouvera soit des renseignements bibliographiques, soit des développements trop spéciaux pour prendre place dans un discours prononcé dans une séance publique.

J. T.

FUBINI (G.). — INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GRUPPI DISCONTINUI E DELLE FUNZIONI AUTOMORFE. 1 vol. in-8, XII-416 pages. Pise, E. Spoerri, 1908.

On discutera peut-être toujours la question de savoir si, pour exposer une théorie mathématique, il vaut mieux partir d'un cas particulier, qu'on étudie en détail et d'où l'on fait sortir peu à peu les idées générales, ou mettre en avant ces idées générales, donner de suite aux recherches toute l'ampleur et toute la généra-

lité possibles, transporter le lecteur sur un sommet d'où il a une vue d'ensemble et peut reconnaître la place et l'importance des théories particulières. Cela dépend sans doute du sujet, du lecteur et de l'auteur. Celui-ci exposera le mieux les choses du point de vue d'où il les voit le mieux; il y aura toujours d'excellents esprits, maîtres ou étudiants, dont les uns s'attacheront de préférence aux choses très précises et très particulières, dont les autres goûteront surtout la généralité; on s'accorde, d'ailleurs, à penser que la seconde méthode ne convient qu'à des lecteurs dont l'esprit mathématique est déjà formé; il n'y en aura sans doute pas d'autres à aborder cette *Introduction à la Théorie des groupes discontinus et des fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables,* bien que M. Fubini ait fait grande attention à ne demander à ses lecteurs que des connaissances relativement élémentaires : quelques pages seulement, imprimées en caractères fins, et qu'on peut sauter sans perdre l'intelligence du texte, exigent des connaissances un peu plus élevées; l'auteur indique d'ailleurs les Ouvrages où l'on pourra les acquérir.

Quoi qu'il en soit, une exposition d'ensemble, quand elle est aussi bien faite que celle que nous donne M. Fubini, permet de voir le sujet dans une clarté qui pénètre partout et qui satisfait mieux l'esprit. A la généralité et à la clarté, M. Fubini a su joindre une entière rigueur : c'est là, d'ailleurs, des qualités qui vont ensemble. On reproche quelquefois aux expositions trop bien faites de ne pas être suggestives; on n'adressera point ce reproche à M. Fubini; s'il s'est attaché à bien mettre en lumière les résultats acquis, il n'a pas pris moins de soin pour fixer l'attention du lecteur sur les lacunes, sur les problèmes à résoudre : son Livre ne manquera pas de servir à l'accroissement de la Science, non seulement par les facilités qu'il donne pour étudier un beau et important sujet et par la contribution qu'y a apportée M. Fubini, mais encore par les recherches qu'il suscitera.

Son Livre est divisé en trois Parties. Dans la première, l'auteur résume rapidement les théories subsidiaires qui sont utiles pour l'étude des groupes discontinus et des fonctions automorphes : les propriétés fondamentales des groupes, la théorie des métriques, en particulier des métriques à courbure constante et des métriques hermitiennes. La deuxième Partie est consacrée à la théorie des

groupes discontinus. Les problèmes fondamentaux qui se présentent dans l'application aux fonctions analytiques de la notion de groupe discontinu conduisent naturellement, d'une part à la définition des fonctions *zêta-crémoniennes, crémoniennes, zêta-automorphes, automorphes*, d'autre part à la définition des groupes proprement discontinus. On s'occupe ensuite de distinguer les groupes proprement discontinus ou non, puis de construire les champs fondamentaux pour un groupe proprement discontinu. Enfin, M. Fubini traite des applications arithmétiques de ces groupes et expose la théorie des groupes projectifs pour une seule variable.

Les applications de la théorie des groupes discontinus à la théorie des fonctions, ou, si l'on préfère, la théorie des fonctions automorphes, sont l'objet de la troisième Partie. M. Fubini démontre les théorèmes d'existence qui concernent ces fonctions, étudie leurs propriétés fondamentales, les relations algébriques entre les fonctions automorphes d'une seule variable qui correspondent à des groupes distincts, le théorème de diramation, la généralisation pour les fonctions automorphes du théorème de Weierstrass pour les fonctions plusieurs fois périodiques, et s'occupe enfin des applications des fonctions automorphes à l'uniformisation des fonctions polydromes.

Dans l'Appendice, il traite des fonctions modulaires en général; en outre, divers points sont complétés ou perfectionnés : M. Fubini signale en particulier un paragraphe dû à M. Elia Levi, qui complète sur un point essentiel la théorie des fonctions zêta-automorphes et zêta-crémoniennes d'une seule variable.

Ce court résumé, pour lequel j'ai, d'ailleurs, largement profité de la préface de M. Fubini, suffira à montrer l'importance de son œuvre ; il montrera aussi que cette œuvre ne fait nullement double emploi avec les beaux livres de MM. Klein et Fricke sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques et sur la théorie des fonctions automorphes : ces Ouvrages et celui de M. Fubini se complètent de la façon la plus heureuse. J. T.

KOWALEWSKI (G.). — GRUNDZÜGE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. 1 vol. in-8, 452 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Le Livre de M. Kowalewski est une exposition simple et rigoureuse des propositions fondamentales du Calcul différentiel et intégral : l'auteur est de ceux qui savent être courts sans sacrifier la clarté à la brièveté.

Il prend les choses au début, c'est-à-dire à la notion de nombre irrationnel, au sens de M. Dedekind, en profitant sur quelques points des publications de M. Baire ; il traite ensuite des limites, des fonctions, des séries, etc. Je dois signaler, à propos des limites, une façon de parler qui peut être commode dans un grand nombre de cas et qui ne comporte évidemment aucun inconvénient, du moment qu'on est prévenu : quand tous les éléments d'un ensemble infini, sauf un nombre fini de ces éléments, jouissent d'une propriété, M. Kowalewski dit que *presque* tous les éléments de cet ensemble jouissent de cette propriété. Par exemple, la formule $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$ s'énonce en disant que presque tous les x_n se trouvent dans n'importe quel intervalle dont x est le centre.

Il est vrai que cette façon de parler ne s'applique que si les x_n constituent un ensemble dénombrable, ce qui est d'ailleurs indiqué par la notation, et que le mot *limite* peut s'appliquer dans d'autres cas ; mais M. Kowalewski est peut-être de ceux qui ne veulent pas parler d'autres ensembles que d'ensembles dénombrables. Ainsi, il tient à dire que la fonction $f(x)$ a une dérivée si chaque suite

$$(1) \qquad \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \qquad (\lim h_n = 0)$$

a une limite.

On ne saurait sans doute rien contester de cette définition ; mais il me semble qu'il y a un scrupule excessif à ne vouloir employer le mot *limite* que dans le cas d'une suite, et, d'ailleurs, ce qu'on gagne peut-être à restreindre ainsi le sens du mot *limite*, on le perd d'un autre côté en parlant de *chaque* suite telle que (1) ; il me semble plus naturel de parler de *chaque* nombre, non nul, plus petit en valeur absolue qu'une certaine borne η. En fait, lorsqu'on cherche une dérivée, on n'a pas l'habitude de considérer des suites telles que (1). Je demande encore la permission

de dire à cette occasion que si les expressions *chaque* suite telle que (1), *chaque* nombre plus petit que r_1 en valeur absolue, sont peut-être les plus correctes dont on puisse se servir, il ne doit pas être défendu de dire, dans le même sens, *toutes* les suites telles que (1), *tous* les nombres plus petits que r_1 en valeur absolue, ou même l'*ensemble* (non dénombrable) des suites telles que (1), ou l'*ensemble* (non dénombrable) des nombres plus petits que r_1 en valeur absolue ; si chaque individu d'un ensemble est bien défini, l'ensemble est bien défini ; à regarder des individus comme faisant partie d'un ensemble on ne diminue et l'on n'augmente en rien la clarté avec laquelle on conçoit ces individus.

Mais me voilà bien loin du Livre de M. Kowalewski.

En même temps que les dérivées, l'auteur introduit la notation différentielle. Il suppose systématiquement que les différentielles des variables indépendantes sont des constantes ; cela simplifie l'exposition ; mais ne perd-on pas ainsi le principal bénéfice de la notation différentielle, qui est peut-être de ne pas spécifier les variables indépendantes ? C'est là assurément une chicane plutôt qu'une critique : si M. Kowalewski avait traité plus explicitement du changement de variables, il n'aurait pas manqué de dire ce qui convient et il n'aurait eu aucune peine à adapter son exposition à ce sujet.

Il y aurait lieu de signaler le tour ingénieux que l'auteur a su donner à de nombreuses démonstrations ; je me contente d'appeler l'attention du lecteur sur le n° 123, où le problème de l'inversion de deux fonctions de deux variables m'a paru traité d'une façon remarquablement simple et élégante.

L'auteur se limite aux intégrales simples et doubles et aux applications classiques à la Géométrie ; on remarquera le soin avec lequel sont traitées les séries de Fourier. Les équations différentielles ne sont pas abordées, non plus que les fonctions de variables imaginaires.

Un Chapitre supplémentaire est consacré aux propriétés fondamentales des déterminants.

Le Livre de M. Kowalewski rendra les meilleurs services aux étudiants qui sont soucieux d'approfondir un peu les principes du Calcul différentiel et intégral. J. T.

DUHEM (P.). — ÉTUDES SUR LÉONARD DE VINCI. CEUX QU'IL A LUS ET CEUX QUI L'ONT LU. 2e série. 1 vol. in-8, IV-474 pages. Paris, Hermann et fils, 1909.

Nous avons essayé (¹), à propos du premier Volume, de montrer l'objet et l'intérêt de ces *Études* : dans la première série, *ceux qui ont lu Léonard de Vinci*, ceux qui l'ont pillé consciemment et ont servi à diffuser sa pensée, ceux enfin auxquels cette pensée est probablement parvenue, qui en ont profité, qui l'ont développée, précisée et qui lui ont donné parfois une forme définitive, tenaient une grande place. Cette fois, presque toute la place est occupée par *ceux qu'a lus Léonard de Vinci*, et par ceux qu'ils avaient lus, que M. Duhem ne fait pas d'habitude remonter plus haut qu'Aristote.

Des Chapitres très considérables aboutissent ainsi à l'éclaircissement d'une de ces petites notes qu'a laissées Léonard de Vinci, qui, pour le lecteur non prévenu, semble ne pouvoir être comprise et n'offrir aucun intérêt. Pour en pénétrer le sens, pour en saisir la portée, il faut avoir vécu avec tous ces scolastiques qui ont, pendant « la nuit du moyen âge », déployé une extraordinaire vigueur intellectuelle; M. Duhem se plaît à montrer l'incomparable éclat dont a brillé, au XIVe et au XVe siècle, l'Université de Paris, ouverte d'ailleurs aux maîtres et aux étudiants de tous les pays. Sans doute aujourd'hui, quelques-uns des problèmes sur lesquels les hommes de cette époque ont dépensé des trésors de logique nous semblent inexistants; on se prend à regretter que ces merveilleux logiciens n'aient pas eu le sens du réel, qu'ils n'aient pas su d'abord observer, expérimenter, puis raisonner sur ce qu'ils avaient vu; mais, d'après M. Duhem, le sens de la réalité ne leur manquait nullement : les projets d'expériences qui n'ont pas été faites sont très nombreux et fort ingénieux parfois; ils sont restés à l'état de projets parce que la technique était trop insuffisante; M. Duhem me rappelait à ce propos que le Père Mersenne, au XVIIe siècle, n'avait pu répéter l'expérience de Torricelli, sans doute parce qu'il n'avait pas eu à sa disposition de tubes de verre

(¹) *Bulletin*, t. XXXI_1, p. 52.

qu'il pût fermer avec son doigt : les progrès des sciences expérimentales sont liés aux progrès de la technique, et cela apparaît bien clairement si l'on veut réfléchir à ce qui se passe de nos jours, où ces progrès sont si rapides. Si l'on ne craignait pas d'exagérer un peu et de jouer sur les mots, ne pourrait-on soutenir aussi que c'est quelques *instruments*, réalisés un peu plus tard, qui manquaient pour le progrès des Mathématiques? Les procédés de l'Algèbre, du Calcul différentiel et intégral sont-ils autre chose qu'une technique? Les savants de cette époque, eux aussi, travaillaient sur ce qu'ils savaient ; seulement, ils n'avaient guère d'instruments ; ils usaient d'autant plus de leur cerveau et peut-être trop. Notre pensée n'est pas comme celle du Dieu d'Aristote : elle n'est guère propre à se penser elle-même.

Quelle que soit l'importance de la Logique et de la Métaphysique dans cette seconde série d'études, les sciences qui deviendront plus tard les sciences positives et qui tendent à se détacher de la Cosmogonie n'en sont point absentes. Il y a tout un Chapitre, fort intéressant, consacré à la Géologie, et la Dynamique ne fait pas la moindre part du Chapitre considérable relatif à Nicolas de Cues, ce métaphysicien subtil et hardi, qui ne craignait pas d'identifier les contraires.

Dans ce Chapitre M. Duhem revient, afin de la préciser, sur la théorie de l'*impetus*, dont il avait eu déjà l'occasion de parler plusieurs fois.

Pour Aristote et ses disciples la cause d'un changement, d'un phénomène, est extérieure à ce phénomène. Le mouvement est un changement de lieu; il a une cause extérieure : le Premier Moteur entretient continuellement le mouvement de la sphère des étoiles, qui engendre à son tour le mouvement des sphères inférieures. Le mouvement d'un projectile est entretenu par l'air : le projectile ne pourrait se mouvoir dans le vide. Cette dernière théorie, déjà combattue par Jean Philopon le grammairien, est acceptée par la plupart des scolastiques, par saint Thomas, en particulier, qui s'efforce de réfuter les arguments contraires. Mais des voix discordantes commencent à s'élever : Guillaume d'Ockam soutient que, lorsque le projectile s'est séparé de l'instrument qui l'a lancé, il est à lui-même son propre moteur; en lui, on ne peut établir aucune distinction entre ce qui meut et ce qui est mû. Le

mouvement local n'est pas sans cesse nouveau; « il est bien vrai que le corps en mouvement traverse, à une certaine époque, une région de l'espace qu'il ne traversait pas à une autre époque; mais on ne peut pas dire qu'à tel moment telle région soit quelque chose de nouveau, elle n'est nouvelle que par rapport au mobile ».

C'est là une conception qui n'est guère éloignée de notre conception de l'inertie; sans doute, elle ne triomphe pas, mais, d'après M. Duhem, elle ne fut ni oubliée ni perdue.

Pour Albert de Saxe, la cause motrice qui entretient le mouvement du projectile n'est pas non plus l'air ébranlé, mais bien une certaine vertu créée dans le mobile par l'instrument qui l'a lancé : c'est l'*impetus*.

« Celui qui lance un projectile imprime à ce projectile une certaine vertu motrice... Comme une pierre a plus de matière qu'une plume et qu'elle est plus dense, elle reçoit davantage de cette vertu motrice; elle la garde plus longtemps que la plume, et voilà pourquoi elle se meut plus longtemps après qu'elle a quitté l'instrument qui la projette. C'est aussi parce qu'elle possède davantage de cette vertu motrice imprimée, qu'elle produit uue percussion plus violente. »

De cette notion d'*impetus* sortiront un jour la *quantité de mouvement* et la *force vive*. En attendant, Albert de Saxe ne prétend pas la préciser : et que serait-ce pour lui que la préciser?

« Cet *impetus*, dit-il, est-ce une substance ou un accident? Si c'est un accident, de quelle catégorie est-il? Est-il quantité ou qualité? Si cette vertu est qualité, est-elle qualité de première espèce ou de seconde, ou de quelque autre? Ces considérations dépendent d'une science plus élevée; elles sont objets de Métaphysique et non de Physique. »

Nous nous bornerions à demander : comment se mesure l'*impetus?* et toute la Métaphysique du monde ne répondrait pas à cette question.

Si vague qu'elle fût, la notion de l'*impetus* était plus scientifique que la conception d'Aristote; l'*impetus* n'est plus extérieur au mobile : « Supposons, dit encore Albert de Saxe, qu'une meule de forgeron, très grande et très lourde, ait été tournée jusqu'à ce qu'elle se meuve très rapidement, et qu'on cesse alors de la tourner,

elle demeurera longtemps en mouvement... Lorsque Dieu créa les sphères célestes, il mit chacune d'elles en mouvement comme il lui plut; et elles se meuvent, maintenant encore, par l'*impetus* qu'il leur a communiqué de la sorte; cet *impetus* ne subit ni corruption ni diminution. »

Qui n'apercevrait l'importance de cette façon de penser? Elle conduit à étudier les phénomènes en eux-mêmes, non dans une cause qui leur est extérieure.

L'influence de la pensée d'Albert de Saxe sur Nicolas de Cues est manifeste; mais ce dernier, métaphysicien et mathématicien, est quelque peu poète : pour lui l'*impetus* est l'*âme* du mouvement, la *vie* du corps mobile. L'enfant qui imprime un mouvement de rotation à son toton est l'image de Dieu qui infuse la vie dans un corps.

Kepler reprendra l'exemple du toton : « Les enfants savent fort bien faire tourner un toton de manière qu'il demeure dans une position bien déterminée; le mouvement de ce toton est d'autant plus régulier et plus uniforme que l'impulsion qu'il a reçue a été donnée avec plus de soin : une fois mis en mouvement par l'*impetus* qu'il a reçu, ce toton effectue sur lui-même un grand nombre de révolutions; mais il est heurté par les inégalités de la table, par le choc de l'air; son poids triomphe de lui-même; aussi son mouvement s'alanguit-il peu à peu, et le toton finit par tomber. »

» Dieu n'a-t-il pas pu, lui aussi, au commencement des temps produire sur la Terre, comme de l'extérieur, une telle impression? C'est cette impression qui aurait produit toutes les rotations ultérieures de la Terre; c'est elle qui les entretiendrait encore aujourd'hui, bien que leur nombre surpasse deux millions; cette impression, en effet, garde toute sa vigueur parce que la rotation de la Terre n'est gênée ni par le choc d'aucune aspérité extérieure, ni par le fluide éthéré qui est dépourvu de densité; elle n'est gênée non plus par aucun poids, par aucune gravité interne; quant à l'inertie de la matière, elle est le sujet même qui reçoit l'*impetus* et qui le conserve afin que la rotation se continue. »

Pour Kepler, comme pour Nicolas de Cues, l'*impetus* est une âme, « une âme d'une espèce particulière, qui ne confère à la Terre ni la croissance, ni la sensibilité, ni la raison discursive, qui la meut simplement », qui la meut et qui, peut-être, l'a organisée

en vue du mouvement de rotation, en disposant la matière qui la compose en fibres annulaires dont tous les centres se trouvent sur l'axe de rotation du globe. Nicolas de Cues avait constaté que les corps de révolution étaient adaptés au mouvement de rotation autour de leur axe, et c'était cette adaptation de la forme au mouvement qui lui fournissait la meilleure explication de la conservation du mouvement dans les sphères célestes : Kepler adopte une doctrine analogue, mais l'applique à la Terre.

Léonard de Vinci, comme Kepler, est imprégné des pensées d'Albert de Saxe et de Nicolas de Cues. Si je ne craignais pas d'allonger outre mesure ce compte rendu, j'aurais plaisir à retracer, d'après M. Duhem, les très intéressantes spéculations sur le mouvement du Soleil, de la Lune et de notre Terre qui, d'après Nicolas de Cues, « est une noble étoile ». Je me borne à dire deux mots de la façon dont Léonard de Vinci concevait le mouvement d'un projectile : il suit et précise Albert de Saxe ; comme lui, il décompose le mouvement en trois périodes.

Dans la première, l'*impetus* est assez puissant pour annihiler complètement la gravité naturelle ; le projectile se meut en ligne droite, dans la direction où il a été lancé, d'un *mouvement purement violent*, comme s'il était dénué de poids. Dans la deuxième période, l'*impetus* qui avait été communiqué au mobile s'est totalement évanoui ; il se *meut d'un mouvement purement naturel* et tombe suivant la verticale. Entre ces deux périodes extrêmes s'écoule une période intermédiaire durant laquelle la gravité et l'*impetus* coexistent et luttent l'un contre l'autre ; c'est la période d'*impetus composé;* le mobile se meut d'un mouvement curviligne, *mélangé de naturel et de violent*.

Cette doctrine, plagiée par Tartaglia, par Cardan, par Bernardino Baldi, devait exercer une influence notable sur le développement de la Dynamique. M. Duhem a recueilli et commenté un grand nombre de fragments épars relatifs à ce sujet ; mais je ne veux pas commencer à reproduire quelqu'un de ces fragments, où l'on ne sait parfois s'il faut admirer davantage la pensée elle-même, ou la forme que Léonard de Vinci lui a donnée ; je n'en laisserais sans doute aucun de côté.

Je ne saurais parler ici (ni ailleurs) de Métaphysique : il m'est, toutefois, impossible de ne pas signaler le Chapitre et les documents

relatifs à l'infiniment grand et à l'infiniment petit. C'est l'histoire de ce que M. Poincaré pourrait appeler le *précantorisme;* l'ingéniosité, la subtilité et parfois la justesse de vue de Gilles de Rome, de Guillaume d'Ockam, de Jean de Bassols, de Jean Buridan, de Walter Barley, de Grégoire de Rimini, etc., sont vraiment merveilleuses. Mais je ne puis que renvoyer le lecteur au Livre de M. Duhem. J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

André (Ch.). — *Les planètes et leur origine.* In-8°, 285 p., 94 fig., 3 pl. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de M. Lœwy. *Mémoires,* t. XXV. In-4°, VIII-426 p. Paris, Gauthier-Villars. 27 fr.

Bianchi (Luigi). — *Lezioni di Geometria analitica.* In-8°, 816 p. avec fig. Pisa. 14 l.

Burkhardt (Heinr.). — *Funktionentheoretische Vorlesungen.* I. Bd. I. Heft. *Algebraische Analysis* (2ᵉ édition). Gr. in-8°, XII-199 p. avec figures. Leipzig, Veit et Cⁱᵉ. 5 m. 60 pf.; relié, 6 m. 60 pf.

Czuber (Eman.). — *Einführung in die höhere Mathematik.* Gr. in-8°, X-382 p. avec 114 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 12 m.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Édit. française. Rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk. Tome I (4ᵉ vol.). *Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses.* Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de François Meyer. Fasc. 2. In-8°, p. 161–320. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 25.

Huygens. — *Œuvres.* T. XI. Travaux mathématiques. In-4°, IV-370 p. Paris, Gauthier-Villars. 23 fr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. Carl Orthmann, hrsg. v. Emil Lampe. 37. Bd. Jahrg. 1906. 2. Heft. Gr. in-8°, p. 485-692. Berlin, G. Reimer. 7 m. 50 pf.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOREL (E.). — Éléments de la Théorie des Probabilités : *Probabilités discontinues, probabilités continues, probabilités des causes.* 1 vol. in-8, VII-191 pages. Paris, Hermann, 1909.

M. Borel a fait récemment, pendant plusieurs semestres, à la Faculté des Sciences de Paris, un cours sur la Théorie des Probabilités; sur ce même sujet, outre quelques Notes d'un caractère philosophique, il a publié, en 1906, dans les *Annales de l'École normale,* un Mémoire *Sur les principes de la théorie cinétique des gaz* et, en 1909, dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* une étude sur *Les Probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.* On sait assez, par d'autres publications, que les subtilités et les jeux de la Logique ne l'effraient nullement : ces jeux ne lui suffisent pas; il est aussi réaliste que logicien. Depuis longtemps, la Théorie des Probabilités le préoccupe, moins peut-être pour son intérêt mathématique que pour la signification de ses principes et l'importance de ses applications : elle intervient partout où il y a des mesures à effectuer; elle est au fond des questions les plus importantes de la Physique moderne; elle est essentielle pour la connaissance des collectivités; elle aidera sans doute à mieux régler les intérêts des groupes sociaux. D'un autre côté, l'étude des éléments de cette théorie contribue assurément à la bonne formation de l'esprit, ne serait-ce qu'en le débarrassant de quelques idées fausses et superstitieuses.

Si l'opinion de M. Borel sur la grande importance de la Théorie des Probabilités est, comme je le crois, parfaitement juste, il faut regretter que cette théorie tienne si peu de place dans notre enseignement; mais il y a une raison pour ne pas la faire figurer, même par ses parties les plus élémentaires, dans les programmes de nos lycées : c'est qu'il en jaillirait bientôt d'innombrables ques-

tions d'examen, extravagantes et captieuses. Sans doute, il est fâcheux que cette théorie soit d'ordinaire complètement ignorée par les jeunes gens qui reçoivent l'enseignement de nos Facultés : il faut toutefois se rendre compte que les professeurs ne peuvent pas tout enseigner et que les élèves ne peuvent pas suivre tous les cours. La vérité est que l'enseignement oral ne doit pas absorber tout le temps des étudiants et que ces derniers doivent prendre l'habitude de demander aux Livres des connaissances qui, pour n'être ni enseignées dans les cours, ni exigées dans les examens, n'en sont pas moins indispensables.

S'il en est ainsi, il faut constituer à leur usage une bibliothèque de Livres où chaque branche spéciale soit reprise à son commencement, où l'on n'emploie pas les mots sans les définir dans les différentes significations qu'ils peuvent avoir, où l'on fasse réfléchir sur les idées essentielles et sur la façon dont elles s'appliquent, des Livres qui ne demandent, pour être compris et appris, ni trop de connaissances, ni trop d'efforts, ni trop de temps, qui se suffisent à peu près à eux-mêmes et suggèrent le désir d'aller plus loin.

Les *Éléments de la Théorie des Probabilités* sont un modèle dans ce genre : en fait de connaissances mathématiques, M. Borel demande à son lecteur de savoir ce qu'est une intégrale définie et d'admettre la formule de Stirling; il a eu la coquetterie de tirer de la théorie même qu'il expose les quelques formules relatives aux combinaisons dont il a besoin : c'est de la réflexion qu'il exige de son lecteur. Si quelque point d'une démonstration lui semble douteux ou suspect, il le dit franchement; il n'esquive jamais les difficultés; il ne cherche pas non plus à les exagérer; il se plaît à résoudre à force de bon sens, mais d'un bon sens très aiguisé, quelques-unes de celles que Joseph Bertrand a mis tant d'esprit à soulever.

M. Borel est un réaliste ; cela apparaît dans l'ordre même qu'il suit, dans les exemples concrets d'où il fait sortir les idées, dans la façon aussi dont il critique les définitions purement logiques, ou plutôt dont il met en évidence les observations et les intuitions qui conduisent à ces définitions logiques.

Le sous-titre du Livre (*Probabilités discontinues, probabilités continues, probabilités des causes*) caractérise les trois Parties dont il se compose.

Dans la première Partie, le jeu de *pile ou face* tient la plus grande place : deux Chapitres, le premier et le quatrième, lui sont consacrés; c'est ce jeu, le plus simple de tous, qui conduit aux définitions, aux idées essentielles et même aux formules fondamentales. Le premier Chapitre, où la définition générale des probabilités (discontinues) n'est même pas donnée, amène admirablement le lecteur à cet état d'esprit où il doit être pour étudier le Calcul des Probabilités. Dans le quatrième, qui a pour titre *Étude approfondie du jeu de pile ou face*, l'auteur introduit la fonction

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

l'unité d'écart, l'écart le plus probable, l'écart probable, l'écart moyen. Après quelques généralisations faciles, dans le Chapitre suivant, la signification de la loi des grands nombres apparaîtra de la façon la plus nette.

La définition de la *probabilité géométrique*, placée en tête du Livre qui traite des probabilités continues, est étudiée avec le plus grand soin. M. Borel met en évidence, avec toute la clarté désirable, le rôle que joue le choix de la variable indépendante et, par là même, le caractère arbitraire, au point de vue logique, d'une telle définition. « Mais, en fait, ce choix est presque toujours imposé d'une manière évidente par les conditions mêmes de la question posée, lorsqu'il s'agit d'une question concrète et non d'une question abstraite, et c'est une simple plaisanterie que de prétendre modifier arbitrairement ce choix par un changement de variable analytique, sans rapport avec la réalité.... Ce choix n'a un sens que si l'on se borne aux problèmes dont l'énoncé est assez précis pour qu'une vérification expérimentale du résultat puisse être tout au moins tentée. » Cette dernière pensée me semble toucher le fond même de la question : M. Borel développe excellemment la signification des mots *vérification expérimentale* et signale quelques-unes des erreurs où il ne faut pas tomber. Il n'a garde d'ailleurs de laisser de côté les remarques profondes de M. Poincaré sur le cas où le résultat final est, dans une large mesure, indépendant de la fonction arbitraire qu'on peut introduire

dans la définition de la probabilité, et les exemples simples qu'il donne sont parfaitement instructifs.

Pour en rester au premier point de vue, aux cas « où la vérification expérimentale peut être tentée », M. Borel a sans doute raison d'apporter une petite restriction à cette affirmation que le choix de la variable indépendante (ou des variables indépendantes) s'impose d'une manière évidente ; il n'aurait pas eu de peine à donner des exemples où quelque esprit de finesse serait nécessaire pour démêler cette variable ou ces variables ; mais des difficultés analogues se rencontrent dans toutes les applications des Mathématiques. Il ne suffit pas de savoir les Mathématiques pour être capable de les appliquer à la réalité : du bon sens, quelque habileté et quelque habitude sont indispensables. Ne méconnaissons pas les difficultés qu'il y a d'ordinaire à mettre les problèmes réels en équation : c'est sur des exemples simples qu'on apprend la *manière de s'y prendre,* et ceux que traite M. Borel sont très bien choisis. Signalons en particulier les problèmes relatifs à la position de points sur la sphère, à la distribution des étoiles, la critique des paradoxes de Joseph Bertrand, l'étude de la distribution des petites planètes sur le zodiaque, celle du mouvement d'un point dans un plan et l'application à la théorie cinétique du gaz.

Un Chapitre est consacré aux erreurs d'observation et à la loi de Gauss : ici encore, c'est sur la signification de cette loi et sur « les raisons simples qui rendent le mieux compte de sa quasi-universalité pratique » qu'insiste M. Borel. L'étude des écarts qu'il a faite dans le premier Livre, à propos du jeu de pile ou face d'abord, puis des tirages de boules dans une urne, lui permet d'expliquer l'existence des séries *normales,* des séries (de mesures) auxquelles s'applique la loi de Gauss ; les notions de *précision* et de *poids* sont exposées avec grand soin.

Le dernier Livre sur la probabilité des causes, ou plutôt des *corrélations,* sera lu avec un vif intérêt. Les quelques problèmes statistiques sur les naissances que traite M. Borel, cette notion du *schéma des urnes* constituées de façon que le Tableau des tirages coïncide vraisemblablement avec un Tableau d'observations statistiques, les applications biométriques qui ouvrent une fenêtre sur les recherches de F. Galton, de M. Pearson et de ses élèves,

les questions que soulèvent la simplicité ou la complication des poids atomiques, tout cela est très suggestif; on sera particulièrement frappé de la façon lumineuse dont l'auteur arrive à poser les problèmes.

Le Livre de M. Borel mérite vraiment le nom d'*Éléments* qu'il lui a donné : il contient bien les éléments avec quoi sont constituées, en quoi se résolvent les diverses théories qui se rapportent aux probabilités. Bien des lecteurs seront désireux de dépasser ces éléments et souhaiteront que l'auteur veuille bien continuer à les guider.

J. T.

HEATH (T.-L.). — THE THIRTEEN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS TRANSLATED FROM THE TEXT OF HEIBERG, WITH INTRODUCTION AND COMMENTARY. Cambridge, University Press, 1908; 3 volumes grand in-8°.

1. On sait qu'en Angleterre les *Éléments* d'Euclide tiennent depuis longtemps une place considérable dans l'enseignement mathématique. Il ne faut donc pas s'étonner qu'il ait paru dans ce pays de très nombreuses traductions de l'Ouvrage classique du célèbre géomètre grec. Si l'on veut s'en convaincre, on n'a qu'à ouvrir le *Catalogue of printed Books* du British Museum; on y trouvera plusieurs pages à deux colonnes in-4° consacrées aux éditions et traductions anglaises d'Euclide qui sont conservées dans ce grand établissement scientifique. Pour s'en tenir ici aux traductions, les unes portent sur l'ensemble du texte des *Éléments,* les autres n'en reproduisent que certains Livres; il en est de celles-ci qui ont un caractère simplement pédagogique, comme, par exemple, celle de H.-M. Taylor, *Euclid's elements of Geometry,* Books I-IV, Cambridge, at the University Press, 1891, dans la *Pitt press mathematical series;* il en est d'autres qui s'adressent à un public supérieur : telle est la publication de J.-M. Hill, *The contents of the fifth and sixth Books of Euclid, arranged and explained,* Cambridge, University Press, 1900. L'objet de cet Ouvrage, dit l'auteur dans sa Préface, est de résoudre les difficultés principales que rencontrent ceux qui veulent approfondir les Livres susdits d'Euclide.

C'est encore des presses de l'Université de Cambridge que vient de sortir une publication très importante consacrée aux *Éléments* d'Euclide, dont nous avons transcrit le titre en tête de cet article. Elle est due à M. T.-L. Heath, le très distingué fellow de Trinity college de Cambridge, et elle mérite d'attirer l'attention des mathématiciens.

I.

2. L'auteur a placé en tête de son Ouvrage une longue et très savante Introduction (p. 1-151), dans laquelle il étudie d'abord ce que nous savons d'Euclide ([1]) et de la tradition euclidienne depuis l'antiquité jusqu'au Moyen Age et à la Renaissance. Les *Éléments*, qui devinrent classiques presque aussitôt après leur apparition, — Archimède les a cités, — devaient ce succès mérité à la rigueur logique, à la clarté remarquable de l'exposition, à l'enchaînement solide des propositions qui témoignaient d'une méthode profondément éprouvée. Constatons en passant qu'en ce qui concerne les six premiers Livres relatifs à la Géométrie plane, on sait que la principale différence qu'ils offrent pour l'ordre des matières, avec les Ouvrages élémentaires maintenant suivis en France, consiste en ce qu'Euclide ne fait intervenir la notion de rapport et la théorie des proportions (Livre V) que pour traiter des figures semblables (Livre V) et qu'il démontre, indépendamment de ces notions, toutes les propriétés dans l'énoncé desquelles elles ne figurent pas. Pour ce qui est des Livres VII à X, qui sont consacrés aux propriétés des nombres et à la théorie des irrationnelles (*voir* Livre V), on n'ignore pas que, quelque grande que soit la valeur d'Euclide, cette partie de son Ouvrage a fort vieilli, et, pour le fond, en raison de l'extension de la notion des incommensurables, et pour la forme, à cause de ce que l'appareil géométrique peut y avoir de lourd. Quant aux Livres XI à XIII (Stéréométrie), on sait qu'on n'y voit développée que la partie qui concerne la mesure des parallélépipèdes, prismes et pyramides, les rapports des volumes des cônes, cylindres et sphères, et la

---

([1]) D'un passage de Proclus, qui vivait au ve siècle après J.-C., on peut inférer que la vie d'Euclide se place chronologiquement entre l'époque des premiers disciples de Platon, mort en 347 avant J.-C., et celle d'Archimède, qui vivait entre 287 et 212, c'est-à-dire qu'Euclide est contemporain de Ptolémée Ier (306-283).

construction des cinq polyèdres réguliers. On a constaté une moins parfaite rigueur dans l'exposé de ces matières stéréométriques.

Après avoir parlé de la tradition euclidienne, M. Heath résume dans son *Introduction*, d'après les sources et les commentateurs anciens et modernes, ce que l'on sait des écrits d'Euclide autres que ses *Éléments*. Il mentionne d'abord les *Pseudaria*, d'après Proclus, Ouvrage perdu, qui était en connexion avec les *Éléments*, et ne devait pas sortir du domaine de la Géométrie élémentaire; puis les *Données* (*data*, δεδομένα) que Pappus a insérées et résumées dans son Recueil, Ouvrage qui forma plus tard l'introduction classique à l'étude de l'Analyse géométrique; le Traité des *Divisions des figures*, qui ne nous est point parvenu dans le texte grec (περὶ διαιρέσεων βιβλίον), mais dans une traduction arabe, étudiée par Woepcke; les trois Livres des *Porismes*, dont la restitution a donné lieu à de célèbres discussions; les deux Livres de *Lieux en surface* (¹) (*loci*, τόποι πρὸς ἐπιφανεια), où Euclide, a-t-on dit, ne devait considérer vraisemblablement comme lieux à deux dimensions d'autres surfaces que le plan et celle des trois corps ronds; les quatre Livres des *Coniques*, Ouvrage perdu, peut-être déjà à l'époque de Pappus; les *Phænomena*, œuvre astronomique qui a survécu; enfin le Livre de l'*Optique*, édité assez récemment par M. Heiberg. Nous n'avons pas à parler ici d'un autre écrit d'Euclide, relativement à la musique, écrit dont l'authenticité est très douteuse et que Paul Tannery a cru devoir rejeter (²).

La suite de la substantielle Introduction qu'a écrite M. Heath comprend deux Chapitres qui sont consacrés, l'un aux commentateurs grecs des *Éléments* autres que Proclus, à savoir Héron, Porphyre, Pappus et Simplicius, l'autre à Proclus et à ses sources. Vient après un Chapitre fort érudit sur le texte d'Euclide, où M. Heath, après avoir mentionné la première traduction anglaise d'Euclide, celle de Simson (1756), passe en revue les manuscrits utilisés par le savant M. Heiberg dans sa remarquable édition de

(¹) *Voir* à ce sujet une restitution proposée par le regretté P. Tannery dans le *Bulletin des Sciences math. et astron.*, 2ᵉ série, t. VI, p. 149 (HEATH, *Introduction*, nᵒ 4, p. 15).

(²) *Introduction*, nᵒ 8, p. 17.

1883, et il a ainsi l'occasion de parler des manuscrits de Théon d'Alexandrie, qui vivait environ au IVe siècle après J.-C. M. Heath entre lui-même dans la critique du texte et discute de près divers points fort intéressants à propos de l'édition Heiberg. Du texte d'Euclide, M. Heath passe aux *Scholies* du même, objet d'une étude approfondie du même savant danois. Non moins érudit est le Chapitre qui suit, où les textes arabes d'Euclide sont étudiés longuement et où nous retrouvons souvent cités les noms d'Heiberg, de Wœpcke, joints à ceux de Klamroth (1), Steinschneider, sans omettre celui de Suter qui s'impose en cette matière tout particulièrement.

Le Chapitre suivant de cette Introduction à la fois historique et critique, si bien documentée, est nettement bibliographique. Il concerne les principales éditions et traductions des *Éléments*. L'auteur part de la fin de l'antiquité latine (2) et, aidé des recherches de MM. Moritz Cantor, Weissenborn et Max. Curtze, et de celles toutes récentes de M. Björnbo, il rappelle les travaux auxquels ont donné lieu les traductions de textes euclidiens ou dérivés d'Euclide, en arabe et en latin, au Moyen Age, puis à la Renaissance, enfin dans les temps modernes jusqu'à nos jours. D'un tout autre caractère est le dernier Chapitre de l'Introduction, où l'auteur étudie, au point de vue de la logique, la constitution des *Éléments*, les définitions, postulats, axiomes, les théorèmes et les problèmes, les propositions et leurs divisions formelles, les lemmes et porismes, la réduction à l'absurde, l'analyse et la synthèse, toutes choses qui renvoient à chaque instant le lecteur, d'une part à Aristote (*Metaph. et Anal. prior. et poster.*) ainsi qu'à Proclus, et, d'autre part, aux remarques critiques d'Heiberg,

(1) Rappelons ici que, tandis que Klamroth incline à donner la préférence à la traduction arabe touchant la tradition d'Euclide, Heiberg a conclu d'une façon générale à la supériorité de la tradition grecque.

(2) M. Heath, qui mentionne (p. 92) à propos d'Euclide les *Institutiones* de Cassiodore, semble ignorer l'édition critique et le commentaire détaillé de la *Géométrie* de Cassiodore (où nous avons traité la question de la traduction d'Euclide en latin) que nous avons publiés sous le titre suivant : *Note sur le texte des* INSTITUTIONES *de Cassiodore d'après divers manuscrits, recherches critiques sur la tradition des Arts libéraux de l'antiquité au Moyen Age* (Paris, Klincksieck, 1904, extrait, avec additions, de la *Revue de Philologie, de Littérature et d'Histoire anciennes,* avril et juillet 1900, janvier, avril et octobre 1903). Qu'il nous permette de le lui signaler dans notre Compte rendu.

Moritz Cantor, Paul Tannery, etc., à propos des termes ou des concepts de la logique antique appliquée aux *Éléments* de Géométrie.

II.

3. Arrivons maintenant à la méthode suivie par M. Heath dans la publication de sa traduction d'Euclide et dans l'exposé des matières de Géométrie qui y sont contenues. Pour chaque Livre, il fait suivre les différents paragraphes du texte d'Euclide des commentaires les plus variés, qu'il a empruntés soit aux auteurs et critiques anciens, soit aux commentateurs ou aux géomètres modernes et contemporains. On peut suivre ainsi, dans bien des cas, l'évolution de la pensée mathématique en ce qui concerne tel ou tel exposé géométrique, se rattachant à un texte qu'on a constamment sous les yeux et sans qu'on perde de vue dans quelles séries d'idées peuvent se ranger historiquement les discussions théoriques auxquelles il a donné naissance. On voit combien cette façon de procéder dans l'analyse du texte d'Euclide, à la fois très précise et variée, devient ainsi suggestive; car l'auteur, qui sait se mouvoir avec aisance dans un vaste domaine historique et bibliographique, aboutit très souvent par la nécessité même de ses commentaires aux théories modernes et contemporaines; et les mathématiciens, auxquels il rend ainsi bien des services, lui en sauront gré.

Si, dans certains cas, par exemple, au sujet de la définition 5 du Livre I d'Euclide, qui est relative à une surface, M. Heath s'en tient aux commentaires des anciens, à ceux de Platon, d'Aristote et de Proclus, à la classification d'Héron, il n'en est pas de même de la définition 7, concernant la surface plane où, après avoir exposé les remarques des anciens à ce sujet, il énumère celles de Gauss et de Crelle, de Fourier, de Deahna et de Becker, celles de Bolyai et de Lobatchewsky, jusqu'à celles d'Enriques et d'Amaldi. Il en est de même pour les définitions 8 et 9 qui sont relatives aux angles, au sujet desquelles il donne les informations bibliographiques les plus récentes. Prenons maintenant le postulat d'Euclide : « Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits... » On sait à combien de Mémoires ce postulatum a donné naissance;

on en trouverait le relevé dans Riccardi (*Saggio di una bibliografia Euclidea*, Bologne, 1890), et des indications complémentaires plus récentes dans l'Ouvrage de Max Simon (*Ueber di Entwicklung der Elementar Geometrie im XIX Jahrhundert*, 1906). Après les noms d'auteurs anciens, tels que ceux de Proclus et de Ptolémée, dont M. Heath cite l'autorité, nous trouvons encore citées par lui les observations de Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, parmi les modernes, sans compter celles d'un grand nombre de mathématiciens du siècle dernier. Passant ensuite aux axiomes dits d'*Euclide*, M. Heath suit une marche analogue, et va de là aux axiomes post-euclidiens, au principe de continuité, au postulat de Dedekind et à ses applications. Il est amené à parler des systèmes de Géométrie où le postulat d'Euclide est supposé faux, des édifices logiques construits par Lobatchewsky et Riemann, des groupes d'axiomes d'après la répartition de M. Hilbert, sans omettre le système d'Helmholtz qui a essayé de montrer que les propositions de la Géométrie euclidienne n'étaient autres que les lois des mouvements des corps solides, celles des autres géométries étant celles que pourraient suivre d'autres corps analogues aux corps solides dont l'existence pourrait être conçue sans qu'il en résultât la moindre contradiction, lois telles toutefois qu'elles ne peuvent être regardées comme expérimentales ([1]).

M. Heath a aussi placé en tête de certains Livres des *Éléments* une Introduction spéciale à ces Livres pour faire ressortir tout l'intérêt qui s'y rattache. C'est ainsi qu'il a cru devoir faire pour le Livre X, à propos de la doctrine de l'incommensurable dans l'antiquité depuis Pythagore, en passant par Théétète d'Athènes et Proclus, puis au Moyen Age avec Léonard de Pise, à la Renaissance avec Pacinolo et Cardan, plus tard avec S. Stevin, enfin avec Wœpcke, relativement à un commentaire du Livre X découvert dans un manuscrit arabe. L'étude de ce même Livre se termine par des observations sur l'extension diverse que reçut, notamment d'Apollonius, la doctrine d'Euclide contenue dans cette partie de son Ouvrage.

([1]) *Voir* H. Poincaré, *Les fondements de la Géométrie*, dans le *Journal des Savants*, 1902, p. 252 et suiv.; *cf.* du même, *Rapport* sur les travaux mathématiques de M. Hilbert au sujet du prix Lobatchewsky, dans le *Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan*, 2ᵉ série, t. XIV, 1904, p. 10-48.

4. Nous pensons qu'il serait superflu de donner d'autres exemples de la manière de procéder dont M. Heath se sert dans son commentaire d'Euclide. Nous n'avons pas à entrer ici dans un examen plus détaillé; nous signalerons seulement deux précieux Index d'ensemble qui terminent le troisième et dernier Volume de l'Ouvrage de M. Heath, à savoir : 1° un Index technique des termes spéciaux et des formes grecques; 2° un Index général des matières et des noms d'auteurs anciens et modernes qui sont cités par M. Heath. Ces répertoires sont appelés à rendre de réels services aux mathématiciens ainsi qu'aux historiens des Mathématiques.

Enfin, qu'il nous soit permis, en jetant un coup d'œil d'ensemble sur tant de résultats obtenus par la science géométrique, ancienne et moderne, dont il est fait mention dans l'Ouvrage que nous avons analysé, de rappeler ici ce que vient d'écrire tout récemment, avec beaucoup de justesse, un savant historien des Sciences au sujet de la reproductivité des fruits de l'ancienne mathématique : « Un problème qui occupe particulièrement les mathématiciens du xxe siècle, c'est la question de la base logique des Mathématiques, et en particulier de nos notions géométriques, ce qui est en même temps la question des conditions auxquelles doit satisfaire une démonstration mathématique pour être exacte.... Le travail accompli par les modernes pour la résoudre a reçu beaucoup d'impulsions de l'antiquité; mais, de même que nous l'avons vu pour les recherches infinitésimales, on est le plus souvent trop occupé de son propre travail pour remarquer cette influence.... La croissance de la Science se fait, non seulement *par*, mais *dans* des hommes vivants. Ceux-ci ont besoin, non seulement d'apprendre par cœur, mais d'assimiler et même de reproduire ce qui pourra leur servir de point de départ pour des progrès ultérieurs. Pour cela, ils ont moins besoin de résultats tout prêts et complets transmis par leurs prédécesseurs que des pensées et des impulsions fécondes qu'ils ont reçues en même temps que les résultats [1] ».

VICTOR MORTET.

---

[1] Nous empruntons ces quelques lignes à une brochure de M. H.-G. Zeuthen, de l'Université et de l'Académie des Sciences de Copenhague, et qui a pour titre : *Quelques traits de la propagation de la Science de génération en génération*. Elle est extraite de la *Rivista di Scienze* de Bologne (t. V, an. III, 1909, n. IX, 1) et elle reproduit un discours du même qui a été prononcé à la fête annuelle de l'Université de Copenhague, en 1907.

É. JOUGUET. — Lectures de Mécanique. La Mécanique enseignée par les auteurs originaux. Première Partie : *La naissance de la Mécanique.* Deuxième Partie : *L'organisation de la Mécanique.* 2 vol. in-8. Paris, Gauthier-Villars, 1908-1909.

Voici un Ouvrage dont le titre surprendra quelque peu et scandalisera peut-être certaines personnes versées dans l'étude de la Mécanique ; la surprise et le scandale eussent été bien plus généraux et bien plus vifs il y a quelques années seulement, alors que les mécaniciens avaient, bien moins qu'aujourd'hui, pénétré la véritable nature de la doctrine qu'ils cultivent.

Que l'on recueille des morceaux choisis des écrits de littérateurs français, cela va de soi. Que serait une histoire de la Littérature française, réduite à la nomenclature des auteurs, à l'énumération de leurs œuvres, aux dates des événements qui ont signalé leur vie? Rien assurément. Les faits divers dont la suite forme l'existence d'un poète ne nous intéressent que par l'influence qu'ils ont exercée sur les sentiments de l'homme et, par là, sur les vers où ces sentiments se sont exprimés ; si nous n'avons pas lu ces vers, si notre cœur n'a pas battu à l'unisson du cœur qui les a chantés, que nous importent les circonstances en lesquelles ils furent produits? Dans le domaine de la littérature ou de l'art, la connaissance des réalités concrètes, des faits, serait sans valeur si elle ne nous aidait à communier aux sentiments du littérateur ou de l'artiste, car ces sentiments sont tout.

Que l'on compose des lectures d'Histoire, rien de mieux. Il nous importe extrêmement de savoir ce qu'ont pensé d'un fait historique ceux qui en furent les acteurs ou les témoins immédiats. Assurément, les pensées et les sentiments qui ont agité ces hommes ne sont pas toute l'Histoire ; le fait historique subsiste en lui-même ; au cours des temps, il déroulera ses conséquences que, bien souvent, les auteurs de ce fait n'auront pas voulues, que les témoins n'auront pas prévues. Mais l'Histoire ne s'explique que par l'action des événements extérieurs sur les sentiments des hommes et par la réaction de la volonté et des passions humaines sur les choses. La série des faits historiques, séparée de ce qu'ont pensé et éprouvé ceux qui ont produit les faits ou qui les ont subis, n'est plus l'Histoire ; elle n'en est que le squelette.

Ce que nous venons de dire de la série des faits historiques, serait-il sensé de le répéter de la série des propositions qui forment une science exacte, telle que la Mécanique? Ces propositions n'expriment-elles pas des vérités, c'est-à-dire des choses dont l'existence est absolument indépendante de l'esprit qui les conçoit? N'est-ce pas ce caractère impersonnel, indifférent aux pensées et aux sentiments des hommes qui les ont découverts, qui assure aux principes de la Mécanique leur valeur scientifique ?

Si, au jugement de la Science, les vérités sont tout, si les hommes qui les ont reconnues ne sont rien, à quoi bon s'enquérir de la forme sous laquelle ces hommes ont présenté leurs trouvailles? Assurément, l'énoncé de quelque principe important de Mécanique ou de Physique éveillera parfois notre curiosité; nous désirerons connaître le nom de l'auteur de ce principe, l'époque où il vivait, le titre de l'Ouvrage où il a consigné son invention; cette curiosité est, après tout, légitime; on ne saurait trouver mauvais que certains hommes, par leurs patientes recherches, s'efforcent de la satisfaire; il y a, sur terre, des gens qui perdent leur temps de plus sotte et plus méchante façon que les historiens de la Science. Il n'en est pas moins vrai que l'histoire de la Science n'est pas de la Science. L'astronome qui attribuerait à Ptolémée ou à Copernic la découverte de la gravitation universelle en serait-il moins apte à perfectionner la théorie de la Lune? Et n'est-ce pas avec infiniment de raison qu'aucune Faculté des Sciences n'a jamais, du moins en France, songé à s'enrichir d'une chaire d'Histoire des Sciences ?

S'il en est ainsi, il nous faut, je pense, traiter de fantaisie de dilettante les *Lectures de Mécanique* qu'a recueillies M. É. Jouguet; son projet de faire enseigner la Mécanique par les auteurs originaux nous doit sembler une habile gageure, assez semblable à cette autre qu'on tente, m'a-t-on dit, en l'enseignement secondaire de je ne sais quelle contrée : Enseigner la Géométrie et la Mécanique par l'étude de la bicyclette !

Nous possédons des Traités de Mécanique d'une rédaction merveilleusement achevée, où les principes de la Science sont formulés avec autant de clarté que de précision, où les problèmes les plus divers, classés en un ordre parfait, se résolvent de la manière la plus régulière et la plus aisée; et l'on nous propose

d'abandonner ces Traités pour lire de vieux écrits où les vérités de la Statique et de la Dynamique commencent à peine d'apparaître, où elles percent malaisément une croûte épaisse et dure d'antiques erreurs ! Allons-nous remplacer les pièces d'or ou d'argent, sonnantes et trébuchantes, par de grossiers cailloux où le métal précieux se dissimule sous une gangue massive ?

Sans doute, on eût ainsi raisonné naguère, et le raisonnement eût été logique; universellement alors, on regardait la Science physique comme un ensemble de vérités indépendantes de l'homme que l'esprit humain découvrait les unes après les autres, mais auxquelles il n'ajoutait rien qui fût sien; tout ce qu'il eût tiré de son propre fonds pour l'adjoindre à la vérité objective eût été justement réputé erreur ou hypothèse gratuite.

Que les rapports entre l'homme et la Science soient aussi simples, on ne le pense plus guère, du moins parmi ceux qui ont le pouvoir et le loisir de méditer; pour trouver des adeptes d'une telle doctrine, il les faudrait chercher parmi ceux qui reçoivent toutes faites les idées conçues par d'autres, et qui continuent de s'en parer, alors que les gens mieux informés les tiennent depuis longtemps pour démodées.

Aujourd'hui, tous ceux qui ont réfléchi à la nature de la Science physique ont cessé d'y voir un ensemble de vérités purement objectives reçues d'une manière passive en l'intelligence de l'homme; ils y voient un système, construit par l'activité de l'esprit humain, afin de classer et d'organiser les vérités objectives que découvre l'observation. En face de la réalité, la raison humaine ne demeure pas inerte ; elle n'est pas semblable à la plaque photographique qui conserve en elle tous les détails de l'impression reçue, avec une fidélité que garantit son indifférence; elle est semblable au peintre qui interprète ses perceptions, qui choisit, qui simplifie, qui compose, en sorte que le tableau sorti de ses mains est proprement son ouvrage et non pas l'ouvrage du paysage étendu devant ses yeux. La théorie physique est œuvre d'art; comme toute œuvre d'art, elle ne peut être pleinement comprise par celui qui n'a pas pénétré les sentiments et les pensées de l'artiste.

Cette œuvre d'art, d'ailleurs, est œuvre collective. Aucune théorie de Mécanique ni de Physique n'est sortie, achevée, des mains d'un seul inventeur. La perfection en laquelle nous l'admi-

rons a été obtenue par un travail compliqué, et maintes fois repris, d'additions, de remaniements, de retouches.

Deux sortes de causes ont nécessité ces retouches. Certains remaniements de la théorie ont été rendus indispensables par une connaissance plus parfaite de la réalité objective; d'autres ont été requis par des exigences nouvelles de la raison humaine.

Lorsque l'artiste a commencé de peindre le paysage exposé à sa vue, la brume du matin n'était pas encore dissipée; elle voilait les lointains, elle noyait les détails, elle estompait les silhouettes des objets principaux, elle en faussait les proportions; aussi la première esquisse était-elle incomplète, simplifiée à l'excès, partout imprécise, souvent inexacte. Au fur et à mesure que le Soleil est monté dans le ciel, le brouillard est devenu plus transparent; peu à peu, il s'est déchiré et dissipé, ouvrant à la vue de plus lointaines perspectives, découvrant des détails jusqu'alors insoupçonnés, accusant les contours des choses, leur rendant leur vraie grandeur et leur place exacte; d'instant en instant, le paysage s'est manifesté plus parfaitement; l'ensemble s'est offert d'une manière plus complète à la contemplation en même temps que chaque détail en a été plus vivement éclairé; sans relâche, alors, le peintre a repris les parties déjà traitées de son tableau pour y détailler de nouvelles formes, pour y faire briller de nouvelles lumières.

Ainsi en a-t-il été des théories de la Mécanique et de la Physique. Des moyens d'observation fort grossiers ont permis, tout d'abord, de saisir quelque chose de la réalité objective; mais ce quelque chose était étrangement incomplet, imprécis, inexact; incomplètes, donc, imprécises et inexactes furent les premières théories; puis les procédés d'expérimentation se sont perfectionnés, les instruments sont devenus plus puissants et plus délicats; des vérités nouvelles ont apparu; d'autres, déjà connues, ont été définies avec plus de netteté, analysées avec plus de détails; pour analyser et classer ces renseignements, plus nombreux et plus exacts, touchant la réalité objective, la théorie a dû sans cesse agrandir ses cadres, en changer la forme et la disposition.

Les modifications exigées par les progrès de la connaissance expérimentale ne sont pas les seules que la théorie mécanique ou physique ait éprouvées; elle en a subi d'autres que réclamaient, non plus l'accroissement des vérités connues, mais les variations de la méthode employée pour classer ces vérités.

Un peintre qui eût vécu pendant des siècles et qui eût reproduit maintes fois le même paysage nous eût assurément donné une foule de tableaux bien différents les uns des autres; au début du XVe siècle, sa miniature eût présenté la fraîcheur et la naïve minutie où nos vieux ymagiers excellaient; au XVIIe siècle, ses rochers et ses arbres se fussent dressés avec la précision calme et majestueuse que Poussin savait leur donner, ou bien encore ils se fussent dorés aux rayons d'un soleil couchant emprunté à Claude Lorrain; au XIXe siècle, la brume imprécise, chère à Corot, les eût noyés de ses mystérieuses grisailles. Placé en présence du même modèle, le sens artistique du peintre, lentement modifié par les ans, eût senti d'autre manière le charme d'une nature aux contours immuables; d'une même réalité, il eût conçu un idéal sans cesse changeant, et ses paysages successifs, également parfaits peut-être, mais d'autre façon, eussent entièrement différé les uns des autres.

La Mécanique ressemble à l'œuvre de ce peintre.

Dès le temps d'Aristote, l'esprit humain s'est efforcé de recueillir le plus grand nombre possible de vérités relatives à l'équilibre et au mouvement des corps; dès cette époque, il a tenté de les coordonner en un système logique qui fût une Mécanique rationnelle; mais à ce système il n'a pas toujours imposé le même plan; pour en construire les cadres, il n'a pas toujours employé des matériaux de même nature; il a donc successivement logé les mêmes vérités objectives en des Mécaniques rationnelles différentes.

Prenons, par exemple, une des vérités les plus anciennement connues de la Statique, la loi d'équilibre du levier; cette loi invariable, l'esprit humain ne la verra pas toujours de la même manière, parce que la science idéale en laquelle il l'incorpore ne sera pas toujours, pour lui, de même nature; successivement métaphysicien, positiviste ou purement nominaliste, il emploiera, pour construire la théorie du levier, le *procédé métaphysique,* le *procédé expérimental* ou le *procédé formel*. Citons ici la page, si profondément pensée, où M. É. Jouguet caractérise ces trois procédés (1) :

« Archimède parle des graves égaux sans les définir. Nous ren-

(1) É. JOUGUET, *Op. laud.,* 1re Partie, Note VII, p. 7-9.

contrerons bien souvent une manière de faire analogue. C'est donc ici le lieu de présenter quelques considérations générales sur les procédés par lesquels l'esprit humain construit une science physique.

» Au début, l'esprit conçoit un certain nombre d'idées vagues, qui lui sont fournies par l'observation et l'expérience, dont il élabore plus ou moins les résultats. Ces idées vagues sont donc à la fois des produits de la nature des choses et de la nature de l'esprit. D'ailleurs, l'esprit humain ayant été façonné par les choses, une partie de l'apport de l'esprit peut, en dernière analyse, remonter également au monde extérieur. Mais il peut, et même il doit aussi y avoir, dans ces idées, quelque chose de propre à l'esprit et à ses formes. C'est aux philosophes criticistes à faire le départ. Pour nous, il nous suffit, pour affirmer la double influence du monde extérieur et de l'esprit humain, que les idées vagues conçues par l'intelligence, à propos d'un objet extérieur, aient leur origine non seulement dans des expériences portant directement sur ledit objet, mais encore dans des conceptions de l'esprit, que ces conceptions de l'esprit soient *a priori* ou qu'elles découlent d'expériences faites sur d'autres objets. Dans le cas particulier qui nous occupe ici, l'idée vague conçue par Archimède est l'idée de *graves égaux*.

» On admet, dans la Science moderne, que ces idées vagues doivent être reconstruites avec précision par des *définitions*. En matière physique, les meilleures définitions sont celles qui reposent sur des expériences. Il faut imaginer des expériences, vérifier ce qu'elles donnent et traduire leurs résultats par des définitions et des lois. Ici, par exemple, voici comment on peut modifier le mode d'exposition d'Archimède. On lira les demandes et les propositions I et II en ayant dans l'esprit qu'Archimède étudie, selon la remarque de Peyrard, des surfaces ou des solides remplis d'une même matière homogène, dont la gravité, par conséquent, se mesure naturellement par leur aire ou par leur volume. Cela fait, on imaginera, après la proposition II, la *définition* suivante : « Pour les graves hétérogènes, nous dirons qu'ils sont égaux si » suspendus à des longueurs égales, ils sont en équilibre, inégaux si, suspendus à des longueurs égales, ils ne sont pas en équilibre. » Pour que cette définition soit acceptable, il faut que soient

remplies les conditions suivantes : 1° deux graves quelconques en équilibre ou non en équilibre sur un levier à bras égaux sont encore en équilibre ou non en équilibre sur un levier à bras plus longs; 2° deux graves équilibrant un troisième s'équilibrent entre eux (c'est là une condition imposée par l'esprit à la notion d'égalité); 3° si deux graves s'équilibrent, en enlevant une partie du premier, ils ne s'équilibrent plus et le second s'abaisse. On admettra ces trois propositions comme une extension expérimentale des demandes.

» Quand l'esprit suit cette voie, nous dirons qu'il adopte le *procédé expérimental*.

» La nécessité des définitions est une idée moderne, une idée de science avancée. Les premiers chercheurs ne la voyaient pas aussi nettement que nous. Encore aujourd'hui, il n'est pas rare de la voir sacrifiée, au début d'une science nouvelle. L'esprit humain procède alors comme ici Archimède. L'idée vague de *graves égaux*, il l'adopte comme claire sans la préciser par une définition, et il raisonne avec elle. Si cette idée a été bien choisie, si elle est bien conforme à la nature des choses, les raisonnements ainsi conduits ont beau, au point de vue logique, pêcher par la base : ils sont exacts et utiles. Le mérite du savant a résidé dans le choix heureux de sa notion primordiale. Une telle adoption d'une idée vague comme idée précise est favorisée par la tendance réaliste de l'esprit. Le savant a donné un nom à une idée vague; et tout de suite, sous ce nom, il voit une réalité, nous dirions presque une substance. Aussi appellerons-nous ce procédé de l'esprit le *procédé métaphysique*.

» La reconstruction précise d'une notion vague par une série d'expériences *directes* est parfois impossible. On peut néanmoins conserver cette notion sans avoir recours au procédé métaphysique en employant ce que nous appellerons le *procédé formel*. On remplace la notion physique vague par un être abstrait, défini *more geometrico* : c'est une reconstruction logique et non plus expérimentale. Entre les êtres abstraits ainsi créés, on pose, par convention, des relations qui sont une expression plus ou moins approchée, plus ou moins dénaturée, des idées vagues qu'on se fait des choses, mais qui sont logiquement arbitraires : ces relations sont ce que M. Poincaré appelle des *principes*. On constitue ainsi

un langage logique, un moule qui, s'il est habilement construit, pourra servir à représenter les faits. Ici, par exemple, on pourrait interpréter comme suit le développement d'Archimède : « Je fais » correspondre à chaque grave un nombre λ que j'appelle *gran-* » *deur de ce grave,* et je pose en principe que deux graves ayant » même λ sont en équilibre aux extrémités des bras égaux d'un » levier, que deux graves, au contraire, ayant des λ différents, ne » sont pas en équilibre dans ces conditions, le grave de plus grand λ » s'abaissant. » Le procédé expérimental pur s'interdirait de parler du nombre λ avant de montrer comment on peut l'obtenir par des expériences. Le procédé formel accepte de tirer quelques conséquences logiques des conventions précédentes, de constituer une théorie des graves et des leviers *abstraits,* avant de vérifier par l'expérience que cette théorie peut servir à représenter les propriétés des leviers *réels;* il recule la vérification expérimentale.

» L'analyse des notions de force et de masse nous montrera plus clairement que l'exemple actuel de la théorie du levier ces divers procédés de l'esprit.

» Une science achevée ne peut admettre comme valables que le procédé expérimental et le procédé formel. Le procédé métaphysique doit en être éliminé. Il n'est pas douteux toutefois que, bien souvent encore, le savant l'emploie involontairement, et il peut être utile comme moyen de découverte.

» Remarquons, d'ailleurs, que l'esprit mélange en général ces divers procédés de raisonnement; nous ne les avons distingués que par une analyse un peu artificielle. Il arrive souvent qu'on reconstruit expérimentalement une notion vague, au début d'une théorie, en imaginant des expériences simples, assurément possibles, mais au fond difficiles à exécuter, qui n'ont jamais été exécutées en fait et dont on postule les résultats; on réserve la vérification expérimentale réelle pour des conséquences plus ou moins lointaines de la théorie. C'est ainsi que la loi de l'égalité de l'accélération de la pesanteur pour tous les corps ne se vérifie guère directement; mais on en vérifie une conséquence, l'indépendance de la durée d'oscillation des pendules vis-à-vis de la matière constituant ces pendules. Une semblable manière de faire est intermédiaire entre le procédé expérimental et le procédé formel.

A la vérité, il paraît impossible, dans une science quelconque, de ne pas mélanger ces deux procédés. »

M. Jouguet vient de nous montrer comment une même notion, celle de graves égaux, comment une même loi, celle du levier, se revêtent, avant de pénétrer dans la théorie mécanique, de voiles tout différents, au gré des exigences de celui qui les y introduit.

Et n'allons pas nous imaginer qu'en un même temps, tous les mécaniciens aient les mêmes exigences. Les peintres d'une même époque ne se réclament pas tous d'une même esthétique. De même, des physiciens contemporains ne conçoivent pas tous de la théorie le même idéal.

De nos jours, par exemple, on trouverait sans doute peu de mécaniciens prêts à accorder leurs préférences au procédé métaphysique; encore n'est-ce pas chose absolument assurée. En revanche, bon nombre de physiciens refuseraient leurs suffrages à une théorie qui n'userait pas exclusivement du procédé expérimental, qui ferait le plus léger emprunt au procédé formel. Ainsi eût fait G. Robin, dont M. Jouguet a été, en quelques-uns de ses travaux, le très heureux continuateur : « La Science que nous ferons, disait G. Robin ([1]), ne sera qu'une combinaison d'inductions simples, suggérées par l'expérience. Quant à ces inductions, nous les formulerons toujours en énoncés faciles à retenir, *susceptibles de vérification directe.* » D'autres, et nous en sommes, veulent que la théorie physique élimine tout ce qui n'est pas construit par le procédé formel; ce que ce procédé a servi à édifier leur semble seul assez ferme pour défier les attaques de la Logique. Entre les tenants de ces deux partis extrêmes, il est des éclectiques qui gardent un moyen terme, et M. Jouguet vient de nous déclarer qu'il est de ceux-là. Avec les mêmes vérités objectives, des esprits aussi divers vont, c'est bien clair, produire des Mécaniques fort nombreuses et fort différentes les unes des autres.

Les Mécaniques construites en même temps par divers théoriciens pourront encore différer les unes des autres pour une autre raison.

De ce que deux peintres se réclament de la même esthétique, il n'en résulte pas que du même paysage ils vont tirer le même

---

([1]) G. Robin, *Thermodynamique générale,* Introduction, p. xii.

tableau. En ce paysage, ce n'est pas le même objet qui semble à tous deux l'objet le plus important, celui qui mérite plus que tout autre de retenir le regard, celui qui doit occuper le centre de la toile. Ils ne choisiront pas tous deux le même point de vue. Ils peindront les mêmes choses, mais ils ne les verront pas au même plan ni du même côté; traitant ainsi le même modèle, et selon les principes d'une même École, ils produiront cependant deux œuvres qui ne se ressembleront pas.

Ainsi en est-il de la Mécanique. Deux auteurs peuvent s'accorder au sujet des règles qui doivent diriger la construction de cette science; ils peuvent s'entendre sur la part qu'il convient d'accorder au procédé métaphysique, au procédé expérimental, au procédé formel; et cependant le premier peut souhaiter de mettre en façade telle notion, tel principe, qui retient particulièrement son attention, tandis que le second consent à reléguer cette notion ou ce principe pour mettre en complète évidence telle autre notion, tel autre principe qui le séduit davantage; alors, avec les mêmes matériaux, appareillés selon les mêmes règles, ils construiront sur des plans différents des édifices dissemblables.

En souhaite-on un exemple? Nous l'emprunterons aux pages par lesquelles M. Jouguet conclut sa remarquable comparaison entre la Dynamique de Galilée et la Dynamique de Descartes (¹) :

« Au début de toute recherche physique, l'intelligence humaine se trouve en présence d'idées vagues qui sont un mélange de suggestions expérimentales et de conceptions plus ou moins métaphysiques de l'esprit. Le premier travail consiste à les débrouiller. A l'origine de la Dynamique, nous voyons ainsi apparaître deux notions : celle de *force d'un corps en mouvement* et celle d'*impetus avec lequel un corps tend à se mouvoir sous une action étrangère,* sous l'action de la pesanteur par exemple (il s'agit ici de l'*impetus* de Galilée, et non de celui de Descartes). Deux voies s'offrent ainsi dès le début, où peut s'engager la Mécanique; il s'agit de savoir laquelle de ces deux notions elle s'attachera à préciser pour en faire une notion fondamentale.

» Avec Descartes, l'attention se fixe sur la *force des corps en*

(¹) É. Jouguet, *Op. laud.*, 1ʳᵉ Partie, p. 112-113.

mouvement. C'est la source d'un courant de recherches qui se perd d'assez bonne heure, mais réapparaît avec une grande ampleur au XIX[e] siècle. L'état d'un système matériel étant défini par plusieurs paramètres, le déterminisme scientifique, c'est-à-dire la simple notion de loi, nous apprend que certaines fonctions de ces paramètres doivent rester constantes. On peut chercher, parmi ces fonctions, celle qui traduit le mieux l'idée vague de force d'un corps en mouvement; c'est ce que l'on appelle aujourd'hui l'*énergie* du système. Dans cette fonction énergie, on peut chercher à mettre en évidence des groupes de termes que l'on considère comme représentant chacun l'énergie d'une partie. La constance de l'énergie totale ne peut avoir lieu que moyennant certaines relations entre les variations des énergies partielles, et ces relations, qui découlent de la forme de la fonction énergie, sont une manière d'exprimer l'action d'une partie du système sur une autre. Chez Descartes, c'est la quantité de mouvement qui joue le rôle d'énergie; ce sera la force vive chez Leibnitz. De nos jours, les savants qui ont développé les idées de Helmholtz se sont placés au point de vue que nous venons d'analyser, comme on peut le voir d'une manière très précise dans le *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* de M. Duhem.

» C'est au contraire l'*impetus de la tendance au mouvement* qui occupe Galilée. Il éclaire cette notion obscure en mesurant l'*impetus* par la force statique qui l'arrête. Cette méthode est bien plus précise que celle de Descartes; nous avons dit plus haut qu'il y avait, dans les idées premières de toute science physique, une part expérimentale et une part de l'esprit; chez Descartes, la part de l'esprit est exagérée; la méthode de Galilée fait bien davantage appel à l'expérience; elle rattache la notion d'*impetus* à la notion, déjà vivement éclairée par des études assez avancées sur l'équilibre, de force statique qui vient lui prêter un appui solide. On peut remarquer que, de même, la notion d'énergie ne deviendra féconde que lorsqu'on pourra l'étayer sur autre chose que sur une idée *a priori*, lorsque, grâce au théorème des forces vives et à la notion de potentiel, on aura mis en évidence et étudié l'énergie dans un grand nombre de problèmes particuliers, et donné de la sorte à cette notion, pour ainsi parler, une sanction expérimentale qui lui manquait au temps de Descartes.

» Courant énergétique, courant statique, telle est la manière dont tendent à se partager, dès le début, les recherches de la Mécanique. Naturellement, le partage ne sera pas toujours très net et les deux courants se mêleront; mais ils n'en existeront pas moins l'un et l'autre. »

Non seulement ces deux grands courants que M. Jouguet nomme le *courant statique* et le *courant énergétique* entraînent en des directions divergentes les tendances des mécaniciens; mais il arrive encore que chacun de ces courants se partage en un grand nombre de bras secondaires. Parmi ceux qui suivent, par exemple, le courant statique, les uns voudront traiter la force comme la notion première et essentielle de laquelle doivent émaner tous les autres concepts de la Mécanique; pour les autres, cette position centrale doit être réservée à l'idée de masse.

Différents par la préférence qu'ils accordent à tel ou tel procédé propre à construire la théorie, différents aussi par l'importance relative qu'ils attribuent aux diverses notions, aux divers principes que cette théorie doit intégrer, les physiciens d'une même époque partageront leurs faveurs entre des Mécaniques multiples. De nos jours, et pour ne parler que des doctrines qui suivent le courant statique, ne voyons-nous pas la Mécanique de Kirchhoff, celle de Reech, celle de Saint-Venant, celle de Hertz, s'efforcer tour à tour de ravir le choix des géomètres?

Entre toutes ces Mécaniques, il y a quelque chose de commun; au bout de leurs déductions, toutes trouvent les mêmes formules, en sorte qu'elles représentent toutes, au même degré d'approximation, les mouvements observables des corps concrets. Cette part commune, indépendante du génie propre du théoricien, impersonnelle, c'est l'apport de la vérité objective. C'est parce que cette part existe que la Mécanique n'est pas simplement un art; c'est pour cela qu'il y a une Science, et pas seulement des savants.

Mais ce fonds commun à toutes les Mécaniques, ces formules que l'on retrouve identiques en chacune d'elles, chacune d'elles les sertit à sa manière dans l'entrelac de ses raisonnements; à cette matière donnée par la réalité extérieure, chacune impose sa forme; cette forme est le sceau du génie du théoricien, elle épouse étroitement la figure qui caractérise ce génie; et c'est parce que la

Science reçoit ainsi l'empreinte du savant que la théorie scientifique est véritablement œuvre d'art.

L'ingénieur, le physicien, le professeur, voit, épandues sous son regard, une foule de Mécaniques. Entre ces Mécaniques, il faut qu'il choisisse la théorie qui guidera ses découvertes, qui dominera son enseignement. Ce choix, comment le fera-t-il?

Il ne s'agit pas d'examiner si chacune de ces Mécaniques est vraie ou fausse, afin de rejeter une à une toutes celles qui seraient convaincues d'erreur et de garder la doctrine unique qui serait sortie victorieuse de cette épreuve. Toutes ces doctrines sont également vraies; elles possèdent toutes au même degré ce qui, pour une théorie physique, constitue la vérité; placées en présence d'un même phénomène de la nature concrète, elles lui appliquent toutes, et de la même manière, les mêmes formules; entre les résultats du calcul et les données de l'observation, l'accord est forcément le même pour toutes.

Ce n'est donc pas un caractère susceptible d'être dénommé vérité ou fausseté, c'est un criterium d'une autre nature qui permettra au physicien, à l'ingénieur, au professeur, de choisir une certaine Mécanique de préférence à toute autre. Il choisira la théorie qui lui paraîtra la plus *satisfaisante*, celle dont la forme lui semblera présenter, avec les aspirations et les exigences de son propre génie, un accord plus harmonieux.

Dès lors, s'il veut que ce choix soit bon, qu'il soit raisonnable, il ne lui suffit pas d'étudier en elles-mêmes les diverses Mécaniques entre lesquelles il doit choisir; il lui faut aussi examiner avec grand soin les tendances de son esprit, non seulement afin d'en prendre très exactement conscience, mais encore afin de juger, parmi ces tendances, quelles sont celles qui sont justes et fécondes, celles auxquelles il est légitime de donner satisfaction; il lui faut fortifier ces heureuses aspirations et renoncer aux exigences qui ne seraient pas raisonnables; en un mot, pour bien choisir entre les diverses Mécaniques, il faut qu'il développe en lui-même le *sens de la Mécanique*. Ainsi, à celui qui veut priser avec sûreté les tableaux d'une collection, il ne suffit pas d'étudier minutieusement les toiles exposées à sa vue; il faut qu'auparavant le sens artistique, le goût, se soient affinés en lui.

Comment donc un homme développera-t-il en lui-même le sens

de la Mécanique? Comme celui qui veut devenir connaisseur en peinture développe en son esprit le goût artistique, par la contemplation des chefs-d'œuvre et le commerce des maîtres. Qu'il analyse la germination d'une doctrine au sein du génie d'un inventeur, qu'il en suive l'évolution au cours des siècles; il apprendra peu à peu à discerner d'un coup d'œil sûr les tendances qui conspirent à la direction générale de la Science et en favorisent le progrès, d'avec les exigences, orientées à faux, qui arrêteraient le développement de la théorie ou la détourneraient de la bonne voie.

Cette contemplation des chefs-d'œuvre de la Mécanique, ce commerce avec les maîtres qui les ont produits étaient naguère choses fort malaisées. Pour s'y pouvoir livrer, que de conditions à remplir! Il fallait disposer d'un très grand nombre de Livres, pour la plupart rares et coûteux, écrits dans les langues les plus diverses; il fallait jouir de très longs loisirs, afin de pouvoir lire ces innombrables Livres; il fallait une grande force d'esprit et un grand sens critique pour coordonner les apports de lectures si nombreuses et si ardues, pour distinguer les pages où quelque idée importante mérite d'être conservée des Volumes où ne se trouve plus rien, sinon des détails qui « puent leur vieux temps » et qui sont propres, tout au plus, à piquer la curiosité de l'érudit.

Par les soins de M. Jouguet, toutes ces difficultés se sont évanouies. Deux minces Volumes réunissent les textes les plus capables de nous enseigner, par le commerce avec les auteurs originaux, non point tant la Mécanique que le sens de la Mécanique; ils sont là, traduits en notre langue maternelle, débarrassés de tout le fatras des détails aujourd'hui sans intérêt; par des notes et des commentaires brefs, mais pleins d'observations justes et profondes, M. Jouguet conduit comme par la main, de texte en texte, l'étudiant encore novice; il attire l'attention du lecteur sur le point qui mérite d'être particulièrement observé; il lui fait deviner, sous le disparate des pièces qui se succèdent, la continuité du développement de la Science; en un mot, de cette collection de chefs-d'œuvre, il est le cicerone discret et d'un goût très sûr.

Il est des ingénieurs qui ne demandent rien à la Mécanique, si

ce n'est des formules à l'aide desquelles on puisse rapidement et économiquement établir l'avant-projet d'un pont métallique ou d'un châssis de voiture automobile; ceux-là, lorsqu'ils ont à choisir une Mécanique, recherchent un manuel clair, concis, solidement cartonné et facile à mettre en poche; ils souriront sans doute en apprenant qu'un de leurs confrères a trouvé profitable de lire Galilée, Huygens et Lagrange; les *Lectures de Mécanique* ne sont pas pour eux.

Parfois, aussi, on rencontre un bourgeois aux prises avec un problème qu'il énonce en ces termes : « Mon salon aurait l'aspect cossu qui me plaît s'il n'était déparé par la nudité d'un panneau; ce panneau a telle hauteur et telle largeur; d'autre part, je dispose de tant de billets de mille francs; trouver un tableau qui ait mêmes dimensions que mon panneau et dont le prix (cadre compris) ne dépasse pas la somme que je possède. » A quoi le Vinci songeait-il lorsqu'il peignait le portrait de Mona Lisa? Assurément, ce bourgeois n'en a cure.

PIERRE DUHEM.

MÉLANGES.

SURFACES PARTIELLEMENT CYLINDROÏDES;

PAR M. E. KERAVAL,

Professeur au Lycée Hoche.

J'appelle *point de Cayley* d'une surface réglée un point A tel que si de A on abaisse une perpendiculaire sur toutes les génératrices rectilignes les pieds forment une courbe plane; le plan P_A de cette courbe sera le plan de Cayley correspondant au point A. En dehors des cylindres, on sait que le cylindroïde de Cayley est la seule surface réelle jouissant de la propriété ci-dessus pour tout point de l'espace. Je me propose d'indiquer quelles sont les sur-

faces réglées qui possèdent de pareils points et d'indiquer combien elles en possèdent. Si l'on cherche les surfaces qui en possèdent un ou deux, le problème est manifestement indéterminé : je m'occupe des surfaces qui en possèdent au moins trois.

Soient A, B, C ces trois points et P_A, P_B, P_C les plans correspondants. AP_A détermine un complexe du second degré facile à définir. On a donc à étudier la surface formée par les génératrices communes aux trois complexes AP_A, BP_B, CP_C.

Premier cas. — $P_A P_B P_C$ forment un trièdre. La surface réglée est alors du degré 9 en général (S_9). Son cône directeur est du troisième degré. S_9 coupe le plan de l'infini suivant une cubique qui peut être quelconque, plus six génératrices isotropes qui sont déterminées par la cubique. Soient $O\alpha$, $O\alpha'$ deux génératrices isotropes conjuguées du cône directeur et $O\alpha''$ perpendiculaire à $\alpha O \alpha'$; on a deux génératrices isotropes à l'infini dans les plans $\alpha O \alpha''$, $\alpha' O \alpha''$. En outre, à chaque génératrice du cône directeur correspond une génératrice et une seule de la surface, et réciproquement. Quant aux points de Cayley de S_9, on en trouve dix en général ; ce nombre peut s'abaisser, mais jamais s'élever si S_9 ne se décompose pas. On trouvera un exemple numérique très intéressant dans la Note de M. Darboux sur les mouvements algébriques (Cinématique de M. Kœnigs). J'ai été surpris de retrouver ces résultats dans l'article dont je parle, mais le fait est facile à expliquer. M. Darboux envisage certains mouvements à deux paramètres, dans lesquels chaque point du corps solide en mouvement décrit une quartique de Steiner.

Le mouvement résulte d'un renversement autour d'une droite passant par l'origine, plus une translation. Or, on peut remplacer ceci par un renversement autour d'une droite Δ parallèle à la première, plus une translation parallèle à Δ. Au lieu de laisser les paramètres indépendants, on peut les lier par une relation telle que la translation soit nulle. Alors Δ décrit une des surfaces S_9 que j'étudie.

Réciproquement, soient Σ le solide fixe formé par l'ensemble des points de Cayley et Σ' le solide mobile symétrique de Σ par rapport aux génératrices de S_9 ; il est clair qu'il y aura dix points de Σ' qui décriront des courbes planes, ce sont les points de M. Darboux. Ces

points sont identiques aux miens; les plans sont placés de façon un peu différente, mais jouissent de propriétés pareilles. On a là un ensemble de dix points et de dix plans qui jouissent de propriétés non encore signalées et qui me semblent intéressantes :

Première propriété. — Si parmi les dix points, on en met trois de côté, les sept autres sont sur trois cylindres de révolution dont les axes sont perpendiculaires aux plans de Cayley qui correspondent aux trois premiers. Ces trois plans forment habituellement un trièdre, sinon ils passent par une même droite Δ; la propriété subsiste, les trois cylindres sont alors orthogonaux à Δ. Dans l'exemple numérique de M. Darboux, dont j'ai déjà parlé, ce fait se produit quatre fois sur les 120 combinaisons des plans pris trois à trois.

Deuxième propriété. — Si parmi les dix plans on en met trois de côté formant un trièdre, les sept autres sont tangents à trois hypocycloïdes à trois points de rebroussement, chacune d'elles étant tangente à deux arêtes du trièdre.

Construction géométrique. — Pour construire un pareil système de points, on se donne un trièdre $P_A P_B P_C$ et trois points A, B, C. Le cylindre dont l'axe est perpendiculaire à P_A passe par B et C et par l'intersection du plan qui passe par B, et est perpendiculaire à l'intersection de $P_A P_C$ et de celui qui passe par C et est perpendiculaire à l'intersection de $P_A P_B$. Les trois cylindres donnent huit points; il faut donc en éliminer un : c'est celui qui est à la rencontre du plan passant par A et perpendiculaire à l'intersection de $P_B P_C$ et des deux plans analogues. Une construction très simple permet d'obtenir chacun des plans quand on connaît les points.

Enfin, si A, B, C subissent un même mouvement de translation par rapport à P_A, P_B, P_C supposés fixes, les dix points restent liés sans déformation du système et les dix plans ne bougent pas.

Décomposition des S_9. *Surfaces* S_6. — Ayant choisi le trièdre $P_A P_B P_C$ et les points A, B pour que S_9 se décompose, il faut prendre C en un point quelconque situé sur l'une des neuf droites qui sont les six côtés et les trois diagonales (1, 4 ; 2, 5;

3, 6) d'un certain hexagone gauche. Si C est pris en l'un des six sommets, S_9 se décompose en trois cylindroïdes dont les axes sont parallèles aux trois droites qui partent du sommet considéré.

Il en est ainsi dans l'exemple de M. Darboux : les dix points sont alors les dix points de Cayley, communs aux trois cylindroïdes, c'est-à-dire qui ont même plan de Cayley dans les trois cylindroïdes, ou encore les points formant l'intersection de trois autres cylindroïdes qui ont trois génératrices communes.

Si l'on prend C sur un des côtés ou des trois diagonales, S_9 se décompose en un cylindroïde d'axe parallèle à ce côté ou cette diagonale et une surface S_6 du sixième degré. Les S_6 ont un cône directeur du deuxième degré, sont unicursales, coupent le plan de l'infini, suivent une conique et quatre génératrices isotropes placées comme pour les S_9. Elles ont une infinité de points de Cayley situés sur une courbe du sixième degré dont les six directions asymptotiques sont perpendiculaires aux six plans cycliques du cône directeur : le sextique peut d'ailleurs se décomposer en une conique et une quartique, soit en trois coniques situées dans trois plans rectangulaires avec toujours les directions asymptotiques indiquées. Le plan P_A qui correspond à chaque point A de la sextique coupe S_6 suivant une quartique tracée sur une surface de Steiner, plus deux droites.

Deuxième cas. — P_A, P_B, P_C sont parallèles à une même droite. La surface S_8 est du huitième degré en général ; elle est unicursale, avec cône directeur du deuxième degré ; il y a, en général, quatre points de Cayley ou alors une conique. Dans ce cas, le plan P_A roule sur un cylindre de troisième classe bitangent au plan de l'infini. Ces S_8 se décomposent elles-mêmes en deux surfaces S_4 du quatrième degré dans des conditions faciles à trouver ; on a alors les surfaces à plan directeur.

Surfaces à plan directeur. — Les surfaces à plan directeur qui possèdent deux points de Cayley en possèdent une infinité ; ce sont tous les points d'un cylindre de révolution qui peut se réduire à un plan ou à une identité dans le cas du cylindroïde. Ces surfaces S_4 sont du quatrième degré, elles ont une cubique gauche nodale tracée sur le cylindre, et leur contour apparent sur le plan

directeur est une parabole dont le foyer est sur le cylindre. L'enveloppe des plans de Cayley est un cylindre ayant pour base une hypocycloïde à trois points de rebroussement. Tout ceci s'établit facilement; on retrouve les propriétés des droites de Sympson.

Droites de Cayley. — Dans l'étude des surfaces précédentes on rencontre des points de Cayley pouvant être choisis arbitrairement sur une droite que j'appelle *droite de Cayley* Δ. Il y en a de trois espèces, mais elles sont toujours perpendiculaires à l'un des plans cycliques Q du cône directeur (soit Q′ le plan cyclique conjugué).

Première espèce. — Si A décrit Δ, P_A enveloppe une surface développable de troisième classe, parabolique; trois plans P_A forment en général un trièdre.

Deuxième espèce. — Si A décrit Δ, P_A reste parallèle à une droite Δ'.

Si Δ est perpendiculaire à Q, Δ' est parallèle à Q′.

P_A enveloppe un cylindre parabolique.

Troisième espèce. — Si A décrit Δ, P_A reste parallèle à lui-même. Alors, si Δ est perpendiculaire à Q, P_A est parallèle à Q′.

Les surfaces qui possèdent deux droites de Cayley de troisième espèce sont du quatrième degré, ont une cubique nodale et jouissent de propriétés intéressantes. (*Voir,* au sujet des droites dont je parle, l'article déjà cité de M. Darboux.)

Cas des quadriques réglées. — Enfin, je signalerai un dernier théorème qui, je crois bien, n'est pas connu : les quadriques réglées possèdent des droites de Cayley de troisième espèce qui sont les perpendiculaires communes à deux génératrices isotropes. Si d'un point de l'une d'elles on abaisse des perpendiculaires sur les génératrices d'un système, les pieds sont sur un cercle de la quadrique.

On peut dire aussi que dans l'hyperboloïde les droites de Cayley sont les perpendiculaires aux plans cycliques menées par les foyers du contour apparent de la surface sur les plans cycliques centraux.

Point de vue mécanique. — J'ai dit que chaque surface S définissait le mouvement d'un solide Σ' symétrique du solide Σ formé par les points de Cayley par rapport aux génératrices de la surface S. Or, il est bien facile de montrer que le mouvement de Σ' par rapport à Σ est identique à celui de Σ par rapport à Σ'. Les deux surfaces dont la viration produit le mouvement sont identiques, et l'une d'elles s'obtient en menant par les points de la ligne de striction de S la perpendiculaire au plan asymptote de la génératrice. Ceci permet de la déterminer : il y a des cas où cette détermination est immédiate, c'est celui des surfaces à plan directeur.

On a alors deux cylindres paraboliques égaux qui roulent l'un sur l'autre, avec glissement le long des génératrices. Dans le cas du cylindroïde, les cylindres sont réduits à une droite; on a alors un solide qui tourne autour d'une droite en même temps qu'il glisse le long de la droite.

Dans tous les cas, le rapport des vitesses de glissement et de rotation est égal au paramètre de distribution sur la génératrice de S.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. 10. Bd. 1. Heft. contient : Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigg. Im Auftrage des Vorstandes f. den III. internationalen Mathematiker-Kongress zu Heidelberg im Aug. 1904 verf. v. A. Gutzmer, sowie Generalregister des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigg., Bd. 1-10 v Ernst Wöllfing. Hrsg. im Auftrage des Vorstandes v. R. Mehmke u. A Gutzmer. Gr. in-8°, IV-106 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m.

KOWALEWSKI (Gerh.). — *Grundzüge der Differential-u. Integralrechnung.* In-8°, VI-452 p. avec 31 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 12 m.

MARKS (C.-J.). — *Mathematical questions and solutions.* New ser. Vol. 4, in-8°. London, F. Hodgson. 6 s. 6 d.

POINCARÉ (H.). — *Leçons de Mécanique céleste,* t. II (2e Partie) *Théorie de la Lune.* In-8°, IV-137 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Hilbert (Dav.). — *Wissenschaft u. Hypothese* : VII. *Grundlagen der Geometrie*. 3., durch Zusätze u. Literaturhinweise v. Neuem verm. u. m. sieben Anhängen verseh. Aufl. In-8°, p. VI-279 Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 6 m.

Flammarion (C.). — *La planète Mars et ses conditions d'habitabilité. Encyclopédie générale des observations martiennes*. T. II, illustré de 426 dessins télescopiques et 16 cartes. Observations faites de 1890 à 1901. In-4°, 608 p. Paris, Gauthier-Villars. 12 fr.

Solar Research. Édit. by M. Schuster. In-8°, 243 p. London, Sherratt et Hughes. 7 s. 6 d.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées, édit. française, publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk. Tome I (4e vol.), fasc. 2 : Théorie des erreurs, d'après *J. Bauschinger*, par *H. Andoyer*. Calcul numérique, d'après *R. Mehmke*, par *M. d'Ocagne*. In-8°, 160 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr. 25.

Enriques (Federigo). — *Lezioni di Geometria descrittiva*. Pubblicate a cura di Umberto Concina (2e édition). In-8°, avec fig. Bologna. 12 l.

— *Lezioni di Geometria proiettiva* (3e édition). In-8°, avec fig. Bologna. 10 l.

Naber (H.-A.). — *Das Theorem des Pythagoras, wiederhergestellt in seiner ursprünglichen Form u. betrachtet als Grundlage der ganzen Pythagoreischen Philosophie*. Gr. in-8°, XII-239 p., avec 104 fig. et 3 pl. Haarlem, P. Visser Azn. 7 m; relié, 8 m. 50 pf.

Peters (J.). — *Neue Rechentafeln f. Multiplikation u. Division m. allen ein- bis vierstelligen Zahlen*. 37,5cm-24,5cm, VI-500 p. Berlin, G. Reimer. Relié, 15 m.

Reymond (A.). — *Logique et Mathématiques*. In-8°, IX-219 p. Paris, F. Alcan. 5 fr.

Poincaré (L.). — *Die Elektrizität*. Uebers. v. A. Kalähne. In-8°, VIII-261 p. Leipzig, Quelle et Meyer. 3 m. 80 pf.; relié, 4 m. 40 pf.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MONTLAUR (D.). — Tables de multiplication et de division, etc. 1909, xi-1000 pages. Rennes-Paris, Imprimerie Oberthur.

Le titre de cet Ouvrage mentionne qu'il est à l'usage des agents des Contributions directes et du Cadastre, des géomètres du Cadastre, des diverses administrations, sociétés financières, ingénieurs, architectes, métreurs, géomètres particuliers, compagnies de chemins de fer, entrepreneurs, commerçants, etc. Le dernier mot *etc.* désigne en fait tout le monde, chacun ayant fréquemment à multiplier l'un par l'autre des nombres ayant au moins trois chiffres.

Il existait déjà des Tables semblables, les *Rechentafeln*, de Crelle, parvenues à un tirage élevé, un des rares Livres qui, sans doute, ne renferment aucune faute. Les Tables de Montlaur en diffèrent par le format moitié moins large, chaque page ne contenant que les produits d'un seul nombre par les 910 nombres de 100 à 1009, et par les nombres de 1 à 9. La disposition est celle dite à *double entrée*. Chaque produit est écrit en son entier. Le caractère, très lisible, est du type elzévir. Pour plus de clarté, la page un peu longue est, dans la hauteur, divisée en deux moitiés par la répétition des chiffres 0, 1, 2, ..., 8, 9 des unités du multiplicateur. Le Volume, relié en toile grise, s'ouvre très bien.

A la fin du Volume, une page renferme deux Tableaux commodes pour le calcul des douzièmes.

Au commencement, après l'avant-propos, se trouvent des explications détaillées sur la *disposition* et le *mode d'emploi* de l'Ouvrage qui rend les plus grands services pour des multiplications et des divisions portant sur des nombres ayant un nombre quelconque de chiffres. Le format étroit des Tables de Montlaur, en diminuant l'encombrement sur le bureau du calculateur, en rend l'emploi vraiment pratique. Il s'en faut de beaucoup que de

telles Tables soient répandues comme elles devraient l'être, et l'économie de temps que produirait leur diffusion dans un pays comme la France serait énorme. A ce point de vue, nous souhaitons que l'usage de ces Tables soit vulgarisé dans tous les établissements d'enseignement secondaire et au moins dans toutes les écoles primaires supérieures.

B. B.

ECKHARDT (E.). — ZURÜCKFÜHRUNG DER SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE AUF DIE GEOMETRIE DES EBENEN KREISVIERECKS. NEUE GRUNDLEGUNG FÜR DIE FORMELN DER SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE. 1 volume in-8, VI-155 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Considérons un triangle sphérique EFG; imaginons qu'on ait tracé le grand cercle FG et prolongé au delà de E, jusqu'à ce grand cercle, les côtés EF, EG; on partage ainsi l'hémisphère qui contient le triangle EFG en quatre triangles, dont l'un est EFG; il y a une infinité de quadrilatères sphériques convexes, dont les diagonales sont les grands cercles EF, EG, tandis que les côtés sont perpendiculaires aux arcs de grands cercles qui vont du point E aux centres des cercles circonscrits aux quatre triangles. La projection sur le plan tangent en E, faite du centre de la sphère, d'un de ces quadrilatères sphériques est un quadrilatère inscriptible convexe ABCD, lié d'une façon remarquable au triangle sphérique EFG, ou plutôt à son symétrique. En particulier, les angles DAB, AED, CDA qui suffisent à déterminer le quadrilatère quant à sa forme sont respectivement égaux aux angles du triangle; les éléments de l'une des figures, triangle sphérique et quadrilatère plan inscriptible, s'expriment simplement au moyen des éléments de l'autre : de là un moyen, d'une part pour établir les formules classiques de la Trigonométrie sphérique et en découvrir de nouvelles, d'autre part pour ramener à des constructions planes les problèmes relatifs à la construction de triangles sphériques.

C'est M. Study [1] qui a eu le premier l'idée d'utiliser des qua-

[1] *Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen*. Leipzig, 1893.

drilatères inscriptibles pour la construction de triangles sphériques. M. Eckhardt, par une voie différente, a retrouvé divers résultats dus à M. Study, et en a établi beaucoup d'autres. Son exposition est d'ailleurs d'une nature élémentaire.

J. T.

JORDAN (C.). — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. 3e édition, revue et corrigée. Tome Ier : *Calcul différentiel*. 1 volume in-8, xv-620 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Nous sommes heureux d'annoncer la troisième édition du Cours d'Analyse de M. Jordan, dont le premier Volume vient de paraître. Le succès de cet excellent Livre ne surprendra personne.

J. T.

BOREL (E.). — DIE ELEMENTE DER MATHEMATIK. VOM VERFASSER GENEHMIGTE DEUTSCHE AUSGABE BESORGT VON PAUL STÄCKEL. Erster Band : *Arithmetik und Algebra*. 1 volume in-8, xvi-420 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

TANNERY (J.). — ELEMENTE DER MATHEMATIK. MIT EINEM GESCHICHTLICHEN ANHANG VON PAUL TANNERY. Autorisierte deutsche Ausgabe von *P. Klaess*; mit einem Einführungswort von *F. Klein*. 1 volume in-8, xi-339 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Dans le premier de ces Ouvrages ont été réunis les Livres publiés par M. Borel, sous les titres suivants : *Arithmétique et Algèbre (premier cycle)*, *Algèbre (premier cycle)*, *Algèbre (second cycle)*; cette réunion a, naturellement, exigé quelques remaniements, que M. P. Stäckel a très habilement faits ; le second est la traduction des *Notions de Mathématiques*, de M. Tannery. Les Ouvrages français répondent aux programmes scolaires actuellement en vigueur; ils ne s'adressent pas aux mêmes lecteurs ou, plus exactement, à des lecteurs du même âge, mais ils ont la même tendance et se caractérisent par l'introduction très franche de la notion de fonction dans l'enseignement des éléments. Dans l'édi-

tion française, et conformément d'ailleurs aux programmes, M. Borel introduit la notion de dérivée, devant laquelle son traducteur a reculé.

Il n'est guère dans les habitudes du *Bulletin* de signaler des Livres d'une nature aussi élémentaire que ceux-ci : on voudra bien excuser la dérogation à ces habitudes par le désir, commun aux deux auteurs, de manifester leur reconnaissance envers les maîtres qui ont pris la peine de traduire leurs petits Livres; rappelons aussi que M. F. Klein, qui a largement contribué à faire connaître ces Livres en Allemagne, s'est plu souvent à appeler l'attention sur la réforme de l'enseignement mathématique dans nos lycées et collèges, à la tête de laquelle s'est mis M. Darboux et qui a abouti aux programmes de 1902.

Cette réforme, Hermite l'aurait nettement désapprouvée : si universelles et si profondes étaient la déférence et l'affection qu'il inspirait que nul en France, de son vivant, n'eût songé à la réaliser.

J. T.

BOULANGER (A.), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur adjoint de Mécanique à la Faculté des Sciences de Lille. — **Hydraulique générale** (Ouvrage faisant partie de la *Bibliothèque de Mécanique appliquée* de l'*Encyclopédie scientifique*). 2 vol. in-18 jésus de 382 et 300 pages. Paris, Doin, 1909.

Quelque puissant que soit l'attrait de la Mathématique considérée en elle-même, sa valeur en tant qu'instrument de progrès pour l'esprit humain ne tient pas qu'à lui seul, mais dérive autant, pour le moins, des applications qui peuvent être faites de cette science aux diverses branches de la Physique, Mécanique comprise. Les difficultés qui se rencontrent dans ces applications, bien que d'un autre genre que celles qui sont offertes par la théorie, n'en sont pas pour cela moins considérables. La nature ne se soucie pas de poser les problèmes sous la forme qui se prête le plus aisément à la mise en équations : de fait, ainsi que le remarque, dans son introduction générale, le directeur de la *Bibliothèque de Mécanique appliquée*, les exigences de la réalité sont généralement difficiles à

concilier avec la belle harmonie de forme qui séduit les purs mathématiciens, et cela les détourne parfois de s'appliquer aux recherches qui les solliciteraient dans cette voie. Les hommes techniques, d'autre part, absorbés par d'autres soins, sont généralement peu portés vers les travaux spéculatifs, parfois aussi insuffisamment rompus au maniement de l'outil analytique; ils s'en tiennent alors aux données du simple empirisme, plus ou moins strictement réduites à la forme mathématique.

De là résulte une sorte de solution de continuité entre le domaine de la Mécanique rationnelle et celui de la Mécanique pratique, et très particulièrement en ce qui concerne l'étude du mouvement des fluides. Les hypothèses sur lesquelles sont fondées les théories de l'Hydrodynamique s'éloignent trop de la réalité pour que les résultats de cette science soient immédiatement utilisables pour le technicien. Et, d'autre part, l'Hydraulique expérimentale ne saurait prendre l'allure d'une science que si ses données venaient se grouper en une synthèse d'ensemble dont l'ossature, tout au moins, serait fournie par la précédente.

Cette réduction à la forme mathématique des lois des mouvements des eaux, tels qu'ils se produisent effectivement dans la nature, a été, depuis une quarantaine d'années, poursuivie par M. Boussinesq avec une étonnante persévérance et un non moins rare bonheur. Le savant professeur est parvenu à rendre compte analytiquement de la plupart des phénomènes de cet ordre, et ses conclusions ont trouvé dans les non moins remarquables recherches expérimentales de M. Bazin de précieuses confirmations. Mais son œuvre, disséminée en de nombreux recueils, est d'une lecture presque impossible; elle ne comprend pas moins de 1800 pages in-4°. Il s'agissait d'en faire une sorte de compendium qui en rendît l'étude abordable à tous ceux que le sujet intéresse. Tel est le programme que le directeur de la *Bibliothèque* avait proposé à M. Boulanger et que celui-ci a su réaliser de la façon la plus heureuse et la plus brillante.

Ainsi que le dit l'auteur dans sa préface, « le premier Volume comprend l'exposition des principes fondamentaux et l'étude de phénomènes généraux qui appartiennent au moins autant au domaine de la philosophie naturelle qu'à celui de l'art de l'ingénieur ».

Ce premier Volume débute par une introduction relative à l'établissement des équations fondamentales et comprend, en outre, trois sections traitant respectivement des phénomènes où l'influence des frottements est négligeable (houle de mer et clapotis; ondes de translation et onde solitaire; ondes d'émersion et d'impulsion), des phénomènes de mouvements bien continus où l'influence des frottements est sensible (écoulement de l'eau dans les tubes fins; filtration; mouvements de rotation), enfin des phénomènes de mouvements turbulents (mouvement permanent uniforme et mouvement graduellement varié dans les tuyaux larges et les canaux).

Le Tome II est réservé aux problèmes à singularités. « Au point de vue esthétique, dit l'auteur, leur caractère commun, en regard des problèmes déjà traités, est d'offrir un moins haut degré de perfection, d'exiger des postulats et des appels à l'expérience qui, bien que singulièrement réduits [par rapport à l'hydraulique traditionnelle] dans les solutions présentées ici, sont encore nombreux et portent sur des faits d'une simplicité moins frappante; au point de vue du développement de la Science, ces questions réclament encore, pour la plupart, de nouvelles et profondes recherches; au point de vue pratique enfin, elles sont de celles dont l'ingénieur demande instantanément, sous une forme quelconque, une solution, fût-elle même empirique. »

On retrouve ici la même division en trois sections que dans le Volume précédent : phénomènes où l'influence des frottements est négligeable (écoulement par orifices et déversoirs), phénomènes de mouvements bien continus où l'influence des frottements est sensible (extinction graduelle de la houle et des ondes de translation; résistance au mouvement des solides immergés), phénomènes de mouvements turbulents (tuyaux larges et canaux présentant des singularités; cours d'eau naturels; propagation des ondes dans les tuyaux élastiques; coups de bélier). L'auteur fait d'ailleurs remarquer que, « en utilisant, dans sa théorie des mouvements tourbillonnaires et tumultueux, ce que les physiciens appellent une *méthode statistique*, méthode dont ils font aujourd'hui un usage courant dans la théorie cinétique de la matière, M. Boussinesq a été vraiment initiateur ».

Ayant, dans les lignes qui précèdent, essayé de donner une idée d'ensemble de l'Ouvrage de M. Boulanger, nous y joindrons quel-

ques remarques qui nous ont été suggérées par sa lecture. Tout d'abord, soulignons l'importance du travail de filtration et de condensation auquel a dû se livrer l'auteur, et l'art avec lequel il a su le dissimuler, s'attachant, bien qu'en substituant la plupart du temps ses démonstrations propres à celles de son modèle, à ne jamais s'écarter du point de vue et de la méthode de celui-ci. C'est, en somme, une synthèse fidèle non seulement des résultats mais encore des idées directrices de M. Boussinesq qu'il nous présente, et cela est essentiel à noter. Mais l'ordonnance générale des matières lui appartient bien en propre et entre pour une bonne part dans la valeur du Livre, dont la filiation des idées, le classement des questions et la graduation des difficultés rend la lecture extrêmement aisée. Ajoutons que cette lecture est rendue plus attrayante encore par les historiques brefs et précis donnés à propos des principales questions et les confrontations expérimentales qui accompagnent chaque théorie.

A titre de détail nous signalerons la façon dont l'auteur établit directement l'égalité des composantes normales réciproques à l'intérieur des milieux continus, ce qui lui permet d'écrire immédiatement les expressions qui définissent la pression sur un élément.

La manière dont il forme les équations des mouvements des fluides, où il distingue nettement les fluides à l'état élastique, les fluides naturels à mouvements réguliers et bien continus et les fluides à l'état turbulent, met en évidence les conditions de validité des systèmes distincts d'équations dus à Euler, à Navier et à M. Boussinesq; les expressions des pressions intervenant dans les deux derniers étant d'ailleurs obtenues par un procédé très simplifié et les conditions aux limites soigneusement analysées. Il ressort, au reste, de cette étude qu'il y a illusion à vouloir déduire les équations de M. Boussinesq de celles de Navier par des calculs de moyennes, comme la tentative en a été faite; le tourbillonnement en un point est fonction non seulement de l'état environnant, mais bien des modifications lointaines du fluide.

A propos du cas où la force extérieure dérive d'un potentiel indépendant du temps, l'auteur fait ressortir de façon élégante que les propriétés des « Wirbelbewegungen » d'Helmholtz ne sont que l'interprétation cinématique des équations de Cauchy.

On ne peut manquer non plus d'être frappé de la manière dont, après avoir établi, d'après M. Boussinesq, que toute houle de mer régulière à mouvements évanouissants aux grandes profondeurs est régie par les lois de Gerstner, il rattache à cette démonstration tout ce qu'on sait de la houle en profondeur finie.

Pour l'onde solitaire, l'auteur a su rendre remarquablement concise la première théorie donnée par M. Boussinesq qu'il eût été regrettable que d'autres études insérées depuis lors en divers Traités d'Hydraulique fît oublier. Quant aux ondes d'émersion et d'impulsion, il semble bien (si on laisse de côté la solution, due à Résal, d'un cas très particulier) que ce soit la première fois qu'elles trouvent droit de cité dans un Traité d'Hydraulique, et l'on est tout surpris de constater à quel point l'auteur a su condenser l'étude considérable insérée à ce sujet par M. Boussinesq dans son *Application des potentiels à l'élasticité*.

Les expériences de M. Conette sont très heureusement rattachées à l'étude des mouvements de rotation, naguère poussée très loin par M. Boussinesq et, bien qu'injustement, assez oubliée.

Les simplifications très remarquables, introduites par M. Boulanger, se distinguent encore dans la théorie des mouvements turbulents sur laquelle M. Boussinesq s'est aussi largement étendu.

Mais il n'est peut-être pas de sujet sur lequel, pendant une trentaine d'années, le savant hydraulicien soit revenu plus souvent que l'écoulement par déversoirs. La forme qu'en une quarantaine de petites pages M. Boulanger a su donner aux résultats fort importants de cette série d'études est digne de rester classique.

Quelque mérite qu'ait eu l'auteur à refondre ainsi l'exposé de matières empruntées à son modèle, ce n'est point seulement de cela qu'il y a lieu de le louer; mais encore d'une contribution personnelle qui est loin d'être négligeable. La propagation des ondes dans les tuyaux élastiques, question qui n'avait encore, semble-t-il, jamais figuré dans un Traité d'Hydraulique, a été pour lui l'occasion de recherches originales d'une haute valeur qui se trouvent consignées dans les deux derniers Chapitres de l'Ouvrage, à côté de résultats dus à quelques autres auteurs, mais présentés ici sous une forme nouvelle. C'est ainsi, notamment, que M. Boulanger a su donner une forme simple et moderne aux idées de Th. Young pour

y rattacher intuitivement les résultats de M. Korteweg, renouveler l'étude des mouvements de Weber (ondes de translation à l'intérieur d'un tuyau élastique horizontal), fondre ensemble les travaux de MM. Allievi et de Sparre sur les coups de bélier pour en faire sortir une théorie qui, sous cette forme, nous semble pouvoir devenir classique. Nous voudrions que cette trop rapide analyse pût faire pressentir la richesse et la nouveauté de l'exposé de M. Boulanger, d'où l'on peut espérer voir sortir de nouveaux progrès dans l'ordre de la réduction des faits de l'Hydraulique à la discipline mathématique. P. M.

ENRIQUES (F.). — Fragen der Elementar-Geometrie. Aufsätze von U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calo, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini. A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. — Deutsche Ausgabe von Dr H. Fleischer. II. Teil : *Die geometrischen Aufgaben, ihöre Lsung und Lösbarkeit.* 1 vol. in-8°, 348 pages. Leipzig, Teubner, 1907.

Le *Bulletin* a rendu compte ([1]) des *Questioni rigardanti la Geometria elementare.* On ne s'étonnera pas que la maison Teubner, qui semble préoccupée de constituer une bibliothèque mathématique à l'usage des maîtres des gymnases, ait voulu en donner une édition allemande : la traduction est due à M. H. Fleischer, qui a déjà traduit les leçons de M. Enriques sur la Géométrie projective. J. T.

THIEME (H.). — Die Elemente der Geometrie, 1 vol. in-8, XII-394 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

Ces *Éléments de Géométrie* font partie d'une collection qu'il convient de signaler; elle comprendra quatre Volumes : deux pour la Géométrie et deux pour l'Arithmétique et l'Algèbre; M. Fr. Meyer, dans le second Volume consacré à la Géométrie, traitera des méthodes de transformation et introduira le lecteur

---

([1]) T. XXIV$_1$, 1900, p. 168.

dans la théorie des groupes; M. C. Färber traitera de l'Arithmétique et M. Netto, de l'Algèbre. Ces Livres seront écrits à la fois pour les maîtres et pour les élèves : les théories y seront présentées avec cette entière rigueur à laquelle on peut prétendre aujourd'hui, grâce aux résultats de la critique à laquelle ont été soumis les éléments des Mathématiques. Le nom des auteurs permet d'avoir confiance dans la façon dont le programme sera rempli, et le Volume que vient de publier M. Thieme justifie pleinement cette confiance. Il est donc désirable que nos professeurs de lycée et ceux qui s'intéressent à leur formation connaissent ces Livres.

La lecture des Ouvrages d'enseignement faits par des auteurs étrangers, dont les habitudes et les vues ne sont pas les mêmes que les nôtres, est très propre à développer la réflexion. Quelques-uns de ces Ouvrages, judicieusement choisis, pourraient même être mis utilement entre les mains d'élèves de nos lycées, suffisamment familiers avec la langue où ils sont écrits.

En moins de 400 pages, M. Thieme a développé la Géométrie élémentaire, les éléments de la Trigonométrie plane ou sphérique, ceux de la Géométrie descriptive, ceux enfin de la Géométrie analytique à deux ou trois dimensions; il n'a pas reculé devant l'énumération des surfaces du second ordre. Il se borne aux choses fondamentales quand il sort de la Géométrie élémentaire, mais, pour cette dernière, il va assez loin; il développe la solution de problèmes de construction assez difficiles et démontre, par exemple, des propositions comme celle-ci : le cercle des neuf points est tangent aux cercles inscrits à un triangle. On sent combien il a dû condenser son style pour faire tenir tant de choses en 400 pages.

C'est assurément par les commencements, par les principes, si l'on veut, que son Livre se distingue particulièrement : tout en se bornant à la Géométrie euclidienne, M. Thieme a voulu faire une exposition parfaitement logique, avec un minimum de postulats, en profitant des Mémoires et des Livres de MM. Pasch, Peano, Hilbert, Ingrami. Il se refuse à faire usage de l'ensemble d'intuitions contenues dans la notion de corps solide et en particulier de la définition de l'égalité qui résulte de cette notion. Les cas d'égalité des triangles sont traités d'après M. Hilbert.

On peut regarder comme très souhaitable que les maîtres connaissent un tel mode d'exposition, qu'ils donnent même à leurs élèves, s'ils peuvent être suivis, quelques indications à ce sujet, et que ceux de ces élèves chez lesquels, grâce à leurs aptitudes naturelles et à leurs études antérieures, le goût de la logique est suffisamment développé, aient à leur disposition un Livre comme celui de M. Thieme, en attendant le jour, encore un peu éloigné, où ils aborderont la Géométrie abstraite de M. Vahlen.

Rien n'empêche un maître de mettre entre les mains de ses élèves des Livres qui dépassent et complètent son enseignement, quitte à leur signaler ce qu'il leur faut étudier ou laisser de côté et à leur donner au besoin quelques explications. Au reste, ceux des élèves qui ne s'intéressent pas aux principes, ou qui ne sont pas mûrs pour leur étude, qui veulent apprendre des faits et s'habituer aux méthodes géométriques, trouveront dans le Livre de M. Thieme, après en avoir sauté quelques pages, de quoi se satisfaire amplement.

Pour toutes les propositions un peu importantes, le nom de l'auteur où elles figurent pour la première fois est indiqué avec des renvois qui permettent de les retrouver. Ces quelques indications constituent à vrai dire une histoire de la Géométrie élémentaire, puisqu'elles permettent, à elles seules, de se figurer comment elle s'est développée dans le temps.

On s'étonne un peu de ce que l'auteur, qui a cité parmi les Ouvrages français les excellents Livres de M. Méray, de MM. Rouché et Comberousse, de MM. Niewenglowski et Gérard, ait passé sous silence les *Leçons* de M. Hadamard. J. T.

CZUBER (E.). — WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND IHRE ANWENDUNG AUF FEHLERAUSGLEICHUNG, STATISTIK UND LEBENSVERSICHERUNG. Erster Band : *Warscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmasslehre.* Zweite, sorgfältig durchgesehene und erweiterte Auflage. 1 volume in-8°, x-408 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

Le *Bulletin* a rendu compte en 1903 de la première édition du *Traité des probabilités* de M. E. Czuber (t. XXVII, p. 141). Les

qualités de ce Traité, la richesse des renseignements qu'on y trouve, expliquent la rapidité avec laquelle il s'est épuisé ; d'ailleurs la théorie des probabilités, qui a été délaissée pendant quelque temps, semble être aujourd'hui plus en faveur : l'importance des applications qu'en font les naturalistes y est sans doute pour beaucoup.

M. Czuber a revu très soigneusement cette seconde édition et y a fait de nombreuses additions : la plus considérable est le Chapitre qui concerne cette théorie des mesures collectives (*Kollektivmasslehre*) qu'a fondée Fechner et que M. Lipps et M. Bruns ont développée récemment (¹). Les Tables de M. Bruns sont reproduites dans le nouveau Traité de M. Czuber. J. T.

ARNOUX (G.). — ARITHMÉTIQUE GRAPHIQUE : LES ESPACES ARITHMÉTIQUES, LEURS TRANSFORMATIONS. 1 volume in-8, IX-84 pages.

M. Arnoux entend par *espaces arithmétiques* des ensembles de points dont les coordonnées sont des nombres entiers; ils peuvent être à p dimensions. C'est d'ailleurs surtout les espaces à deux dimensions qu'envisage l'auteur. Les espaces sont dits *modulaires* et relatifs au module m, s'ils contiennent m^p points, chacune des p coordonnées comportant m entiers consécutifs. Minkowski a montré quels services, dans les problèmes d'approximation au moyen des nombres entiers, pouvait rendre la considération des figures formées ainsi au moyen de points à coordonnées entières. C'est à des problèmes d'une nature plus élémentaire que M. Arnoux applique son inlassable curiosité; mais ces problèmes ont leur intérêt et sont parfois d'une grande difficulté : signalons en particulier les réflexions relatives au problème des 36 officiers qu'a posé Euler, et qui n'a pas de solution.

M. Arnoux déclare dans sa préface que M. Laisant lui a apporté une collaboration très précieuse, comme il avait fait d'ailleurs pour ses précédents Ouvrages. J. T.

(¹) *Voir* dans le *Bulletin*, t. XXXII, 1908, p. 129, le compte rendu du Livre de M. Bruns.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. E. CAHEN A M. JULES TANNERY (¹).

. . . .

La faute en question se trouve dans le Mémoire en allemand du Tome XXX (1845) du *Journal de Crelle*, et elle est reproduite dans le Mémoire en français du *Journal de Liouville*, t. XVI (1851).

C'est probablement à ce dernier que Liouville fait allusion. Cette faute est la suivante :

Kummer veut démontrer que la congruence

$$\varphi(y) \equiv 0 \pmod{q}$$

a toutes ses racines réelles. Pour cela, il démontre (p. 409, ligne 19 du Mémoire français) que

$$\varphi(y)\,\varphi(y-1)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv 0 \pmod{q^e}.$$

Ce n'est d'ailleurs pas là une congruence identique : c'est seulement une congruence qui est vérifiée pour toute valeur entière de y. Kummer ajoute qu'on en conclut aisément le théorème annoncé. Or cela n'est pas; on ne peut en conclure que l'existence d'une racine. Dans son Mémoire de 1857, Kummer ne commet plus cette faute, comme le remarque Dirichlet.

Reste la question suivante :

Si, en 1857, Kummer s'est aperçu que son ancienne démonstration n'était pas rigoureuse, pourquoi dit-il qu'elle l'est? Et s'il ne l'a pas remarqué, pourquoi en donne-t-il une nouvelle?

. . . .

E. Cahen.

(¹) *Voir* dans le présent Volume la lettre de Dirichlet à Liouville qui commence à la page 53 et la note de la page 54.

DISCOURS PRONONCÉ A BOURG-LA-REINE

PAR M. JULES TANNERY [1].

MESSIEURS,

Quand le génie des savants qu'on veut exalter ne s'est pas manifesté par des bienfaits que tous ressentent, les honneurs rendus à leur mémoire prennent une signification presque religieuse : ces honneurs sont comme un acte de foi qui s'élève vers une science idéale à laquelle nous rendons hommage sans la connaître.

Évariste Galois a consacré quelques semaines de sa vie brève et tourmentée aux problèmes les plus abstraits de la plus abstraite des sciences. Ses prodigieuses découvertes sont aussi éloignées des applications qu'il est possible. En les honorant, Messieurs, vous proclamez l'unité de la Science et la liberté du savant.

Connaître le monde où nous vivons, voilà, dit-on, le but de la Science. Mais nous ne connaissons vraiment les phénomènes naturels que lorsque nous possédons les lois numériques auxquelles ils obéissent. Pour tirer parti de ces lois, pour savoir celles qui se déduisent des autres, pour leur substituer des lois plus générales ou plus simples, il faut connaître les propriétés des nombres. C'est tout un monde nouveau à étudier, un monde abstrait, décoloré, obscur. Ceux qui savent y pénétrer, l'éclairer et s'y diriger se passionnent pour les perspectives lointaines qu'ils y découvrent : le souvenir des paysages merveilleux et transparents qu'ils nous décrivent se présente parfois à la pensée du physicien et lui fait comprendre le monde réel auquel il s'attache ; grâce à un rapprochement inattendu, le physicien peut enfin relier les faits qu'il a observés, les mettre à leur vraie place, et construire une théorie qui les dépasse infiniment. Les théories physiques dominent la Chimie, la Physiologie, la Médecine. Toutes les sciences se mêlent,

---

[1] La municipalité de Bourg-la-Reine a fait placer une plaque sur la maison où est né Évariste Galois : la première initiative de cet hommage vient de M. Matruchot, professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris, qui habite Bourg-la-Reine. M. le colonel Caudelot, maire de cette ville, avait prié M. Tannery de prendre la parole à la cérémonie d'inauguration, qui a eu lieu le 13 juin 1909, sous la présidence de M. de Selves, préfet de la Seine.

s'enchevêtrent, se nourrissent et vivent de la même sève. Telle vérité mathématique abstraite contribuera un jour, on ne sait comment, à cette maîtrise du monde que la Science nous procure peu à peu. Messieurs, vous avez senti cette unité de la Science; vous savez que la vérité veut être recherchée pour elle-même, et que c'est seulement quand on l'a trouvée qu'apparaissent les applications qu'on peut en faire. Vous avez compris qu'on doit laisser au savant une entière liberté de pensée, une entière liberté de chercher ce qu'il espère trouver; vous avez compris que nous ne devons pas nous étonner des voies qu'il suit, qu'il faut nous résigner à ne pas distinguer le but mystérieux qu'il entrevoit et qui l'attire.

C'est pourquoi vous honorez Galois et vous auriez raison de l'honorer si même vous pensiez que la Science ne se justifie que par son utilité pratique.

Il est né dans cette maison, voici bientôt un siècle. Son père, Gabriel Galois, a été un de vos prédécesseurs, Monsieur le Maire; il a donné, dans des temps difficiles, l'exemple de la fidélité aux idées libérales; il est mort, victime des cabales et des calomnies. Sa mère, née Demante, très intelligente et très bonne, portait un nom qui est bien connu à la Faculté de Droit; quelques-uns de ceux qui assistent à cette cérémonie se la rappellent peut-être; elle s'est éteinte en 1872, à 84 ans. Évariste Galois a grandi ici, il y a joué, il a été un enfant heureux; c'est peut-être ici seulement qu'il a goûté la joie et qu'il l'a répandue autour de lui.

Bien vite, au lycée Louis-le-Grand, il devient triste, difficile et singulier : son génie s'est emparé de lui; il est partagé entre deux passions : les Mathématiques d'abord; il lit, d'un bout à l'autre, comme pour se distraire, la *Géométrie* de Legendre; il la sait dès qu'il l'a lue; l'Algèbre l'attire encore davantage, mais les Traités élémentaires le rebutent; il apprend l'Algèbre dans les œuvres de Lagrange; à seize ans, il est mûr pour la découverte. Son autre passion, c'est un amour mystique et violent pour la République, pour une République plus idéale peut-être que ses mathématiques et plus éloignée de la réalité, pour une République à laquelle il rêve de se sacrifier, à laquelle au besoin il sacrifierait les autres : les créations de Victor Hugo ne sont pas de pures fictions; Marius et Enjolras sont les frères d'Évariste Galois.

Au sortir de sa Rhétorique, qu'il a mélangée à la classe de Mathématiques préparatoires, il se présente à l'École polytechnique à laquelle il a cru pouvoir se préparer tout seul. Il est refusé. Première déception; les déceptions ne lui seront pas ménagées. Il entre dans la classe de Mathématiques spéciales, où il trouve un maître admirable, M. Richard, qui le comprend pleinement, qui le juge ce qu'il est. Il a 17 ans; c'est à cette époque que remontent ses premières publications mathématiques. Il adresse un Mémoire à l'Académie des Sciences sur la théorie des équations algébriques; Cauchy l'égare. A la fin de l'année scolaire, il est encore refusé à l'École polytechnique. Ce second échec, il ne le pardonnera pas aux examinateurs : ce n'était pas seulement une blessure à son orgueil, ou plutôt au juste sentiment de ce qu'il valait; Galois a vraiment souffert de ne pas entrer dans l'illustre Maison, qu'il aimait pour sa gloire scientifique et pour l'esprit libéral de ses élèves.

Désespéré, il se retourne vers l'École normale; il y entre en octobre 1829. Il publie trois Mémoires au commencement de 1830 : il est alors en possession d'une bonne partie de ses grandes découvertes; au mois de janvier, il présente l'ensemble de ses recherches sur l'Algèbre à l'Académie des Sciences. Fourier, le secrétaire perpétuel, emporte le manuscrit; il meurt dans l'année; le manuscrit ne se retrouve point. Un an après, Galois envoyait à l'Académie son Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radiaux; les mathématiciens qui devaient l'examiner ne se donnèrent pas la peine qu'exigeait le style trop concis de Galois : ce Mémoire, qui est l'un de ses principaux titres de gloire, ne fut pas compris et fut qualifié d'incompréhensible. Galois confondit dès lors dans la même haine et le même mépris les membres de l'Académie des Sciences et les examinateurs de l'École polytechnique.

Revenons à l'année 1830 et à cette École normale où Galois continuait de regretter l'École polytechnique : pendant les trois journées de juillet, le directeur de l'École parvint à tenir les élèves sous clef, même le 29 qui était un jeudi, un jour de sortie. Je crois bien que les parents lui en surent gré, mais on devine la fureur de Galois quand il apprit la part qu'avaient prise à la révolution les élèves de l'École polytechnique et d'autres étudiants, alors qu'il était enfermé avec ses camarades. Le directeur de

l'École normale alla rejoindre les membres de l'Académie des Sciences et les examinateurs d'entrée à l'École polytechnique. Au mois de décembre, Galois écrivit dans un journal une lettre où il ne le ménageait pas. La lettre était signée *Un élève de l'École normale ;* mais il n'était pas difficile d'en découvrir l'auteur, qui fut mis à la porte.

Galois se jeta en pleine mêlée politique. Il est poursuivi et incarcéré en mai 1831 après un banquet aux *Vendanges de Bourgogne*, où il avait prononcé un toast dont les tendances régicides ne peuvent pas être niées : il n'avait pas 19 ans, le jury l'acquitta malgré l'impertinence de ses réponses au président.

Le 14 juillet de la même année, le voici à la tête d'une manifestation républicaine, habillé en artilleur de la garde nationale, armé d'une carabine, de pistolets et d'un poignard. Arrêté sur le Pont-Neuf, condamné à 6 mois de prison, écroué à Sainte-Pélagie le 17 décembre, il est jeté parmi la foule des prisonniers politiques ramassés dans les émeutes qui bouleversaient Paris depuis un an. Ces gens-là, qui se qualifiaient de *patriotes*, sont faits pour étonner nos révolutionnaires d'aujourd'hui. J'emprunte à M. Paul Dupuy le récit de la scène qui se passait tous les soirs, avant le coucher :

« Les prisonniers se réunissaient pour chanter en chœur des chansons patriotiques et terminaient par la *Marseillaise*. Au couplet *Amour sacré de la Patrie*, tout le monde s'agenouillait; puis du haut des fenêtres grillées, les jeunes détenus, ceux qu'on appelait *les mômes*, gamins abandonnés ou vagabonds qui partageaient le quartier des politiques, suspendus en grappes aux barreaux, entonnaient à leur tour la strophe des enfants : elle paraissait tomber du ciel.

. . . .

» Quand les voix claires des enfants s'étaient tues, les hommes défilaient devant le drapeau et le baisaient avant de remonter. »

Malgré la grandeur des sentiments qui animaient la plupart d'entre eux, ces prisonniers formaient une foule assez mêlée, où les gens de mœurs grossières ne pouvaient manquer.

Plusieurs d'entre vous, Messieurs, ont vu le charmant portrait, dont Mme Guinard, la nièce de Galois, a bien voulu autoriser la reproduction.

Cet enfant aux traits fins et distingués, aux yeux profonds, au front puissant, à la bouche mélancolique et dédaigneuse, imaginez-le qui se promène de long en large au milieu des vieux habitués des barricades. Il agite dans sa tête les plus hautes questions mathématiques; la chaîne merveilleuse des conséquences logiques se déroule devant lui; ou bien il réfléchit sur la façon dont les vérités nouvelles se découvrent, dont elles viennent à briller au milieu des vérités déjà connues d'où elles émergent; ou, peut-être, il esquisse le plan magnifique d'une cité future, où régnera la justice. Ses camarades de prison s'étonnent, l'interpellent, se moquent de lui parce qu'il n'a pas le courage de boire : un jour, par bravade, il avala toute une bouteille d'eau-de-vie. Raspail, dans ses *Lettres sur les prisons de Paris*, nous a laissé le tableau de cette horrible scène et de bien d'autres qui altérèrent la santé de Galois. Pourtant, on eut de la bienveillance pour lui; le 16 mars, on l'envoya dans une maison de santé, où il fut prisonnier sur parole. Un amour pour une femme, qu'il traitera bientôt d'infâme coquette, le prend tout entier pendant quelques semaines. Cette passion, voici comment il la juge lui-même :

« Comment se consoler d'avoir épuisé en un mois la plus belle source de bonheur qui soit dans l'homme, de l'avoir épuisée sans bonheur, sans espoir, sûr qu'on est de l'avoir mise à sec pour la vie? »

A propos de cette *infâme coquette*, on ne sait ni pourquoi, ni contre qui, il se bat en duel le 30 mai; il est blessé mortellement, il meurt le 31 mai 1832, à 10^h.

Il avait, paraît-il, fait ce qu'il avait pu pour éviter ce duel; en l'acceptant, il a la certitude d'être tué; il passe le jour et la nuit qui précèdent le duel à revoir son grand Mémoire sur les équations résolubles, à rédiger son testament scientifique, cette extraordinaire lettre à Auguste Chevalier où se montre toute sa science, où éclate tout son génie. Quelle nuit tragique, Messieurs, que cette nuit-là, où l'enfant de génie, qui sait que la lumière qu'il porte va s'éteindre, voit passer devant lui ce qu'il a fait, ce qu'il aurait pu faire, où, en s'efforçant de fixer les résultats les plus essentiels, il écrit d'une main fébrile : *Je n'ai pas le temps*.

Quinze ans plus tard, en 1846, Joseph Liouville publiait dans son journal les *Œuvres mathématiques de Galois* : cette publi-

cation a été faite avec autant d'intelligence que de conscience; Liouville a publié tout ce qu'il importait de publier: ses papiers témoignent du travail considérable qu'il s'est imposé pour pénétrer la pensée de Galois; ces œuvres ont été réimprimées en 1897, par les soins de la Société mathématique, avec une très belle préface due à M. Émile Picard. Il y a 3 ans, Mme de Blignières, une des filles de Liouville, a su retrouver les manuscrits de Galois dans les papiers de son père: elle les a légués à l'Académie des Sciences. Ces feuilles jaunies, déchirées, maculées, couvertes de griffonnages, les calculs inachevés, les fragments venus de Sainte-Pélagie qui sentent la haine et la fièvre, la lettre écrite dans la nuit funèbre, le glorieux Mémoire qui fut jugé incompréhensible, les injures à ses membres d'il y a 80 ans, l'Académie a recueilli tout cela pieusement, comme une inestimable relique; et aujourd'hui, Messieurs, son Secrétaire perpétuel ([1]) est au milieu de vous; il s'unit à vous pour honorer Galois.

Depuis la publication de Liouville, d'année en année, l'importance de l'œuvre de Galois est apparue plus clairement; les plus grands mathématiciens se sont plu à la proclamer. Ce n'est pas ici le lieu et ce n'est pas à moi qu'il appartiendrait de dire l'influence considérable qu'elle a eue sur le progrès des Mathématiques.

En 1894, l'École normale fêtait le centenaire de sa création. Un géomètre étranger, Sophus Lie, écrivit pour le Livre qui devait commémorer cette fête une étude scientifique sur Évariste Galois, qui restera un des plus beaux monuments élevés à sa gloire. A cette même occasion, M. Paul Dupuy, aujourd'hui secrétaire de l'École normale, commença de longues et patientes recherches sur la vie de Galois; il a feuilleté les journaux du temps, compulsé les registres d'écrou des prisons; les parents et les amis de Galois qui survivaient lui ont apporté tout leur concours; ces recherches ont abouti à une biographie qu'on peut regarder comme définitive, et où M. Dupuy, à force de faire comprendre Galois, réussit presque à le faire aimer.

Je dois à la situation que j'occupe à l'École normale l'honneur de prendre la parole ici; je vous remercie, Monsieur le Maire, de me permettre de faire au génie de Galois amende honorable au

([1]) M. Darboux assistait à la cérémonie.

nom de cette École où il est entré à regret, où il n'a pas été compris, qui l'a rejeté loin d'elle et dont il est, malgré tout, une des gloires les plus éclatantes.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Dauzat. — *Éléments de Méthodologie mathématique.* 2e éd. (22-14), I-100 p. Paris, Vuibert et Nony. 12 fr.

Extrait de la Connaissance des Temps pour l'an 1910, à l'usage des écoles d'hydrographie et des marins du commerce, publ. par le Bureau des Longitudes. In-8°. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 50 c.

Mellor (J.-W.). — *Higher Mathematics for students of Chemistry and Physics.* 8 vol. ($8\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{2}$), 664 p. London, Longmans. 15 s.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. IV. Bd. 9. Heft. Red. v. Hoppe, Büchel u. Umlauf. Grand in-8°, p. 403-456, avec 35 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 1 m. 60 pf.

Osgood (W.-Fogg). — *Differential and integral calculus : a first course.* (Rev. ed.). In-12, xv-462 p. New-York, Macmillan. 2 $.

Foerster (Wilh.). — *Ueber Zeitmessung u. Zeitregelung.* (Wissen u. Können, *Sammlung v. Einzelschriften aus reiner und angewandter Wissenschaft.* Hrsg. v. B. Weinstein.) In-8°, 148 p. Leipzig, J.-A. Barth. Relié, 3 m.

Schimmack (Rud.). — *Axiomatische Untersuchungen ueber die Vektoraddition.* [*Nova Acta Academiæ cæsareæ Leopoldino-Carolinæ germanicæ naturæ curiosorum.* Tome XC. E. s. t. : Abhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforcher. 90. Bd. (32,5 × 25). Halle.] 104 p. Leipzig, W. Engelmann. 5 m. 50 pf.

Borel (Émile). — *Éléments de la théorie des probabilités.* In-8°, viii-192 p. Paris, A. Hermann. 6 fr.

Böttcher. — *Beweise f. die Heronsformel aus zwei Jahrtausenden.* In-8°, 24 p. avec fig. et 1 pl. Leipzig, J.-C. Hinrichs' Verl. 1 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PIERRE BOUTROUX, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier. — LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE, professées au Collège de France, avec une Note de M. *Paul Painlevé*.

Cet Ouvrage fait partie de la collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Borel. C'est un Livre dont le sujet et les méthodes sont entièrement neufs, qui abonde en vues originales et profondes, et par lequel l'auteur aura précédé les chercheurs dans une voie où il leur est impossible de ne pas engager tôt ou tard les Mathématiques.

Le but où convergent les efforts de M. Boutroux est l'étude intégrale, inaugurée par les travaux de M. Painlevé (et non plus locale au sens de Cauchy), des fonctions analytiques qui satisfont à une équation différentielle du premier ordre. D'ailleurs, parmi ces dernières, convient-il de se borner à celles pour lesquelles la dérivée de la fonction inconnue s'exprime uniformément et même rationnellement relativement à la variable indépendante et à la fonction. A qui est étranger à cet ordre de recherches, le problème ainsi réduit semble devenu très particulier dans son objet. En réalité, il offre encore une incroyable diversité de cas.

Le Chapitre Ier, intitulé *Notions fondamentales*, est consacré dans sa partie initiale à la démonstration et aux applications du célèbre théorème de M. Painlevé d'après lequel les intégrales des équations algébriques en y et y' n'admettent, en dehors de certains points fixes, aisés à déterminer au moyen des coefficients de l'équation, que des points critiques algébriques ou des pôles. De ce théorème résulte qu'en dehors de certains cas particuliers se ramenant à l'équation de Riccati, l'équation

$$(1)\qquad y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

où P et Q sont des polynomes en x et y, a comme intégrales des fonctions à une infinité de branches. M. Boutroux exclut systématiquement du plan qu'il se trace la théorie des équations dont l'intégrale générale n'admet qu'un nombre fini de déterminations. D'ailleurs, la Note de M. Painlevé, à qui cette théorie est entièrement due, précise admirablement les résultats acquis et l'énoncé des nouveaux problèmes à résoudre. L'auteur des *Leçons* s'occupe donc uniquement des équations à intégrale générale multiforme.

Vient d'abord un très intéressant théorème, dû à M. Boutroux, sur la fonction-limite d'une suite de branches d'une même fonction multiforme, fonction qui est holomorphe en tout point autour duquel ne s'accumulent pas les points critiques de la fonction multiforme, et dont la dérivée est limite de la suite des dérivées des branches considérées.

Le Chapitre I se termine par quelques théorèmes relatifs aux propriétés de l'intégrale générale considérée comme fonction de la constante arbitraire. Il résulte de ces propriétés qu'il est possible d'appliquer à l'intégrale une sorte de raisonnement par continuité, quand la constante arbitraire varie continûment dans son plan. On entrevoit ainsi que l'étude de l'intégrale générale devient abordable, si l'on connaît parfaitement une intégrale particulière de l'équation.

L'étude de l'intégrale générale dans tout le plan de la variable ne peut pas être entreprise directement en l'état actuel de nos connaissances, puisque celles-ci, déjà très incomplètes, pour ce qui touche à la théorie générale des fonctions uniformes, sont, à vrai dire, inexistantes, pour ce qui est des fonctions multiformes; l'auteur des *Leçons* est donc forcé de procéder d'abord à l'étude *locale* d'une fonction multiforme en un point autour duquel s'échangent une infinité de branches de la fonction.

M. Boutroux, qui a choisi pour sujet d'une très belle Thèse le rôle de la croissance dans les propriétés d'une fonction uniforme autour d'un point essentiel isolé [*Sur quelques propriétés des fonctions entières*, Thèse (*Acta mathematica*, 1904)], n'a pas voulu oublier ce point de vue si riche en féconds aperçus, et il a montré comment il est possible d'obtenir des renseignements très précis sur la croissance de chacune des branches d'une fonction multiforme au voisinage d'un point critique transcendant, quand

cette fonction est intégrale d'une équation (1) et quand on uniformise chaque branche au moyen d'un système adéquat de coupures. Il distingue parmi ces fonctions plusieurs types de croissance. Le *type exponentiel*, qui se rencontre exclusivement dans le cas où le degré de P surpasse celui de Q exactement d'une unité, appartient à des intégrales ressemblant beaucoup à des fonctions entières, en particulier dépourvues comme elles d'infinis. Si le degré de P est égal ou inférieur à celui de Q, les intégrales sont encore dépourvues d'infinis, mais leur croissance est inférieure à celle d'une certaine puissance positive de x. Enfin, si le degré de P surpasse celui de Q de deux unités au moins, l'intégrale possède des infinis à distance finie; mais, en entourant chacun d'eux d'un petit cercle, comme dans la théorie des fonctions méromorphes, dans le reste du plan on a une croissance analogue à celle du cas précédent et dite du *type rationnel*.

M. Boutroux applique ces remarquables résultats à l'équation

$$(2) \qquad y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3,$$

où les A sont des polynomes en x.

Le Chapitre III est consacré à une classification partielle des singularités critiques transcendantes isolées. C'est évidemment la partie de l'Ouvrage la plus malaisée à résumer, à cause des développements indispensables à l'intelligence des notions introduites. Indiquons la distinction entre les points directement ou indirectement critiques. S'il est possible de trouver : 1° une suite $x_0, x_1, \ldots$ de points critiques (algébriques) de la fonction admettant un point X pour point-limite unique; 2° une suite de déterminations $y_0, y_1, y_2, \ldots$ de la fonction telle que en x_n se permutent y_n et y_{n+1}, le point X est dit *indirectement critique*. *A priori*, un point peut être indirectement critique de plusieurs façons ou même d'une infinité de manières, s'il est possible de former une infinité de couples distincts de suites x_n, y_n.

Si l'on n'épuise pas ainsi toutes les branches de la fonction, s'il en reste une infinité s'échangeant entre elles autour de X, M. Boutroux dit que X est *directement critique*. Les déterminations de la fonction sont fixées par exemple de la façon suivante : en un point $\bar{x}$ où toutes les branches sont holomorphes, chacune est définie par sa valeur en ce point. On les prolonge en tou

autre point du plan par cheminement rectiligne. En particulier, si le chemin aboutit à un point critique, on sait de la sorte quelles sont les branches échangées par ce point.

Un point critique X est dit *de première espèce* si *toutes* les permutations qu'on peut effectuer en tournant autour de ce point trouvent place dans la suite unilinéaire $y_1, y_2, \ldots$, où chacune ne figure qu'une fois ou un nombre *fini* de fois, le point x_n échangeant y_n et y_{n+1}. La première espèce se divise en deux sortes, chaque sorte en deux types, selon les diverses hypothèses possibles.

Mais la nature d'une singularité transcendante peut être prodigieusement plus complexe. M. Boutroux donne un exemple de point singulier d'espèce supérieure à la première et appartenant néanmoins à une intégrale d'une équation de la famille (2). En revanche, parmi les points singuliers de Briot et Bouquet, points qui appartiennent à des types très divers, plusieurs catégories d'entre eux trouvent place dans cette classification (Chapitre IV).

L'étude locale d'une intégrale de l'équation (2) étant rendue possible autour de tout point, même transcendant, et limite de points critiques algébriques, l'auteur revient au problème général posé au début des *Leçons :* étudier chaque intégrale dans tout le plan de la variable indépendante. La question se précise ainsi : trouver quelles relations existent entre les diverses singularités transcendantes d'une même intégrale. L'auteur montre sur deux exemples empruntés aux équations (2) la marche qui conduit à la solution. Dans le premier, il démontre que les singularités transcendantes sont liées par une relation invariante. Dans le second, qu'elles sont totalement indépendantes, en sorte que les résultats généraux font défaut, sinon les méthodes qui permettraient de les atteindre.

J. Chazy, A. Denjoy.

GOMES TEIXEIRA. — OBRAS SOBRE MATHEMATICA, publicadas por ordem do Governo portuguez. T. V. In-4°, 497 p. Coimbre, imprimerie de l'Université, 1909.

Ce Volume contient la fin du grand travail de M. Gomes Teixeira sur les courbes célèbres ; il se rapporte surtout aux courbes transcendantes.

Beaucoup de ces courbes sont liées à l'invention ou aux progrès du Calcul différentiel et intégral ou de la Mécanique rationnelle; il faut savoir beaucoup de gré à M. Gomes Teixeira de nous en raconter à la fois l'histoire et les propriétés.

Les recherches qu'il a dû faire à ce sujet sont considérables : elles lui ont cependant laissé le temps de nous montrer son habileté de géomètre.

J. T.

MÉLANGES.

RAPPORT SUR LE PRIX OSIRIS A DÉCERNER EN 1909 (100 000fr) (1);

PAR M. ÉMILE PICARD.

Le prix de cent mille francs, que la générosité de M. Osiris permet à l'Institut de décerner tous les trois ans, est destiné à « récompenser la découverte ou l'œuvre la plus remarquable dans les sciences, dans les lettres, dans les arts, dans l'industrie, et généralement dans tout ce qui touche à l'intérêt public ». Il doit être décerné cette année pour la troisième fois. Nous couronnions il y a six ans les brillants succès remportés dans le traitement d'une maladie terrible par un de nos confrères, digne continuateur de Pasteur, et, il y a trois ans, le prix fut accordé à l'éminent his-

(1) Rapport lu dans la séance extraordinaire de l'Institut, le 16 juin 1909.

torien qui venait de terminer son grand Ouvrage sur l'Europe et la Révolution française.

Il n'était assurément pas dans les intentions de M. Osiris qu'il y eût en quelque sorte un roulement entre les différents ordres d'études ressortissant aux diverses Académies de l'Institut de France. Aussi votre Commission s'est-elle uniquement préoccupée de rechercher la découverte ou l'œuvre qui dans les trois dernières années a le plus vivement attiré l'attention et paraît avoir les conséquences les plus importantes. Elle a unanimement jugé qu'un progrès considérable venait d'être fait dans la question de l'aviation, progrès intéressant à la fois les sciences, l'industrie et l'intérêt public, suivant les termes mêmes du testament que je rappelais plus haut. Les étrangers ne pouvant d'après la donation participer au prix (1), nous vous proposerons donc de décerner le prix Osiris à l'aviation française, et nous vous indiquerons dans un moment les considérations qui nous ont guidés pour faire un choix parmi les chercheurs opiniâtres qui se consacrent à la conquête de l'air.

Sans remonter jusqu'au légendaire Icare et la colombe mécanique d'Archytas de Tarente, il est utile de jeter d'abord un rapide coup d'œil sur l'histoire de la navigation aérienne. A la Renaissance, Léonard de Vinci comprend que, pour voler, l'oiseau doit prendre son point d'appui sur l'air et, après ses études sur le vol, décrit l'hélicoptère et le parachute. Dans les deux siècles qui suivent de nombreux documents nous montrent l'intérêt suscité par la navigation aérienne ; on ne se borne pas d'ailleurs au plus lourd que l'air, et à la fin du XVIIe siècle plusieurs pressentent déjà l'invention des ballons. Vers 1750 apparaissent de divers côtés des projets d'hommes volants et de machines volantes. Des appareils sont construits, sortes d'orthoptères munis d'ailes à charnières qui frappent l'air normalement, mais ils sont expérimentés sans succès ; on propose même d'adjoindre à l'hélicoptère une hélice propulsive pour la translation horizontale. Il est remarquable de voir signalés dès cette époque quelques-uns des dispositifs qui devaient être essayés plus tard.

---

(1) Une exception est faite seulement quand le prix Osiris est décerné dans une année où il y a une Exposition universelle à Paris.

Ces tentatives avec le plus lourd que l'air, sans avoir donné encore aucun résultat pratique, furent interrompues en 1783 par l'expérience célèbre des frères Montgolfier, qui souleva un enthousiasme indescriptible. Six mois après l'expérience d'Annonay, Meusnier présentait à l'Académie des Sciences un Mémoire admirable publié seulement beaucoup plus tard. On trouve dans son projet les conditions essentielles qui devaient conduire aux ballons dirigeables : forme allongée du ballon, ballonnet intérieur pouvant être rempli d'air, et emploi d'un propulseur hélicoïdal. C'est en suivant la voie ouverte par Meusnier, mort en 1793 au siège de Mayence, que le colonel Renard édifia définitivement la théorie de la dirigeabilité des ballons et put réaliser sa mémorable expérience de 1884.

Malgré les triomphes des aérostats, le plus lourd que l'air eut toujours ses croyants ; toutefois, pendant la première moitié du siècle dernier, ils ne furent guère encouragés. Des analyses insuffisantes du vol des oiseaux, signées de noms éminents, montraient qu'une hirondelle devait fournir un travail énorme pour se maintenir dans l'air, ce qui faisait dire plus tard que les Mathématiques démontraient alors l'impossibilité de voler pour les oiseaux. Il eût été moins piquant mais plus exact de dire que certains mécaniciens, ayant mal observé les mouvements des oiseaux, établissaient par leurs savants calculs que les conditions réelles du vol sont différentes de celles qu'ils avaient supposées ; l'erreur provenait de ce qu'on voulait étudier le vol à l'aide de la résistance qu'un plan éprouve en se mouvant normalement dans l'air. Cependant, sir G. Cayley dès 1809 et Dubochet en 1834 indiquaient déjà que le vol est avant tout un glissement ; ils remarquaient que, en général, l'oiseau s'envole tête au vent. Plusieurs autres, comme Hauvel et Wenham, étaient aussi les champions de la théorie du glissement.

C'est seulement vers 1865 que l'attention se trouva de nouveau portée vers l'aviation, et les discussions de la Société française de Navigation aérienne, très suivies à cette époque, se lisent encore aujourd'hui avec intérêt. L'Académie des Sciences, depuis les essais de Borda datant de l'ancienne Académie, s'était toujours préoccupée des problèmes relatifs à la résistance des fluides ; en 1874, sur la proposition de Joseph Bertrand, elle mit au concours

la théorie mathématique du vol des oiseaux. Le Mémoire d'un des membres les plus actifs de la Société de Navigation aérienne, doué d'un esprit des plus pénétrants, Alphonse Pénaud, fut récompensé en 1875. La clef de l'aviation est, pour Pénaud, dans le fait que l'oiseau, dans le vol avançant, attaque l'air sous un angle très petit. Il insiste sur l'avantage qu'il y a à attaquer l'air obliquement, et il illustre la théorie en construisant un jouet qui réalise le premier appareil mécanique ayant réussi à voler, jouet soutenu par des ailes concaves, dans lequel le moteur est un caoutchouc tordu actionnant une petite hélice, et dont une queue assure la stabilité. L'analyse des trois genres de vol, vol ramé, vol plané, vol à voile, était déjà ancienne et paraît remonter à Dubochet : elle est approfondie par Pénaud, et peu après les photographies instantanées de Marey viennent fixer certaines interprétations douteuses. Dans le vol plané, l'aile rencontre généralement l'air sous un angle assez petit et joue ainsi le rôle d'un aéroplane, le travail musculaire de l'oiseau étant assez restreint et dépensé surtout pour la propulsion dans le sens horizontal. Nous devons encore rappeler la discussion faite par Pénaud de la loi de la résistance éprouvée par un plan mince se mouvant dans un fluide ; cette résistance, à vitesses relatives égales, dépend de l'angle d'inclinaison. On avait regardé longtemps, avec Newton, qu'elle était proportionnelle au carré du sinus de cet angle, ce qui est inadmissible. Borda, suivi par G. Cayley, avait, semble-t-il, proposé pour la première fois la loi de la première puissance du sinus ; Pénaud, ayant expérimenté sur la chute des corbeaux, trouve ses observations conformes à la loi de la première puissance et s'en sert pour mesurer certains coefficients. Les lois empiriques de cette nature peuvent avoir d'ailleurs des formes diverses, et plusieurs formules ont été proposées conduisant sensiblement aux mêmes résultats.

Nous voyons donc que les idées inexactes sur le vol des oiseaux, qui, malgré quelques critiques avisés, avaient régné si longtemps, étaient abandonnées vers 1880. Le principe du glissement, au moins dans le vol plané, n'est plus contesté ; la sustentation apparaît comme due à la propulsion, la composante verticale de la poussée exercée par le fluide sur le sustentateur faisant équilibre au poids. Aussi, peu à peu, les inventeurs renoncent au type orthoptère, les partisans de l'hélicoptère se font plus rares, et

l'effort des chercheurs se porte sur l'aéroplane, qu'il s'agit d'étudier au point de vue mécanique. La position du centre de pression, l'influence de l'inclinaison et de la forme de la voiture jouent un rôle essentiel dans l'étude des conditions d'équilibre et dans celle des diverses stabilités. Dans ces questions difficiles, beaucoup d'ingéniosité a été dépensée, et des résultats importants ont été obtenus, quoique l'accord soit loin d'être établi sur tous les points. La connaissance de principes généraux de la Dynamique est sans doute indispensable pour raisonner juste en ces matières, mais la théorie seule est actuellement impuissante dans les problèmes si complexes relatifs à la résistance des fluides. Elle ne peut, par exemple, nous renseigner sur la position du centre de pression indispensable à obtenir ; c'est à l'expérimentation qu'il faut demander les données que la théorie ne nous fournit pas.

Deux méthodes furent suivies dans ces recherches. La première consiste à rechercher expérimentalement les conditions d'un planement artificiel, soit qu'on se serve de tunnels avec courants d'air, soit qu'on utilise un manège tournant. Ce sont là des expériences de laboratoire faites sur de petits modèles et devant être interprétées judicieusement ; car, en toute rigueur, il ne peut exister deux systèmes ailés mécaniquement semblables. La seconde méthode consiste à réaliser un planement dans l'air sans moteur. Cette méthode fut inaugurée par l'ingénieur allemand Lilienthal, qui, dans un très grand nombre de glissades faites d'un point élevé, après s'être donné un certain élan, put étudier les conditions d'équilibre et de stabilité ; l'exercice ne laissait pas d'être dangereux, car le pilote devait, par des mouvements appropriés de son corps, maintenir la stabilité. On sait que, en 1896, l'infortuné voyageur aérien perdit la vie, par suite, à ce que l'on croit, de la rupture d'un des assemblages de sa machine.

Lilienthal eut d'abord des continuateurs en Amérique ; parmi eux, il faut signaler tout d'abord un ingénieur français installé aux États-Unis, M. Chanute, qui munit l'appareil de la queue stabilisatrice de Pénaud, en la rendant susceptible de rotation au moyen d'un joint à la Cardan, et employa le premier d'une manière effective le biplan. L'aviation doit beaucoup aux observations de M. Chanute qui, en cessant ces travaux, engagea les frères Wright dans la voie où ils devaient rencontrer les succès connus de tous.

En 1900, Wilbur et Orville Wright reprennent les expériences de glissement avec quelques idées originales et font faire un grand progrès à la pratique intérieure ; la queue stabilisatrice est placée à l'avant et devient le gouvernail horizontal ou de profondeur, mobile autour d'un axe horizontal. Le profil des ailes est aussi étudié avec soin. Quoiqu'on parle toujours de biplan ou de monoplan, les surfaces sustentatrices ne sont pas planes ; il y a un grand intérêt à leur donner une légère concavité, l'attaque en marche régulière ayant lieu suivant le premier élément de la courbe. Cette forme permet un écoulement plus facile pour l'air, et diminue la résistance à l'avancement. Ces expériences, prolongées pendant près de trois ans sur les grèves de l'Atlantique, apprirent aux frères Wright, suivant le mot de M. Chanute, leur métier d'oiseau.

Dans tous ces essais, aucun moteur n'avait été placé sur l'appareil ; d'après des témoignages restés longtemps incertains, mais auxquels on doit aujourd'hui accorder créance, les frères Wright, ayant construit un moteur de leur invention, firent pour la première fois, à la fin de 1903, un vol de trois cents mètres, et en 1904 des vols de cinq kilomètres dans de bonnes conditions de stabilité.

Pendant ces premiers exploits américains, exploits restés un peu mystérieux et dont un écho arrivait seulement en Europe, l'aviation trouvait en Europe un apôtre convaincu dans le capitaine Ferber ; celui-ci se livrait à des recherches théoriques sur la stabilité et reprenait les glissements sur l'air qui furent aussi reproduits à Berck-sur-Mer par MM. Archdeacon et Voisin. Ces essais permettaient d'obtenir les valeurs de certaines constantes caractéristiques, en même temps qu'ils habituaient au vol ces ardents adeptes de l'aviation. La pensée que Wright avait pu se maintenir dans l'air excitait les chercheurs. N'en va-t-il pas ainsi dans tous les domaines scientifiques, l'ingéniosité et la puissance de l'esprit étant augmentées quand nous savons que le problème qui nous occupe n'est pas insoluble ? A cet égard, les nouvelles incertaines venues de l'autre côté de l'Atlantique ont été un stimulant puissant pour les aviateurs français, qui, comme les Américains W. et O. Wright, ont été ainsi à leur début les élèves de notre compatriote M. Chanute.

Quand la théorie du mouvement de l'aéroplane fut correctement

posée et quand on fut à peu près maître des moyens propres à assurer la stabilité, une question importante fut celle d'un moteur suffisamment léger. En France, les nécessités de l'automobilisme avaient conduit à réaliser de grands progrès dans l'industrie des moteurs. Un moteur à explosion, construit spécialement pour l'aviation par un ingénieur très distingué, M. Levavasseur (1), et connu sous le nom de moteur Antoinette, se trouva remplir les conditions désirables de légèreté. Nos aviateurs exercés « connaissant bien leur métier d'oiseau » étaient donc dans les meilleures conditions et ils remportèrent l'année dernière les brillants succès auxquels nous avons tous applaudi. Je dois toutefois rappeler que c'est un Brésilien, M. Santos-Dumont, qui, à la fin de 1906, a construit le premier en Europe un appareil qui, muni d'un moteur Antoinette de 50 chevaux, put s'élever seul et parcourir plus de deux cents mètres (2).

Cet historique très incomplet vous aura montré, Messieurs, combien nombreux ont été ceux qui ont apporté leur pierre au grand œuvre de l'aviation, depuis les observateurs attentifs du vol des oiseaux jusqu'aux constructeurs de moteurs, et parmi ces pionniers je tiens à rappeler encore le colonel Renard, que ses travaux sur les dirigeables ont rendu célèbre, mais dont les études expérimentales sur les hélices sont également précieuses pour les constructeurs d'aéroplanes. Votre commission rend justice à tous ces efforts ; mais, devant nécessairement faire un choix entre des collaborateurs si nombreux et si variés, elle s'est souvenue que l'année 1908 restera mémorable dans l'histoire de l'aviation. Aussi a-t-elle décidé de vous proposer de couronner les constructeurs français d'aéroplanes qui ont réalisé en 1908 des appareils capables de quitter les champs de manœuvres et d'effectuer de véritables voyages aériens en pleine campagne, et ont été vraiment les émules des célèbres aviateurs américains dans les luttes pacifiques de l'année dernière pour la conquête de l'air. A la question ainsi posée,

(1) M. Levavasseur fait expérimenter en ce moment un monoplan qui semble donner des résultats très satisfaisants.

(2) Je laisse de côté dans cet historique un appareil remarquable, l'avion de M. Ader, expérimenté à Satory le 14 octobre 1897, les résultats de cette expérience ayant été discutés et les témoignages officiels n'ayant jamais été publiés. Le moteur de M. Ader était une machine à vapeur.

la réponse était facile, et nous ne pouvions avoir aucune hésitation. Citons ici deux dates : un appareil Voisin monté par Farman a fait le premier voyage en aéroplane le 30 octobre 1908, allant de Châlons à Reims, et M. Blériot, conduisant lui-même sa machine, a fait le lendemain de Toury à Artenay, avec retour, le premier circuit fermé par escales. Nous vous proposons donc de partager le prix Osiris entre MM. *Gabriel Voisin* et *Louis Blériot*.

Ces deux éminents ingénieurs ont été quelque temps associés pour construire et expérimenter des appareils d'aviation et se sont ensuite spécialisés, le premier dans la construction des biplans, et le second dans celle des monoplans. On discute encore beaucoup sur le mérite des monoplans et des biplans. Une telle comparaison faite *a priori* est assez vague, les arguments à invoquer n'étant pas les mêmes suivant que l'on comparera, par exemple, un monoplan Blériot à un biplan du type Wright ou du type Voisin, la résistance à l'avancement différant notablement dans ces deux biplans. Il est assez vraisemblable que, suivant le genre de transport, la préférence devra être donnée au biplan ou au monoplan ; les locomotives des trains de marchandises n'ont-elles pas d'autres formes que celles des trains rapides ?

L'aéroplane que construit M. Gabriel Voisin, associé à son frère Charles Voisin, est composé d'une grande cellule formée de deux plans sustentateurs superposés mesurant 10^{m} d'envergure sur 2^{m} de large et espacés de $1^{m},50$. Cette cellule porte le moteur, le pilote et le châssis d'atterrissage principal avec ses deux roues. Une plus petite cellule, formée de deux plans superposés de $2^{m},50$ d'envergure sur 2^{m} de large espacés de $1^{m},50$, est placée à l'arrière et fixée par une armature rigide aux deux plans sustentateurs ; elle porte deux petites roues et elle contient le gouvernail vertical donnant la direction dans le sens horizontal. En avant de la cellule principale est placé le gouvernail de profondeur destiné à faire monter ou descendre l'appareil. La largeur totale de l'ensemble est de $11^{m},50$. La surface portante est de 50 mètres carrés, et le poids, en ordre de marche, y compris le pilote, varie de 540^{kg} à 570^{kg}. Nous avons dit que les surfaces portantes n'étaient pas planes ; les profils sont courbes, le maximum de la flèche se trouvant au premier tiers avant et mesurant $\frac{1}{15}$ de la largeur du plan. L'angle de l'aile (c'est-à-dire de sa corde) avec le

plan horizontal est au repos de *huit* degrés ; après le soulèvement, lorsque l'appareil aborde la marche horizontale, la vitesse de l'ensemble atteignant 18^m ou 19^m à la seconde, l'angle d'incidence diminue au point de se réduire à environ *deux* degrés.

Le moteur employé par M. Voisin est un moteur Antoinette ; il tourne à 1100 tours par minute et donne à cette vitesse de 36 à 39 chevaux. L'hélice, placée à l'arrière de la grande cellule d'avant, est montée directement sur l'arbre moteur. On pouvait craindre que l'emploi d'une seule hélice produisît un déversement transversal ; en fait, il n'en est rien. Un contrepoids convenablement placé ou un léger décentrage avait d'abord paru nécessaire, mais il semble que l'air lancé par l'hélice dans la cellule arrière suffise à lui seul pour empêcher toute tendance à la rotation. La forme cellulaire employée par le constructeur est stable d'elle-même, comme l'a montré l'expérience, au moins quand il n'y a pas de remous violents, et c'est grâce à cette stabilité automatique que le biplan Voisin nous apparaît si bien assuré sur sa trajectoire. Il ressemble à une lourde flèche traversant l'espace, et de plus prend de lui-même dans les virages l'inclinaison convenable.

La stabilité automatique est d'autant plus importante ici que l'appareil ne possède, comme disent les géomètres, que deux degrés de liberté, c'est-à-dire que le pilote dispose seulement, pour rétablir l'équilibre troublé, de *deux* variables relatives l'une au gouvernail de direction, l'autre au gouvernail de profondeur.

Le biplan Voisin est un appareil admirablement étudié, et qui a fait ses preuves. C'est avec lui que Farman et M. Delagrange ont effectué leurs courses magnifiques. En dehors de circontances exceptionnelles, il est d'un maniement relativement facile et n'exige pas du conducteur une attention de tous les instants, comme il arrive pour le *flyer* de Wright ; il est enfin remarquablement apte à la formation des pilotes.

L'aéroplane de M. Louis Blériot, qui a été le promoteur du monoplan, est d'un tout autre type. Sans rien changer d'essentiel à l'appareil de l'année dernière, le constructeur y a apporté quelques modifications en plaçant le pilote et le passager au-dessous du plan porteur au lieu de les placer en dessus ; de plus, les ailerons mobiles à l'extrémité des ailes qui restaient fixes ont été remplacés par un gauchissement de ces dernières. Sous la forme la plus

récente, le monoplan de M. Blériot, que primitivement on comparait à une libellule, ressemble maintenant davantage à un oiseau; il se compose d'un plan sustentateur légèrement incurvé et susceptible de gauchissement à ses extrémités, les mouvements de celles-ci étant solidaires, de telle sorte que l'une s'abaisse quand l'autre se relève. L'envergure est de $9^{m},50$; la profondeur des plans étant $2^{m},40$ et l'angle d'attaque de *neuf* degrés; la surface portante est de 22 mètres carrés. L'hélice unique est à l'avant, et les voyageurs (l'appareil est construit pour le pilote et un passager), assis dans le châssis central sous le centre de l'aile, ont devant eux l'hélice et le moteur dont la puissance est de 35 chevaux; l'hélice tourne au point fixe à 600 tours par minute. Le châssis central est muni de deux roues et se prolonge pérpendiculairement au plan sustentateur par une poutre évidée. Celle-ci porte un empennage horizontal fixe, le gouvernail de profondeur et le gouvernail vertical de direction; elle se termine par une petite roue qui avec les deux premières supporte l'appareil au repos. M. Blériot a imaginé un dispositif extrêmement ingénieux qui commande les divers mouvements; en inclinant l'arbre du volant de manœuvre dans le sens transversal ou dans le sens longitudinal, on produit le gauchissement des ailes ou l'on fait tourner autour de son axe horizontal le gouvernail de profondeur, et des pédales agissent sur le gouvernail de direction. La charge normale prévue pour l'appareil avec deux voyageurs est de 500^{kg}: il est donc chargé à 25^{kg} par mètre carré.

Les différences sont sensibles entre le monoplan de M. Blériot et l'appareil que nous avons décrit plus haut. D'abord l'hélice et le gouvernail de profondeur sont dans une position inverse par rapport au pilote, mais ce n'est là qu'un détail. Un point essentiel est que la stabilité n'est pas assurée ici plus ou moins automatiquement par le cloisonnement cellulaire; mais, tandis que dans le biplan Voisin nous n'avions que deux degrés de liberté, le gauchissement des ailes met ici une troisième variable à la disposition du conducteur. L'appareil, plus léger et offrant moins de résistance, se trouve davantage dans la main d'un pilote attentif. Ce n'est plus le mouvement de la flèche: c'est le mouvement plus souple de l'oiseau, mais présentant actuellement plus de risques surtout dans les virages et demandant un grand sang-froid au conducteur. J'ai rappelé tout à l'heure que, entre les mains de

l'habile et audacieux pilote qu'est M. Blériot, le monoplan a pour la première fois effectué dans la Beauce, entre Toury et Artenay, un véritable voyage aérien.

Je ne me hasarderai pas, en finissant, à parler de l'avenir réservé aux monoplans, aux biplans, voire même aux triplans, d'autant qu'on peut imaginer d'autres formes d'aéroplanes. Je ne chercherai pas non plus dans combien de temps les aéroplanes remplaceront les chemins de fer, ni si cette substitution sera au plus grand bénéfice de la guerre ou de la paix. Laissons ce soin aux romanciers et aux politiques. Ce que nous pouvons dire, c'est que les véritables principes de la locomotion aérienne par le plus lourd que l'air sont définitivement posés, et que l'aviation est entrée dans la voie scientifique ; sur les aérodromes, véritables laboratoires de Physique, les mécaniciens avisés que sont plusieurs de nos constructeurs et de nos pilotes font chaque jour des expériences qui conduisent à modifier tels ou tels détails, et les progrès résulteront des observations accumulées. Vraisemblablement, quoique en pareille matière le métier de prophète soit dangereux, on ne s'écartera guère de quelques-unes des formes imaginées dans ces dernières années, mais on leur adjoindra des appareils propres à assurer la stabilité. Peut-être est-ce dans les moteurs qu'il y aura le plus d'imprévu, l'électricité ménageant probablement bien des surprises, sans parler des sources d'énergie que peuvent nous révéler encore des découvertes comme celles faites en Physique depuis dix ans.

Quelque timides que doivent paraître un jour les essais actuels, l'histoire de l'aviation réservera une page aux voyages au long cours effectués pour la première fois en 1908. Aussi la Commission du prix Osiris vous propose-t-elle à l'unanimité de *partager en parties égales le prix entre M. Gabriel Voisin et M. Louis Blériot.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Connaissance des temps ou des mouvements célestes, pour le méridien de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1911, publiée par le Bureau des Longitudes. In-8°, VIII-828 p. et planche en coul. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

DUBOIS (E.). — *Éphémérides astronomiques et annuaire des marées pour* 1910, 40e année. Paris, A. Challamel. 1 fr. 50 c.

ECKHARDT (ERNST). — *Zurückführung der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kreisvierecks.* Neue Grundlegg. f. die Formeln der sphär. Trigonometrie. Grand in-8°, VI-155 p. avec 35 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 4 m. 40 pf.; relié, 5 m.

THIEME (HERM.). — *Die Elemente der Geometrie.* (*Grundlehren der Mathematik f. Studierende u. Lehrer.* II. Tl. : Die Grundlehren der Geometrie. Bearb. v. *W.-Fr. Meyer* u. *H. Thieme.*) 1. Bd. Grand in-8°. XII-394 p. avec 323 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 9 m.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. *Carl Orthmann.* Im Verein m. anderen Mathematikern u. unter besond. Mitwirkg. v. *Fel. Müller, Alb. Wangerin, Erich Salkowski* sowie der Berliner mathemat. Gesellschaft hrsg. v. *Emil Lampe.* 37. Bd. Jahrg. 1906. 3. Heft. Grand in-8°, p. LXXIV et 693-1072. Berlin, G. Reimer. 16 m.

JORDAN (C.). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* 3e édition. T. I : Calcul différentiel. In-8°, XV-621 p. avec fig, Paris, Gauthier-Villars. 17 fr.

PETERS (J.). — *Nouvelles Tables de calcul pour la multiplication et la division de tous les nombres de* 1 *à* 4 *chiffres.* In-4°, VI-500 p. Paris, Gauthier-Villars. 19 fr.

PICARD (E.). — *Traité d'Analyse,* 2e édition. T. III : Des singularités, des intégrales, des équations différentielles; Des courbes définies par des équations différentielles; Équations linéaires; Analogie entre les équations algébriques et les équations linéaires. In-8°, VII-607 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 18 fr.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. 18e série. Fiches 1701 à 1800. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

G. CASTELNUOVO. — Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 aprile 1908), publicati per cura del Secretario générale. Vol. I, petit in-4°, 210 p. Roma, Tipografia della R. Accad. dei Lincei, 1909.

Les Actes du Congrès de Rome formeront trois Volumes comprenant ensemble un millier de pages : le premier, qui vient de paraître, contient l'historique du Congrès, la liste de ceux qui y ont assisté, les ordres du jour des séances, les discours et conférences qui ont été lus en séance générale. Le second Volume contiendra les communications sur l'Arithmétique, l'Algèbre, l'Analyse et la Géométrie; le troisième, celles qui concernent la Mécanique et ses applications, la Physique mathématique, la Géodésie, les questions philosophiques, historiques et didactiques.

M. Guccia, non content du prix qu'il avait fondé ([1]), avait généreusement offert de mettre à la disposition du Congrès, pour toutes ses publications, les presses du Cercle mathématique de Palerme.

Effectivement, l'envoi des circulaires et invitations a été fait par le Cercle de Palerme et très largement, comme les lecteurs du *Bulletin* le savent certainement. En outre, les *Rendiconti* ont déjà publié des extraits de plusieurs conférences du Congrès. Un malheureux accident de machines a seul empêché M. Guccia de compléter l'exécution de ses offres en publiant les Actes du Congrès. C'est l'imprimerie de l'Académie des Lincei qui s'est chargée de cette publication.

Voici la liste des conférences que contient le présent Volume; les lecteurs du *Bulletin* en connaissent déjà trois, dues à

([1]) La Commission, composée de MM. Noether, Poincaré et Segre, a decerné ce prix à M. Francesco Severi, pour l'ensemble de ses travaux.

MM. Darboux, Poincaré et Picard ; le souvenir qu'ils en ont gardé les excitera à vouloir lire et étudier les autres, et ce désir sera sans doute plus vif encore s'il les ont déjà entendues à Rome ; celle de M. Veronese paraît dans le présent numéro :

V. Volterra. — Les Mathématiques en Italie dans la seconde moitié du XIXe siècle.

G. Mittag-Leffler. — Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques d'une variable complexe.

A.-R. Forsyth. — Sur l'état actuel de la théorie des équations aux dérivées partielles, relativement à l'intégration formelle.

G. Darboux. — Les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie infinitésimale.

W. van Dyck. — L'Encyclopédie des Sciences mathématiques.

S. Newcomb. — La théorie du mouvement de la Lune ; son histoire et son état actuel.

H.-A. Lorentz. — Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.

H. Poincaré. — L'avenir des Mathématiques.

E. Picard. — La Mathématique dans ses rapports avec la Physique.

G. Veronese. — La Géométrie non archimédienne.

M. Noether, H. Poincaré, C. Segre (rapporteur). — Rapport sur le concours international pour la « Médaille Guccia ».

On ne saurait reprocher aux congressistes d'employer, chacun, le langage qui lui est familier : assurément les Italiens, en particulier, auraient manqué à tous leurs devoirs, envers leur belle langue et envers leurs hôtes, s'ils avaient eu l'étrange fantaisie d'en employer une autre, chez eux. Mais il est impossible à des Français de ne pas se réjouir en voyant des hommes comme M. Mittag-Leffler, comme M. Lorentz, comme Newcomb, se servir de la langue française dans un Congrès international.

J. T.

PESLOÜAN (L. DE). — LES SYSTÈMES LOGIQUES ET LA LOGISTIQUE. *Étude sur l'enseignement et les enseignements des Mathématiques modernes.* 1 vol. in-8 ; 446 p. Paris, Marcel Rivière, 1909.

M. Lucas de Pesloüan est plein de qualités : il a la fraîcheur, l'ardeur et l'entrain de la jeunesse, de l'abondance et de l'aisance dans le développement, des enthousiasmes qui plaisent, des admirations qui montrent la valeur de son jugement et l'élévation de son esprit ; il imite Pascal, qui est le plus inimitable des modèles ; mais il l'imite parce qu'il l'aime, et il le cite : son ironie est d'ailleurs moins perfide que celle de Louis de Montalte. On le lit sans ennui, et cela est un mérite pour qui parle de Logistique. Il est vrai qu'il n'en parle que peu. Anaxagore voulait que tout fût dans tout ; M. de Pesloüan se contente de dire que tout tient à tout et, à propos de tout, il parle de tout; encore, lui reste-t-il presque tout à dire ; on s'étonne quand il s'arrête et je crois bien qu'il s'étonne lui-même de s'arrêter ; mais, dit-il, « c'est du travail pour une autre fois ». Voilà qui nous promet une belle bibliothèque ; il faut s'en réjouir :

M. de Pesloüan est fort sympathique. Il ne peut manquer de perdre ce que ses qualités ont d'excessif ; déjà, dans certaines parties de son Livre et sur les sujets sans doute qu'il a le mieux étudiés, il se montre capable de condenser sa pensée ; il en prendra l'habitude ; il saura sacrifier de jolies phrases et des plaisanteries trop aisées ; il s'apercevra que la satire et la fantaisie, pour porter et pour amuser, doivent contenir quelque réalité. Son inspecteur général, qui reproche aux professeurs de collège de ne pas donner à leurs élèves « le sentiment de la contingence des vérités mathématiques » ; son Jules Tannery, qui pérore dans les réunions publiques et qu'il faut laver du vilain reproche d'avoir engendré la Logistique, n'existent pas assez pour être comiques. Et ce n'est pas faire la critique de l'enseignement universitaire que de consacrer tout un Chapitre à un Livre qui n'a pas eu la moindre influence sur cet enseignement. Que cela soit dit sans méconnaître le talent dont l'auteur a fait preuve dans des travaux d'une autre nature. Passe pour M. Couturat ; celui-là vaut la peine qu'on l'attaque, et se défendra, s'il lui plaît : il a connu d'autres jouteurs. La fureur

de M. de Pesloüan contre lui est extraordinaire et inexplicable. Pour un peu, M. de Pesloüan l'accuserait d'avoir inspiré les articles que M. Mathieu a écrits sur Pascal dans la *Revue de Paris*.

Mais d'où vient cette fureur? S'étend-elle à toute la Logique déductive, à Aristote, à saint Thomas, aux scholastiques, aux Messieurs de Port-Royal, à M. Liard, à M. Lachelier, à tous ceux qui ont traité de cette Logique, ou est-ce seulement à la notation que M. de Pesloüan en veut? Cette notation est-elle si abominable que M. Couturat, qui, sans doute, ne l'a pas inventée, n'ait pu l'exposer sans commettre un crime irrémissible? Et pourquoi s'en prendre seulement à lui? M. de Pesloüan s'est-il contenté de lire M. Couturat et de regarder le formulaire de M. Peano? Il imite les *Provinciales*, mais Pascal, avant d'aiguiser ses flèches, se *documentait*, comme on dit aujourd'hui, ou se faisait documenter. La *littérature* (comme on dit encore) de l'Algèbre de la Logique n'est pas si étendue que M. de Pesloüan n'ait pu s'en tirer tout seul, et, s'il a trouvé que ce n'était pas la peine de tant lire, était-ce donc la peine d'écrire?

En tous cas, je crois pouvoir le rassurer; d'ici longtemps, on n'enseignera pas l'Algèbre de la Logique dans les lycées et collèges, on n'interrogera point sur cette Algèbre-là au baccalauréat, on ne créera pas de chaire de Logistique dans les Facultés de droit, et les horrifiques conséquences que prévoit M. de Pesloüan sont aussi chimériques que son inspecteur général.

Il se plaît à insister sur la richesse des intuitions d'où sont sorties les diverses disciplines mathématiques. Il a raison; il a raison aussi, à ce que je crois, de ne pas regarder la déduction comme l'origine des grandes découvertes mathématiques; il a raison d'exalter la beauté qui pénètre la Science et qui l'illumine; il a raison encore de faire ressortir le rôle qu'a joué, pour la critique des axiomes, la connaissance de certains faits mathématiques; mais c'est la réflexion sur les axiomes qui a conduit les géomètres à découvrir ces faits; c'est par le raisonnement déductif que les Mathématiques s'organisent et la solidité comme l'élégance des démonstrations contribuent à la beauté de la Science; enfin, l'analyse des intuitions premières, qui permet de distinguer, dans leur trésor confus, ce qui sert vraiment, ce qui est nécessaire et suffisant à la constitution de la Science, est un travail hautement

philosophique. Ici encore, que M. de Pesloüan se rassure : ce n'est pas dans les lycées français que les professeurs de Mathématiques passeront leur temps à cette subtile analyse ; j'imagine qu'elle intéresse davantage les philosophes, et cela est fort naturel ; qu'elle intéresse aussi quelques maîtres, qui ont l'esprit philosophique, cela me paraît désirable.

Ceux qui ont le mieux étudié les principes sont aussi, sans doute, ceux qui sont les plus discrets en en parlant ; ils savent trop à quelles difficultés ils se sont heurtés pour ne pas sentir qu'elles rebuteraient leurs élèves. Je suis bien persuadé que M. Richard, qui a longuement réfléchi sur les postulats de la Géométrie et qui a imaginé un si ingénieux paradoxe sur la théorie des ensembles, ne parle guère de ces sujets dans sa classe. Et croit-on, parce qu'il est philosophe, qu'il enseigne moins clairement l'Algèbre ou la Mécanique ?

C'est peut-être les pages de M. de Pesloüan sur la théorie des ensembles qui m'ont le plus intéressé dans son Livre. Assurément, leur auteur ne se faisait pas d'illusions sur les difficultés qu'il y a à exposer si brièvement cette théorie, avec les notations relatives aux nombres transfinis, à des gens qui ne la sauraient point ; mais on s'amuse de voir comme il a hâte d'en arriver à tous ces paradoxes (y compris ceux de M. Richard) qui, dans ces dernières années, ont fleuri d'une façon si singulière, et dont M. Poincaré n'a pas dédaigné d'entretenir ses lecteurs ; avec joie, il les développe, il s'essaie à les fortifier, à en exagérer le scandale. Jusqu'où s'élèverait cette joie si la notion d'ensemble et, par-dessus le marché, celle de classe en étaient ruinées ! M. de Pesloüan est trop prudent pour proclamer cette ruine, dès à présent ; mais n'éprouverait-il pas une satisfaction secrète si, du coup, la raison humaine était un peu amoindrie et humiliée? J. T.

MÉLANGES.

LA GÉOMÉTRIE NON ARCHIMÉDIENNE;

Par M. G. VERONESE [1],
de Padoue.

Le sujet que j'ai choisi pour cette conférence est celui même qu'on m'avait demandé de traiter au Congrès de Heidelberg : il me paraît qu'il peut vous interesser encore aujourd'hui, puisque des mathématiciens comme Poincaré en ont reconnu l'importance. La critique en a déjà reconnu la validité logique; aussi, plutôt que d'essayer une exposition systématique, comme j'aurais fait à Heidelberg, je crois utile maintenant d'éclairer quelques-unes des questions de contenu et de méthode qui se rattachent à l'essence des principes de la Mathématique pure et de la Géométrie, et sur lesquelles il me semble que les géomètres ne sont pas encore d'accord, quoiqu'il s'agisse de questions géométriques [2].

Qu'est-ce que la Géométrie non archimédienne? Est-elle valable comme système de vérités abstraites? Et satisfait-elle aussi aux conditions auxquelles doit être soumis tout système géométrique?

Il serait utile de rappeler ici les discussions séculaires sur l'infini et l'infiniment petit actuel; dans l'histoire de la Science nous trouvons des mathématiciens favorables, contraires ou incertains; d'un côté, par exemple, G. Bernoulli, de l'autre, Gauss; incertain, Leibniz; enfin d'autres, par exemple M. G. Cantor,

---

[1] D'après l'aimable invitation de M. Darboux, je suis heureux de publier dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* la traduction française de ma conférence, qui a été imprimée dans les *Atti del IV Congresso intern. dei Matematici* (Roma, 6-11 apr. 1908).

[2] L'auteur aurait aussi voulu provoquer au sein du Congrès une discussion sur ces questions, mais ce but est manqué, car l'auteur est tombé malade dès son arrivée à Rome.

favorables à l'infini actuel et contraires à l'infiniment petit actuel envisagé comme un segment rectiligne continu.

Ces discussions s'étaient, on peut dire, assoupies, lorsque l'Analyse, grâce au concept de limite, se fut placée sur des bases solides dans le champ de la grandeur finie, et que prévalut la tendance contraire à l'infini et à l'infiniment petit actuel, provoquée aussi par l'essai manqué d'une géométrie de l'infini de Fontenelle (1).

Mais, quoique Gauss eût protesté contre l'usage de la grandeur infinie déterminée dans les Mathématiques, ici et là ressuscitaient les anciennes disputes.

Cependant personne n'avait jamais bien défini ce que l'on entendait par *infini* et *infiniment petit actuel;* ceux-ci peuvent avoir, comme on l'a vu ensuite, des formes diverses; ni Bernoulli ni l'idéaliste de M. du Bois-Reymond ne les ont définis. Ce n'est pas non plus une définition acceptable que celle de l'infiniment petit actuel de Poisson. Tout d'un coup, la lumière commence à se répandre avec l'introduction légitime des grandeurs infinies et infiniment petites actuelles, c'est-à-dire avec les nombres transfinis de M. G. Cantor, avec les *moments* de M. Stolz et avec les ordres d'infini des fonctions de M. du Bois-Reymond. Il ne s'agissait pas d'infinis et d'infiniment petits géométriques : M. Cantor, en faisant usage de ses nombres transfinis, affirmait avoir démontré l'impossibilité du segment rectiligne continu infiniment petit. M. A. Stolz avait déjà fait observer que le problème de l'existence de l'infini et de l'infiniment petit actuel dépend d'un axiome, selon lequel, étant donnés deux segments rectilignes, l'un plus petit que l'autre, il y a toujours un multiple du premier plus grand que le second. A cet axiome on donna le nom d'*Archimède;* il est en effet l'axiome V de l'Ouvrage : *De Sphoera* et *cylindro* du grand Syracusain; mais il avait été déjà employé par d'autres (2).

(1) *Éléments de Géométrie de l'infini* (Paris, 1727). Voir G. Veronese, *Fondamenti di Geometria,* 1891, p. 620, traduction allemande par A. Schepp, 1894, p. 697. Contrairement à ce qu'affirme M. Cantor (*Math. Ann.*, t. XLVI), les infinis de Fontenelle n'ont rien à faire avec la Géométrie non archimédienne.

(2) G. Veronese, *Fondam. di Geom.*, Appendice. A propos des récentes discussions sur les nombres transfinis de M. Cantor, *voir* Schœnflies, *Die Entwikelung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten,* 1908. Pour les infinis de M. du Bois-Reymond, *voir* aussi les récents travaux de MM. Borel et Bortolotti.

M. Stolz remarquait que la démonstration de Cantor ne pouvait pas toucher ni ses *moments*, ni les ordres d'infini de du Bois-Reymond, qui, quoiqu'ils ne satisfassent pas à l'axiome d'*Archimède*, ne sont pas des grandeurs linéaires; mais M. Stolz affirmait aussi l'impossibilité du segment rectiligne infiniment petit actuel, en donnant une démonstration de l'axiome même fondée sur le postulat du continu dans la forme donnée par Dedekind. Des postulats du continu donnés par Weierstrass et Cantor sous des formes plus appropriées au calcul, on déduit aussi, comme de celui de Dedekind, l'axiome d'*Archimède* (1).

Il ne s'agissait donc pas de voir s'il existe des grandeurs infinies et infiniment petites actuelles, mais s'il existe des segments rectilignes qui satisfassent aux propriétés fondamentales de la droite, excepté à l'axiome d'*Archimède*.

Et les voies ordinaires semblaient closes après les démonstrations de MM. Cantor et Stolz. Ce n'était donc pas par la voie analytique que pouvaient se présenter spontanément ces segments, puisque les auteurs cités partaient de la correspondance uni-univoque entre le continu rectiligne et le continu numérique, ou bien des nombres transfinis de Cantor, qui semblaient être les seuls nombres transfinis; de même, ce n'est pas par l'analyse que pouvait se présenter spontanément mon espace général à un nombre infini de dimensions, lorsque l'on ne pouvait considérer que des variétés à un nombre fini de variables.

La réponse devait donc être donnée par le continu rectiligne même, intuitivement considéré et décomposé dans ses éléments possibles.

Et alors, nous nous sommes aperçu que lesdits postulats du continu contiennent quelque chose qui n'est pas suggéré nécessairement par le continu même. En vérité, ce continu nous est fourni par l'expérience; y fixer des points pour sa détermination ou pour les opérations pratiques que nous devons faire avec lui, c'est une

---

(1) M. le professeur Enriques, qui, dans son écrit sur les principes de la Géométrie (*Encykl. der Math. Wissensch.*, t. III, 1907), réfère exactement sur la Géométrie non archimédienne, se méprend pourtant lorsqu'il donne au postulat de M. Cantor (*Math. Ann.*, t. V) une forme équivalente à la mienne et lorsqu'il conclut que du postulat de Cantor on ne peut déduire l'axiome d'Archimède.

opération arbitraire. Si nous idéalisons le point, en le regardant comme l'extrémité de la ligne, nous voyons qu'il ne peut pas servir à composer le continu, parce que nous nous trouvons toujours en présence d'un segment qui comprend au moins idéalement d'autres points distincts des extrêmes. Le postulat en vertu duquel à tout nombre rationnel correspond un point n'est pas pratiquement vérifié. Et de même, en idéalisant le point, et de telle manière que le segment comprenne toujours des points distincts des extrêmes, la correspondance uni-univoque entre les points de la droite et les nombres réels ordinaires n'est pas non plus justifiée.

A M. Stolz, j'avais déjà fait remarquer que l'axiome d'Archimède se déduit du postulat du continu de Dedekind, car ce postulat se fonde aussi sur la même correspondance, tandis que l'on peut séparer l'axiome d'Archimède de celui du continu en donnant à ce dernier la forme suivante :

Si dans un segment AB *existe un segment* XX' *variable, tel que* AX *soit toujours croissant et plus petit que* AX' *toujours décroissant, et si* XX' *devient indéfiniment petit* (c'est-à-dire plus petit que chaque segment donné), *il contient un point* Y *distinct de* X *et* X'.

Au postulat du continu dans la nouvelle forme, on en ajoute un autre analogue à celui d'Archimède, c'est-à-dire que *si* α *et* β *sont deux segments rectilignes, tels que* α *soit plus petit que* β, *on peut construire un multiple de* α (*selon un symbole de multiplicité* η), *qui soit plus grand que* β. Naturellement, si η est un nombre entier fini, ce postulat devient celui d'Archimède.

Et dans les *Fondamenti j'ai précisément construit des segments infinis et infiniment petits actuels qui satisfont à la condition que,* α *étant donné comme unité, on peut construire* β *et vice versa* [1]. Avec les segments, on peut faire toutes les opérations ordinaires de l'addition et de la soustraction; on peut trouver des multiples de ces segments et des sous-multiples, exécuter enfin avec eux des opérations rationnelles et irrationnelles, de

(1) *Voir* aussi G. VERONESE, *Il continuo rettilineo e l'assioma d'Archimède* (*Atti r. Acc. Lincei,* 1890). HOELDER, *Die Quantität und die Lehre v. Mass* (*Leipz. Ber.*, 1901). Dans la Géométrie non archimédienne aussi, on peut parler de la mesure des segments, lorsque l'un d'eux est pris pour unité de mesure.

sorte que, avec les symboles (nombres) qui représentent ces segments, on peut exécuter les opérations fondamentales que régissent les règles ordinaires. La question de l'existence des segments infinis et infiniment petits actuels ayant été posée d'abord, comme on le devait, la conception arithmétique de ces nombres devait rester en seconde ligne, parce que, comme je l'ai dit, il était d'abord avantageux d'affronter une telle question non pas du côté arithmétique, mais du côté géométrique.

Et ce fut cette insuffisance de développement arithmétique qui donna lieu à quelques-unes des critiques dirigées contre les nouveaux infinis et infiniment petits. Et c'est pour cela que M. Lévi-Civita, lorsqu'il était encore étudiant, d'après mon conseil, traita le premier le problème arithmétique qu'il compléta d'ailleurs par l'introduction d'unités nouvelles nécessaires pour d'autres opérations. Par une autre voie, M. Hilbert, en construisant un champ géométrique non archimédien, vint donner, avec son autorité, une confirmation de la possibilité logique d'une telle géométrie; M. Bindoni, dans sa Thèse doctorale, démontra que le champ géométrique de Hilbert est compris dans le mien. Les recherches récentes sur la théorie des ensembles, celles de M. Schœnflies en particulier, confirment la validité logique de cette géométrie; les dernières recherches sur le problème du continu rectiligne présentent un très grand intérêt, car il reste à reconnaître définitivement si, comme il me semble, il y a un seul type de nombres non archimédiens qui y satisfont, en y ajoutant aussi, s'il est nécessaire, d'autres unités pour le compléter, questions dont se sont occupés récemment MM. Hahn, Schœnflies et Vahlen.

La validité logique du continu rectiligne non archimédien étant ainsi établie, par là même est établie celle de la Géométrie non archimédienne, pour laquelle j'ai choisi dans mes *Fondamenti* la forme riemannienne : alors, dans un champ infiniment petit autour d'un point, en ne considérant que les segments finis entre eux, ou qui satisfont à l'axiome d'Archimède, c'est la Géométrie euclidienne.

Ce théorème a été ensuite démontré par M. Lévi-Civita pour la Géométrie non archimédienne d'Euclide et de Bolyai-Lobatschewsky.

Et de ce théorème peuvent être regardés comme corollaires les

théorèmes de M. Dehn trouvés en suivant les méthodes de Hilbert, sur les relations entre la somme des angles d'un triangle et les parallèles conduites par un point à une droite; c'est-à-dire qu'il existe deux systèmes géométriques non archimédiens, dans lesquels la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux ou égale à deux droits, tandis que par un point passent plusieurs parallèles à une droite donnée (¹).

La validité logique de la Géométrie non archimédienne entraîne l'indépendance de la théorie des proportions, ainsi que celle de la projectivité; d'autres géomètres se sont aussi occupés de ces théories, en suivant des méthodes plus simples que les miennes, entre autres MM. Hilbert et Schur.

Mais, une fois établie la validité logique de la Géométrie non archimédienne, reste la question du contenu et de la méthode qui ont été l'objet de critiques, quoique moins déterminées et pour cela moins saisissables. Permettez-moi, Messieurs, de vous entretenir, autant que le temps me le permet, de ce point, qui peut paraître sortir du champ mathématique à celui qui est habitué, dans les recherches supérieures de la Science, à ne tenir compte que des formes purement logiques, et à ne pas accorder d'importance au contenu des objets mathématiques ni à la méthode; pourtant le contenu est par lui-même un élément essentiel dans les principes de la Science, et la méthode, si elle n'est pas bien choisie, peut aussi conduire à des pétitions de principe. Je me servirai ici sous une autre forme de considérations déjà vieilles, que j'ai développées dans les *Fondamenti* et auparavant encore dans les leçons données à l'Université de Padoue de 1885 à 1890, leçons qui servirent de préparation à la publication des *Fondamenti* mêmes; je tiendrai compte aussi des publications ultérieures.

Les objets de la Mathématique pure n'ont pas nécessairement une représentation hors de la pensée, par exemple, le nombre, qui est, dans sa première formation, le résultat de l'opé-

(¹) Il suffit, en effet, de considérer un champ infiniment petit non archimédien dans lequel la somme absolue des angles d'un triangle dans la Géométrie riemannienne ou elliptique est plus grande que deux droits et dans la Géométrie euclidienne est égale à deux droits. Par un point dans le champ susdit, passe précisément un nombre infini de parallèles à la droite donnée quand l'on considère la partie de ces droites qui est comprise dans le même champ.

ration mentale de la numération des objets aussi abstraits. *La vérité a son premier fondement dans les principes logiques et dans de simples opérations mentales, universellement consenties; la liberté de l'esprit dans ses créations est limitée seulement par le principe de contradiction*, d'où il s'ensuit qu'une hypothèse est mathématiquement possible lorsqu'elle n'est pas en contradiction avec les prémisses. La Mathématique pure, de même que la logique formelle, est pour nous exacte.

La Géométrie au contraire a son origine nécessaire dans l'observation directe des objets du monde extérieur, qui est l'espace physique; de l'observation idéalisée de ces objets elle tire ses premières et précises vérités indémontrables et nécessaires à son développement théorique, qui sont les axiomes proprement dits, tels que celui, par exemple, en vertu duquel par deux points du champ de notre observation passe un seul objet rectiligne. Mais, pour que la Géométrie soit exacte, elle doit représenter les objets fournis par l'observation au moyen de formes abstraites ou mentales, et les axiomes par des hypothèses bien déterminées, c'est-à-dire indépendantes de l'intuition spatiale, de manière que la Géométrie devienne une partie de la Mathématique pure, ou de l'extension abstraite, où le géomètre, jusqu'à ce qu'il les applique au monde physique, effectue des constructions sans qu'il ait besoin de voir si elles ont ou non une représentation extérieure et sans pourtant devoir abandonner la vision des figures et tous les avantages qui dérivent de l'usage de l'intuition dans la recherche géométrique. Pour cela, l'exactitude de la Géométrie sera d'autant plus grande que sera plus sûre celle des axiomes suggérés par l'observation, et par conséquent qu'ils seront plus simples et en moindre nombre (¹). Et en effet, l'observation n'est qu'approximative et quelquefois aussi apparente et fallacieuse, ainsi, lorsqu'en nous mouvant, nous voyons changer la grandeur

(¹) M. Klein remarque aussi que les données de chaque observation sont valables entre certaines limites d'exactitude et sous des conditions particulières, tandis que, lorsque nous fixons des axiomes, nous pouvons poser, au lieu de ces données, des propositions d'une précision et d'une généralité absolues; en recourant au principe de Mach sur l'économie de la pensée, il soutient aussi que les axiomes doivent être simples et dans le moindre nombre (voir *Vorles. üb. nicht Eucl. Geom.*, Bd. I, 1893; *Gutachten zur Verth. des Lobatsch. Preises*, nov. 1897, *Kasan; Math. Ann.*, t. L, 1898).

des objets, tandis que, par les lois de la perspective, nous savons qu'un tel changement n'existe pas.

Certes l'exigence de la simplicité et du moindre nombre des axiomes conduit à d'inévitables recherches minutieuses; cette minutie fait perdre de vue les concepts généraux; elle rend difficile la lecture de ces recherches, lorsqu'on ne suppose rien de mathématiquement connu et que l'on se pose devant soi tout le problème des principes, comme dans les *Fondamenti*.

Il est clair aussi que les axiomes doivent être consentis universellement, et pour cela nous pouvons admettre, comme évidents, les axiomes seulement qui nous sont consentis par le philosophe empiriste, pour lequel il est inutile de donner la démonstration de leur compatibilité logique. Mais, au contraire, une telle démonstration est nécessaire lorsque l'on étend les mêmes axiomes à l'espace illimité, car personne n'a jamais observé et ne pourra jamais observer un tel espace. Voilà pourquoi nous ne pouvons pas accepter comme axiome suggéré par l'observation celui des parallèles, lorsqu'on définit ces droites comme des droites du plan qui prolongées indéfiniment ne se rencontrent pas, car personne n'a jamais observé effectivement deux telles droites, d'autant que nous ne pouvons pas admettre comme axiome primitif, tiré de l'observation, celui par exemple que la droite illimitée est un système linéaire ouvert.

Mais les axiomes tirés de la même observation ne suffisent pas pour la recherche géométrique. La Géométrie étant devenue une partie de la Mathématique pure, ou de l'extension abstraite, nous admettons ensuite dans la Géométrie toutes ces hypothèses ou postulats qui ne se contredisent pas entre eux, ni avec les axiomes admis tout d'abord; ces hypothèses ou limitent ou étendent le champ de la Géométrie, comme par exemple les postulats d'Archimède, du continu ordinaire, des espaces à plus de trois dimensions, etc., ou bien servent à choisir une des formes possibles, déterminées par des axiomes ou des hypothèses déjà donnés, tels que le postulat des parallèles [1].

---

[1] Par exemple, dans les *Grundlagen der Geometrie* de M. Hilbert, le système des axiomes paraît au contraire plutôt un système de vérités abstraites arbitraires qu'un système de vérités fournies en partie par l'expérience et en partie comme vérités nécessaires au développement de la Géométrie.

De ce qui précède, il suit aussi qu'*on doit distinguer l'espace physique de l'espace intuitif, qui est une représentation idéalisée du premier et qui est une intuition, et l'espace intuitif de l'espace géométrique abstrait, qui est un concept.* Ces formes n'ont pas été bien distinctes pour des auteurs éminents, tels que Helmholtz. *L'espace géométrique abstrait est précisément la partie de l'extension pure dans laquelle est représenté l'espace intuitif; mais il n'a pas inversement pour toutes ses formes une représentation effective, pas même approximative, ou bien il n'est pas nécessaire qu'il ait dans l'espace physique ou intuitif une telle représentation.* De manière que non seulement l'égalité des figures n'est pas nécessairement déterminée par le mouvement des corps rigides, comme le croyait Helmholtz, mais c'est plutôt l'égalité des figures géométriques (laquelle dépend à son tour du concept logique de l'égalité de deux choses distinctes) qui est nécessaire pour définir le mouvement des corps rigides. De cela dérive aussi cette autre conséquence que la Géométrie théorique n'est pas une partie de la Mécanique, comme le croyait Newton, ni ne dépend de la Physique, comme le pensait Helmholtz.

La distinction de l'espace physique de l'espace géométrique entraîne des postulats qui ne sont nécessaires que pour les applications pratiques, comme celui approximatif du mouvement des corps rigides, celui des trois dimensions, celui aussi d'Archimède, tandis qu'il y a des postulats de l'espace géométrique, comme ceux de l'espace général, du continu non archimédien, que nous n'avons pas besoin d'admettre pour l'espace physique (¹).

(¹) G. Veronese, *Fond. di Geom.*, 1891. L'exclusion du mouvement des corps rigides de la définition de l'égalité des figures fut accueillie aussi par Hilbert (1899) et par d'autres; elle fut aussi acceptée, et cela était plus difficile, dans des Traités de Géométrie élémentaire, avant tous par l'auteur (1re édition, 1897), après par Ingrami, Enriques-Amaldi. Quoiqu'on ait beaucoup disputé sur cette exclusion, dont on trouve quelque trace dans les *Éléments* d'Euclide, elle n'avait été jamais obtenue effectivement (voir *Fondamenti di Geom.*, App.). Aussi B. Russell et Poincaré affirment que la possibilité de ce mouvement n'est pas une vérité évidente par elle-même, ou au moins qu'elle l'est de la même manière que le postulat d'Euclide. Et en effet la vérification empirique du postulat des parallèles se peut faire dépendre de celle du mouvement d'une figure invariable. Mais, par la distinction que je fais entre l'espace géométrique et l'espace physique et par conséquent entre la Géométrie pure (pour laquelle le principe susdit n'est pas

Mais dans l'espace géométrique (tel que je l'ai défini dans les *Fondamenti* à un nombre infini de dimensions) est représenté l'espace intuitif; nous pouvons donc travailler dans cet espace géométrique avec l'intuition en y imaginant le point, la droite et le plan, tels que dans l'espace ordinaire, et en opérant comme dans la Géométrie pure; naturellement nous n'avons pas et ne pouvons avoir l'intuition d'un espace à quatre dimensions; alors, nous combinons l'intuition avec l'abstraction, de même que nous faisons pour passer de l'espace intuitif à l'espace illimité, et l'habitude que nous acquérons est telle que, de même que nous croyons imaginer tout l'espace illimité, de même nous croyons voir deux plans qui, dans l'espace à quatre dimensions, se rencontrent en un seul point ([1]).

Par la distinction entre l'espace physique et l'espace géométrique se concilient l'affirmation de Stuart Mill, que la droite du mathématicien n'existe pas dans la nature (on devrait dire plus proprement dans l'espace physique), et l'observation de Cayley, que nous ne pourrions pas affirmer cela si nous n'avions pas le concept de la droite.

Dans la Géométrie donc, la liberté de l'esprit n'est pas seulement limitée par le principe de contradiction, comme dans la Mathématique pure, mais bien aussi par les données de l'intuition spatiale.

Par conséquent, nous ne pouvons pas admettre, par exemple, un plan dans lequel ne vaille pas le théorème de Desargues sur les triangles homologiques (Hilbert), ni un plan dans lequel une droite qui tourne autour d'un point ne puisse pas prendre la position d'une autre droite passant par le même point (Poincaré); nous ne pourrions pas admettre les *plans* de Bolyai-Lobatschewsky,

---

nécessaire) et ses applications pratiques, je ne m'accorde pas avec l'éminent mathématicien français, lorsqu'il soutient (sans faire ladite distinction) « qu'en étudiant les définitions de la Géométrie, on voit qu'on est obligé d'admettre, sans le démontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques-unes de ses propriétés ». Ce principe et ses propriétés sont nécessaires, au contraire, seulement pour les applications pratiques de la Géométrie, comme est nécessaire l'axiome des trois dimensions de l'espace physique.

([1]) Cela explique pourquoi nous employons le mot *espace* au lieu du mot *variété*, qui a une signification plus étendue, mais tout à fait générique et abstraite.

de Riemann ou elliptique, s'il était prouvé que le postulat d'Euclide est valable intuitivement (comme le soutiennent les Kantiens); nous ne pourrions pas non plus admettre une géométrie dans laquelle la droite fût déterminée par trois points au lieu de deux. Cependant toutes ces formes sont possibles dans l'extension abstraite et peuvent avoir en tout ou en partie une représentation dans la Géométrie même, de la même manière que les variétés à deux dimensions de Riemann, de Bolyai-Lobatschewsky ou elliptique auraient toujours une représentation dans la géométrie de la surface sphérique, de la pseudosphère et du plan impropre à l'infini, si le postulat d'Euclide était valable physiquement ou intuitivement. Il y a là un contraste, mais non une contradiction avec le principe selon lequel, pour certaines catégories de propriétés, nous pouvons regarder comme équivalents deux objets divers, par exemple, deux formes qui peuvent se transformer l'une dans l'autre projectivement ou birationnellement, parce que, avec ce principe, on se passe des autres propriétés géométriques, ou de ce contenu qui, au contraire, constitue l'essence des objets. Par exemple, l'espace physique et l'espace géométrique sont, par leur contenu, essentiellement divers entre eux, de même qu'ils sont distincts des variétés analytiques qui les représentent, et la construction de l'espace géométrique, ainsi que l'existence de l'espace physique, constitue un élément essentiel dans la Géométrie, qui *ne va pas être oublié;* ce qui arrive au contraire ordinairement. Et que le contenu ait une importance fondamentale, c'est ce que prouve par exemple le fait que Cayley, qui a employé le premier la méthode projective dans l'étude de la Géométrie non euclidienne, considérait la Géométrie euclidienne comme valable au sens absolu; c'est pour cela que, dans les recherches de Cayley, il s'agit moins de la Géométrie non euclidienne que d'une de ses représentations dans la Géométrie euclidienne même, obtenue en modifiant la notion de distance, de même que la pseudosphère, la sphère et le plan impropre à l'infini dans l'espace euclidien sont des représentations des géométries non euclidiennes dans la Géométrie euclidienne. *Au contraire, à présent, le contenu de cette Géométrie a une remarquable importance : il nous dit que l'observation actuelle extérieure ne suffit pas à établir exactement l'une ou l'autre Géométrie.* Et un tel contenu a aussi, comme

on le voit, une portée philosophique pour la forme de l'espace, tandis que les recherches de Cayley n'en pouvaient avoir aucune, non plus que la théorie des imaginaires ou l'infini impropre, car il ne s'agit là que de noms employés pour indiquer des formes déjà existantes et effectives, qui n'ajoutent rien à la genèse de l'espace.

De tout cela il résulte que les recherches mathématiques sur les principes de la Science sont bien distinctes et doivent être tenues comme distinctes des recherches philosophiques sur la genèse des idées mathématiques : et nous-même, en déterminant le contenu des objets de la Mathématique pure et de la Géométrie, nous n'avons pas entendu prendre parti pour un système philosophique ou un autre : en disant que le nombre, pour le mathématicien, n'a pas nécessairement une représentation hors de la pensée, nous n'avons pas voulu affirmer que le nombre ne soit pas lui-même d'origine empirique ; de même, en disant que le point a une représentation empirique nécessaire, nous n'avons pas voulu dire qu'il ne soit pas une attitude prise *a priori* par l'esprit et nécessaire à toute expérience extérieure. Et cette distinction est heureuse, car la Mathématique nous unit, tandis que la Philosophie nous divise, au moins à présent. Sans doute, les études sur les principes de la Science ont donné et donneront lieu encore à des discussions, même parmi les mathématiciens ; mais l'erreur en Mathématique va toujours en s'éliminant, et restent enfin les nouvelles idées définitivement acquises à la Science. L'erreur dépend ou directement du mathématicien, ou bien de l'indétermination de quelques-unes des nouvelles idées, ou encore de l'obscurité dans laquelle elles se présentent ou sont présentées ; mais souvent aussi l'erreur dérive de la contrariété qu'elles rencontrent tout d'abord lorsqu'elles se heurtent contre de vieilles convictions profondément enracinées et renforcées par l'autorité d'éminents mathématiciens, ou contre l'indifférence des uns qui, pour ne pas se donner la peine de réfléchir, voudraient exclure du domaine de la Mathématique les recherches sur les principes de la Science, ou contre l'opposition des autres, pour lesquels les nouveaux penseurs sont les révolutionnaires de la Science. Et à obscurcir la lumière naissante des nouvelles vérités mathématiques contribuèrent ces philosophes qui, fermes dans les principes mathématiques appris, voyaient ou

croyaient voir dans les nouvelles idées un attentat à diverses hypothèses sur la connaissance ou l'interprétation de la nature, tandis qu'un nouvel arrangement des principes suggérés et renforcés par des faits nouveaux peut profiter non seulement à la Mathématique, mais aussi à la Philosophie.

La Philosophie doit accepter les idées mathématiques, lorsqu'elles sont définitivement formées. Cependant, si les recherches mathématiques se doivent distinguer des recherches philosophiques, il convient que le mathématicien s'abstienne de justifier ses conceptions par des considérations philosophiques ou par des fictions qui se prètent facilement à la critique du philosophe, comme font par exemple l'empiriste et l'idéaliste de du Bois-Reymond, ou comme a fait quelquefois M. Cantor pour justifier ses nombres transfinis, lesquels ont pourtant une légitime existence malgré quelques récentes critiques philosophiques. Mais, d'un autre côté, par crainte de ces critiques, *le mathématicien ne doit pas se retrancher dans un champ purement abstrait, ou bien dans un formalisme symbolique, en se montrant indifférent devant les questions de contenu mathématique*, comme il est arrivé et comme il arrive encore à présent, lorsqu'on confond la Géométrie avec la théorie générale des variétés d'éléments purement abstraits.

Et pour cela, il est préférable que l'arrangement des principes réponde au développement logique et le plus simple des idées mathématiques et, par conséquent, que *la méthode ne soit pas un artifice sans vie ou ne paraisse pas un jeu de symboles ou de mots,* si utile qu'il soit, *mais elle doit être philosophique.* Ainsi la Mathématique peut aussi être utile aux recherches philosophiques sur la genèse des idées mathématiques, de même qu'elle a aussi pour tâche d'être utile aux Sciences appliquées, qui ont pour objet direct l'étude des phénomènes de la nature en choisissant les méthodes approchées les mieux appropriées à ce but. Et lorsque, au contraire, on suit une méthode indirecte, en représentant par exemple l'espace au moyen d'une variété à plusieurs variables, pour en étudier les principes, il est nécessaire d'examiner si, en suivant le contenu de l'espace même, ou sa construction, les postulats de ladite variété peuvent être justifiés sans recourir aux concepts qui sont définis avec ces postulats, car un tel

recours constituerait une pétition de principe et philosophiquement une erreur.

Sur le choix de la méthode les plus éminents mathématiciens sont d'accord. Du Bois-Reymond remarquait que si, dans les opérations avec les signes de la Mathématique pure, on oublie leur signification, dans la discussion des concepts fondamentaux de la Mathématique on ne doit pas oublier leur origine : et pour la Géométrie, Newton remarquait justement que la simplicité de la figure dépend de la simplicité de la genèse des idées, c'est-à-dire non pas de leur équation, mais de leur description ; et Gauss affirmait que, pour la liaison et la représentation des vérités géométriques, les moyens logiques ne peuvent rien produire par eux-mêmes et ne font que bourgeonner sans fruit, quand la féconde et vivifiante intuition ne domine pas partout. De la même façon s'expriment Weierstrass, Lie, Klein et d'autres. Et c'est à ces concepts que se conforment mes *Fondamenti*, aussi dans la genèse de la Géométrie non archimédienne. Cependant cette méthode, sans l'appui de l'Analyse, lorsqu'on ne suppose rien de mathématiquement connu, devient dans la lecture beaucoup plus malaisée ; aussi, ce n'est que dans ces dernières années, en Italie et ailleurs, que la méthode fondée sur le raisonnement pur prévaut de plus en plus dans les recherches sur les principes de la Géométrie. Tout le monde se rappelle en effet le sort réservé à l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann de 1844, assurément préférable à celle de 1862.

En revenant à la Géométrie non archimédienne, il est nécessaire de s'assurer si elle satisfait aux conditions susdites de contenu et de méthode. En examinant le continu, tel qu'il nous est fourni par l'observation directe et simple, pour deux objets rectilignes l'axiome d'Archimède est valable, parce que, quels qu'ils soient, on peut toujours considérer des parties n^{iemes} de chacun, assez petites pour que la vérification de l'axiome soit possible pour ces parties n^{iemes} et, par conséquent, pour les objets mêmes. *Mais l'extension de cet axiome à tout l'espace illimité n'est pas également justifiée.* En effet, quand nous admettons que dans *chaque* segment idéalisé il y a des points distincts des points extrêmes, ni l'observation ni l'intuition ne nous obligent à affirmer l'axiome d'Archimède entre deux segments *qui ne peuvent pas être observés*. Et

puisqu'on démontre que le segment infiniment petit actuel peut être considéré comme nul par rapport à un segment fini avec une approximation infinie, l'on conclut que, si un tel segment existait aussi physiquement, nous ne pourrions pas le voir. Nous pouvons pourtant employer notre intuition dans chaque champ de segments finis, c'est-à-dire qui satisfont à l'axiome d'Archimède.

La Géométrie non archimédienne satisfait donc aux conditions qui sont imposées en général à la Géométrie par l'intuition spatiale, et par conséquent son contenu est géométriquement justifié.

Mais un autre problème, géométrique aussi, se présente à la suite de nos prémisses; c'est à savoir si les hypothèses non confirmées par l'expérience peuvent avoir, grâce à des observations ultérieures plus exactes ou plus étendues, une représentation effective dans le monde physique. Parmi ces hypothèses, les plus caractéristiques sont celles des parallèles, du continu et des hyperespaces. Nous avons déjà remarqué que, si l'hypothèse euclidienne était exclue, on ne pourrait plus parler de l'espace euclidien. Quant, au contraire, nous remarquons que, physiquement, l'existence de l'infini et de l'infiniment petit actuels n'est pas contradictoire avec notre intuition, cependant aucune expérience ne conduit et ne pourra jamais conduire hors des grandeurs finies. Seulement nous pouvons dire, par un théorème déjà mentionné, que *si l'espace physique était infini actuel, par rapport au champ de nos observations, dans l'espace physique fini, supposé aussi illimité, la Géométrie euclidienne* serait valable. Au contraire, j'ai combattu ailleurs, en m'associant à Helmholtz (1), l'hypothèse physique d'un espace à quatre dimensions ou plus.

En tout cas, aucune utilité ne nous pousse à cette hypothèse, qui serait purement fantastique. Et pourtant, il est curieux comment certaines idées ont surgi d'intuitions aussi erronées. En effet, l'idée d'un espace à plus de trois dimensions n'est pas née de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann, pour lequel l'espace fut toujours à trois dimensions et par conséquent aussi la Géométrie;

(1) G. Veronese, *Il Vero nella Matematica* (discours d'inauguration à l'Université de Padoue), nov. 1906.

elle provient encore moins du nominalisme géométrique de Cayley, Cauchy, Riemann et autres dans l'étude de certaines variétés analytiques à plus de trois dimensions, non plus que de ma construction géométrique des hyperespaces ; c'est bien de l'hypothèse physique même qu'elle surgit, hypothèse qui fut la première à se présenter, qui a pourtant empêché l'acceptation de l'hypothèse mathématique et qui a fait souvent confondre, près de la foule, les défenseurs de la Géométrie à plus de trois dimensions avec les médiums ainsi dits à la Zöllner ou avec les spirites.

Et quant à l'utilité de la Géométrie non archimédienne, je remarque qu'on ne peut pas confondre cette Géométrie avec quelque Géométrie que ce soit, obtenue en négligeant ou en modifiant quelque axiome. La Géométrie non archimédienne, ainsi que la non euclidienne, a résolu une question sur laquelle on discutait depuis des siècles et a éclairé la constitution du continu et de l'espace géométrique. Et cela suffit pour la Mathématique pure. Du reste, chaque loi mathématique étant une loi de la pensée est aussi une loi de la nature. Et, à cause de l'harmonie merveilleuse qui existe entre les lois de la pensée et celles du monde hors d'elle, on ne peut pas affirmer *a priori* que les plus hautes et les plus abstraites conceptions mathématiques ne puissent avoir une application utile dans ce monde même. Mais cette utilité relative ne peut pas être le but direct de la recherche mathématique en général, et en particulier de la recherche sur les principes de la Science ; cependant nous n'excluons pas ; au contraire nous voulons, aujourd'hui plus que jamais, que l'un des buts les plus importants soit celui aussi de satisfaire aux besoins des sciences appliquées et de répondre du mieux qu'il est possible à leur importante fonction sociale.

Ici, comme géomètres, nous aurions fini ; mais si ce n'est pas notre tâche de faire de la Philosophie, quoique, comme nous l'avons dit plus haut, nous ne puissions admettre comme propositions indémontrables que le minimum de faits simples qui nous sont consentis par les philosophes, c'est-à-dire par le philosophe empiriste, cependant nous ne pouvons accepter les restrictions du pur empirisme sur l'extension de la recherche mathématique. M. Pasch même, qui a fait un essai utile dans cette direction et louable pour d'autres raisons, n'a pu rester cohérent à son pro-

gramme [1]. Et nous ne pouvons non plus admettre, comme géomètre, que l'espace et ses postulats soient des formes *a priori* de l'intuition pure, selon la critique de Kant, parce qu'aucune preuve n'a été donnée, par exemple, pour le postulat des parallèles d'Euclide, le seul que Kant connût. Et ces philosophes positivistes qui combattent contre les hypothèses non euclidiennes ne sont pas moins métaphysiciens que leurs collègues kantiens. Et moins encore, nous ne pouvons admettre que le postulat d'Euclide n'ait pas la même évidence que les autres et qu'il puisse n'être pas vérifié par des observations ultérieures et que pourtant nous ayons une intuition *a priori* ou subjective du même postulat, telle que ces observations ultérieures ne puissent pas le modifier, tandis qu'on admet que cette intuition dérive des représentations tactiles et visuelles [2]. En tout cas, nous n'avons aucune preuve géométrique de la nécessité subjective du postulat d'Euclide et des autres postulats, en sorte que *le géomètre ne peut pas admettre les axiomes donnés par les représentations tactiles et visuelles pour tout l'espace illimité sans justifier une telle extension.* Notre intuition est faite, selon moi, d'observation et d'expérience idéalisées, parce que, lorsque je *me* figure la droite intuitivement, je ne sais l'imaginer que comme un objet rectiligne, quel qu'il soit, idéalisé, et quoique, *ensuite par l'abstraction*, une telle représentation s'étende à un segment rectiligne quelconque de la droite illimitée. Nous nous assurons, en effet, de la présence des objets extérieurs et de leurs propriétés au moyen de nos sens et des qualités de nos sensations, qu'ils produisent en nous, et nous entretenons avec l'abstraction seulement celle de l'extension pour avoir les premières formes géométriques. Et ainsi, de même que le langage, l'intuition spatiale est le produit d'une longue expérience. Les hommes la possèdent à divers degrés; elle est plus parfaite chez les géomètres et les peintres, elle est insuffisante chez ceux qui, aveugles depuis le premier âge, ont, en acquérant la vue, une intuition imparfaite des formes géométriques les plus simples.

---

(1) *Fondamenti di Geom.*, Appendice.

(2) ENRIQUES, *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della Geometria* (*Riv. filos.* di G. Cantoni. Pavia. 1903; *Enc. der Math. Wiss.*, *loc. cit.*, *Einleitung*).

M. A. Russell a posé la question de l'*a priori* sous une nouvelle forme en distinguant l'*a priori* logique de l'*a priori* psychologique, qui pourtant se confondent. Mais, quoique nous soyons d'accord dans quelques considérations fondamentales, parmi lesquelles celle de l'indépendance de la Géométrie et de la Physique, je ne puis être d'accord avec lui, par exemple, dans la démonstration que l'espace comme forme d'extériorité doit avoir un nombre fini de dimensions, ou dans cette autre par où il a essayé de prouver que tous les axiomes communs aux géométries euclidienne et non euclidienne sont nécessaires pour toute expérience, tandis que, selon lui, les postulats des parallèles sont d'origine empirique. Il serait opportun d'examiner les conséquences de pareilles hypothèses par rapport à la Géométrie non archimédienne.

Il y a des concepts qui ne nous sont pas donnés directement par l'observation, par exemple celui de l'*illimité* (dont nous avons fait dépendre celui de la démonstration par induction complète), ou bien celui de l'égalité des figures indépendamment du principe approximatif du mouvement des corps rigides, et, de ces concepts, il n'est pas encore clair quelle partie appartient à la pensée et quelle autre à l'expérience [1].

Mais le fait que, dans la Géométrie, nous substituons des formes précises, comme celle de la droite, aux données imprécises de l'expérience, ne signifie point, comme M. Klein paraît le soutenir [2], que ces formes précises soient des formes nécessaires de toute expérience, parce que les postulats non euclidiens peuvent aussi être remplacés par des formes mathématiques précises, sans pourtant qu'ils puissent être regardés comme des formes transcendantes de notre esprit.

Cependant, il est certain que la Géométrie théorique a son origine dans l'expérience; mais elle s'en rend indépendante en formulant d'une façon précise ses axiomes, lorsqu'ils sont étendus à l'espace illimité et en construisant des formes qui ne sont pas suggérées par l'expérience même. Ces formes pourtant sont des constructions auxquelles conduisent les axiomes tirés de l'expérience

---

(1) *Il Vero nella Matematica*, note 3.

(2) *Nicht Eucl. Geom., loc. cit.*

et élaborés par la pensée logique, sans manquer aux conditions posées par l'intuition spatiale.

La pensée, la psyché et le sens sont si intimement liés entre eux, que la séparation de ce qui est spécial à chacun est presque toujours un problème ardu, sinon impossible à résoudre; la philosophie tourne tout autour, depuis des siècles, sans pouvoir y pénétrer complètement et aboutir à une solution définitive. C'est seulement par la spécialisation des recherches et par une direction expérimentale et scientifique qu'on pourra arriver dans quelques problèmes au moins à une synthèse philosophique claire et sûre, dont les savants spécialistes pourront préparer les éléments. Si, parmi ces problèmes, nous considérons ceux qui concernent les idées mathématiques, la contribution que les mathématiciens ont apportée à leur solution est un des plus beaux monuments de la Science.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Tannery (Jules). — *Elemente der Mathematik.* Mit e. geschichtl. Anh. v. *Paul Tannery.* Deutsch v. *P. Klæss.* Mit e. Einführungswort v. *F. Klein.* Grand in-8°, XII-339 p. avec 184 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7 m.; relié, 8 m.

Sturm (Rud.). — *Die Lehre v. den geometrischen Verwandtschaften.* 3. Bd.: Die eindeut. linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. (B.-G. Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.) Bd. XXVII, 3. Grand in-8°, VIII-574 p. Leipzig, B.-G. Teubner. Relié, 20 m.

Xavier (Agliberto). — *Théorie des approximations numériques et du calcul abrégé.* In-8°, X-281 p. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Chwolson (O.-D.). — *Traité de Physique,* trad. par *Ed. Davaux,* avec notes par *Eug.* et *Fr. Cosserat.* T. II, fasc. 4. In-8°, 182 fig. Paris, A. Hermann. 17 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

EMIL MÜLLER (Dr). — Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. — Première Partie, avec 273 figures dans le texte et 3 planches. Leipzig et Berlin, Teubner, 1908.

Ce Livre se distingue nettement des savants Ouvrages, tels que celui de Fiedler, publiés en Allemagne sur le même sujet. Il y faut chercher beaucoup moins des études théoriques de Géométrie projective que l'exposé des tracés de la Géométrie descriptive en vue des applications. L'auteur y considère la Géométrie descriptive comme la science abstraite du trait et emploie exclusivement la double projection de Monge.

L'Ouvrage du Dr Müller s'adresse, en effet, aux élèves des écoles techniques supérieures, c'est-à-dire à un public qui tient à la fois de celui de nos écoles d'Arts et Métiers, de l'École des Beaux-Arts (section d'Architecture) et de l'École centrale des Arts et Manufactures. L'enseignement qu'il a donné pendant 12 ans dans ces écoles lui a permis de connaître les besoins des ingénieurs et des architectes en Géométrie descriptive ; il est donc particulièrement qualifié pour traiter de cette matière.

Les idées directrices de l'Ouvrage sont exposées dans la préface. Ayant assigné comme but principal à la Géométrie descriptive la représentation intuitive de l'espace, il pense, contrairement à l'opinion généralement reçue, que le développement de cette faculté de représentation, qui est une chose de première nécessité pour le technicien, dépend essentiellement des figures dont on s'occupe. Ces figures seront donc, non des systèmes abstraits de lignes et de surfaces, mais des objets de forme bien déterminée, ceux que le technicien a besoin de connaître et qu'il retrouvera plus tard dans la pratique de son art.

D'un autre côté, si l'on veut que le futur ingénieur ou le futur architecte étudient la Géométrie descriptive d'une manière ration-

nelle, de façon à apercevoir les méthodes de représentation et de construction relatives aux corps usuels, d'un point de vue élevé, et à les dominer entièrement, il est nécessaire de leur donner des notions théoriques générales.

C'est ainsi que l'auteur a été amené à étudier les affinités géométriques, les courbes et les surfaces algébriques et en particulier celles du second ordre, et à emprunter les résultats de la Géométrie analytique pour les utiliser dans la spécialité qu'il étudie.

Il fait remarquer à ce propos que le mouvement qui s'était produit, il y a une quinzaine d'années, pour réduire aux Mathématiques élémentaires les études théoriques des écoles techniques supérieures, a échoué et qu'actuellement on proclame la nécessité d'une culture théorique élevée, mais adaptée aux besoins auxquels ces écoles doivent satisfaire.

Les constructions employées dans tout l'Ouvrage relèvent de deux principes que l'auteur a mis en relief dès le début :

1° *L'emploi des projections auxiliaires,* qui a été appliqué systématiquement. A ce sujet, le Dr Müller a attiré l'attention sur ce fait que les deux plans de projection peuvent occuper une position quelconque dans l'espace ; mais, en réalité, il n'a utilisé les projections auxiliaires que dans les cas usuels du dessin technique où un objet est représenté par ses figures géométrales. L'esprit aurait, en effet, quelque peine à se figurer un Ouvrage de Stéréotomie, par exemple, autrement que dans sa position habituelle et projeté sur un plan non physiquement horizontal ou vertical.

2° *La suppression de la ligne de terre,* qui n'est jamais donnée ni utilisée dans le dessin technique, où l'on n'emploie pas les traces des droites et des plans sur les plans de projection.

Par la réunion de ces deux principes, on obtient une liberté de construction qui est mise à profit dans les nombreuses applications que l'auteur fait au dessin technique.

Les constructions relatives aux ombres en général et aux ombres à 45° en particulier ont été traitées en détail et avec tout le soin désirable. Ces tracés constituent en effet un excellent exercice d'application des méthodes générales de la Géométrie descriptive, en même temps qu'un moyen de développer et de perfectionner la

faculté de représentation de l'espace, en faisant connaître avec précision la forme des corps.

Je dois mentionner spécialement le soin qui a été apporté à l'exécution des figures, dont la plupart sont des épures de dessin technique d'une grande clarté. Toutes les lignes de construction y sont représentées, avec l'indication du report des distances, si bien que souvent l'examen attentif de la figure m'a épargné la lecture complète du texte.

Nous allons compléter et préciser ces indications générales en passant rapidement en revue les différents Chapitres de l'Ouvrage dans l'ordre où ils se présentent.

Le Tome premier contient la représentation de points, de lignes, de surfaces et de volumes, par la méthode de projection orthogonale; la résolution, par la même méthode, des problèmes les plus courants de la pratique comme la construction des ombres et les intersections pour les surfaces qu'on rencontre dans les arts.

Il comprend deux Parties. La première Partie : *Représentation au moyen de projections orthogonales,* est divisée en huit Chapitres qui traitent respectivement :

Le *Chapitre I*, des définitions et principes de la projection orthogonale ;

Le *Chapitre II*, des projections auxiliaires, exposées d'une manière générale, avec des plans rectangulaires occupant une position quelconque dans l'espace ;

Le *Chapitre III*, des rotations autour d'axes perpendiculaires ou parallèles aux plans de projection ;

Le *Chapitre IV*, de la suppression de la ligne de terre, et des simplifications qu'elle comporte et qui seront mises en évidence dans toute la suite du Cours ;

Le *Chapitre V*, des problèmes fondamentaux de position, c'est-à-dire les intersections de droites et de plans ; ceux-ci sont le plus souvent représentés, comme en pratique, par un polygone simple, triangle ou parallélogramme, ce qui donne des épures faisant image ;

Le *Chapitre VI*, des ombres de corps à faces planes; après avoir donné les principes des ombres en lumière parallèle et quelques règles commodes pour la distinction des côtés éclairé et

obscur d'une face plane, l'auteur les applique à des exemples usuels : console, ferme de charpente, cheminée sur un toit;

Le *Chapitre VII*, des affinités géométriques et leur application à la construction des projections et des ombres de figures planes, avec quelques exercices théoriques intéressants ;

Le *Chapitre VIII*, les problèmes métriques, distances, angles, résolution des trièdres par les tracés habituels. Il se termine par quelques problèmes de construction de droites passant par des points éloignés et les énoncés de 34 exercices proposés sur cette première Partie.

La deuxième Partie, *Étude des courbes et surfaces en projection orthogonale*, est divisée, comme la première, en huit Chapitres.

Le *Chapitre I*, généralités sur les courbes planes et gauches, contient surtout des résultats fournis par l'analyse ; on y trouve aussi des indications géométriques utiles, entre autres le tracé approximatif du centre de courbure d'une courbe plane au moyen d'une courbe d'erreur, la projection d'une courbe gauche et son intersection avec un plan.

Dans le *Chapitre II*, généralités sur les surfaces courbes, l'auteur rappelle d'abord quelques propriétés des surfaces algébriques fournies par la Géométrie analytique, puis il étudie géométriquement les propriétés les plus usuelles des surfaces en général et des surfaces réglées en particulier. Il définit les lignes de courbure, les asymptotiques et les géodésiques.

Le *Chapitre III* traite des courbes du second ordre : projection du cercle, théorème de Dandelin, rapport anharmonique, pôles et polaires. A signaler une construction ingénieuse du rayon de courbure en un point de l'ellipse, et de la normale avec application à l'appareillage d'une voûte elliptique.

On trouve, dans le *Chapitre IV*, les principales questions relatives aux surfaces coniques et cylindriques : construction de plans tangents, de sections planes et d'intersections avec applications à la stéréotomie et principalement aux ombres dont les différents tracés sont exposés en détail sur un grand nombre d'exemples empruntés aux arts : listel, base de colonne, arrière-voussure, etc. Un dernier paragraphe contient des notions sur l'hélice et ses diverses

projections, sur les surfaces d'égale pente, l'hélicoïde et le développement des surfaces.

Le *Chapitre V* est consacré à l'étude de la sphère. La construction des plans tangents et des sections planes est immédiatement suivie des applications si nombreuses qu'on peut faire de cette surface aux ombres (niche sphérique, écuelle), à la coupe des pierres (voûtes, coupoles). Ce Chapitre contient des généralités sur l'éclairement des corps et la détermination des lignes d'égal éclairement (*isophote*) sur la sphère, avec application au lavis. La distribution de ces lignes sur la partie obscure diffère un peu de celle qui est en usage chez nous ; elle ne me semble pas donner de meilleurs résultats dans le modelé des surfaces par le lavis à l'effet.

Les surfaces de révolution, si importantes par leurs applications, sont étudiées dans le *Chapitre VI*, qui contient aussi des notions sur les quadriques et sur la courbure des surfaces, notamment sur la détermination de l'indicatrice, avec indication de son emploi dans les questions d'intersection et d'ombre.

L'auteur montre comment on peut construire simplement, en élévation, sans se servir de la projection horizontale, la section d'une surface de révolution à axe vertical, par un plan défini par sa ligne de pente méridienne.

Il ne fait qu'indiquer la méthode des sphères auxiliaires pour la détermination de l'intersection de deux surfaces de révolution, sans aucun exemple théorique. En revanche, les applications aux ombres avec le tracé des lignes d'égale teinte sont nombreuses, variées et traitées avec tous les développements nécessaires à la parfaite compréhension du sujet : tore, vase, chapiteau, piédouche.

Le *Chapitre VII* s'occupe des surfaces hélicoïdales gauches, si importantes dans les arts ; de la construction des plans tangents et des lignes d'ombre sur l'hélicoïde aigu et normal, avec représentation des vis correspondantes.

Le *Chapitre VIII*, avec le raccordement des surfaces gauches, la représentation et la détermination des ombres sur quelques surfaces graphiques qu'on rencontre dans le dessin technique, termine le premier Volume d'un Ouvrage qui paraît bien répondre aux nécessités d'un enseignement technique supérieur tel que nous le concevons.

Sans contenir aucune étude absolument nouvelle, ce Livre offre cependant un réel intérêt par le caractère à la fois théorique et pratique qu'il présente sous une forme convenablement ordonnée, et par l'heureux choix d'applications que l'auteur a su faire dans le domaine de l'ingénieur et de l'architecte.

C. ROUBAUDI.

DUHEM (P.). — LE MOUVEMENT ABSOLU ET LE MOUVEMENT RELATIF. 1 volume in-8°, 284 pages. Imprimerie-librairie de Montligeon, 1909.

Une doctrine importante domine les nombreux travaux que, depuis plusieurs années, M. Duhem a consacrés à l'histoire du développement de la Science, celle de la continuité ; on voit dans ses Livres une même idée se développer à partir de l'antiquité, se ramifier, se modifier, évoquer l'idée contraire, se cacher, suivre des canaux souterrains qu'il excelle à retrouver, reparaître au jour, pousser une tige robuste, fleurir, s'épanouir, fructifier... ; on est, parfois, tout étonné de la reconnaître sous les formes diverses qu'elle revêt et l'on en arrive à se demander s'il y a jamais eu une idée vraiment nouvelle depuis Aristote, en passant par les commentateurs du Maître, par *la nuit du moyen âge*, par les scolastiques, par saint Thomas, par Duns Scot, par les terminalistes de l'École de Paris, par la Renaissance, par Léonard de Vinci, par Galilée, Descartes, Newton, Euler et Kant, jusqu'à l'auteur lui-même. Cette doctrine de la continuité est appuyée sur des lectures immenses, sur une érudition très étendue, sur des citations nombreuses, copieuses et probantes, qui forcent la conviction du lecteur ; je la crois, pour ma part, tout aussi vraie que celle de Carlyle sur le rôle essentiel des grands hommes et le culte de ces héros, sans lesquels rien ne se serait fait; mais elles ne sont pas contradictoires.

D'après Aristote, le mouvement du ciel implique une Terre immobile ; Aristote ne conçoit pas le mouvement de rotation d'une sphère autour de son centre, sans que ce centre fasse partie d'un corps matériel fixe. « Il faut donc que la Terre existe ; elle est ce corps qui reste immobile au centre. » A cette affirmation, il con-

vient de joindre une observation tirée du Livre *Sur le mouvement des animaux*. Pour qu'un animal puisse mouvoir une partie de son corps, il faut qu'une autre partie reste immobile et que l'animal trouve, en dehors de lui, quelque chose qui demeure fixe.

Cette nécessité d'un *support* fixe, sur laquelle insiste l'auteur, quel qu'il soit, du Livre *Sur le mouvement des animaux*, n'a peut-être rien à faire avec la nécessité métaphysique d'un corps concret, existant d'une existence actuelle, auquel doit être incorporé le centre fixe de tout mouvement de rotation ; les deux affirmations se sont confondues, par suite d'un de ces malentendus dont l'histoire est pleine.

Quoi qu'il en soit, l'affirmation d'Aristote ne pouvait s'accorder avec la doctrine des épicycles de Ptolémée qui se meuvent autour de leurs centres, et dont les centres sont des points abstraits, qui ne sont incorporés à aucun corps matériel.

Cette contradiction a contribué à ruiner la croyance à la nécessité métaphysique de l'immobilité de la Terre, à l'impossibilité logique d'un déplacement d'ensemble de l'Univers.

La notion de *lieu*, qui remonte encore à Aristote, et les questions qui se rapportent à cette notion ont eu aussi une grande importance.

Le *lieu* d'un corps, d'après la première définition d'Aristote, c'est la surface immédiate du corps qui le contient ; d'autre part, Aristote et ses commentateurs veulent que le lieu soit immobile ; d'où la nécessité de modifier la définition précédente; le lieu devient la première surface environnante, qui est immobile.

Dans la doctrine d'Aristote, le monde est limité ; la surface sphérique qui enserre l'orbite des étoiles fixes, la huitième orbite céleste, en marque la borne. En dehors de cette surface sphérique, il n'y a rien. « L'Univers n'est pas *quelque part;* pour qu'une chose soit *quelque part*, il faut non seulement que cette chose ait une existence propre, mais encore qu'il existe, hors d'elle, une autre chose, au sein de laquelle elle soit contenue. Hors de l'Univers, du Tout, il n'existe rien. » S'il en est ainsi, quel est le *lieu* de la huitième sphère ? en a-t-elle un ? et comment peut-elle se mouvoir ? Aristote n'est pas sans avoir vu ces difficultés, où se débattront ses commentateurs et ses successeurs ; il y répondra

assez mal en disant que le huitième ciel est dans un lieu *d'une certaine manière et par accident.*

Vers le VIe siècle, Damascius enseigne que le *lieu* est un ensemble de mesures géométriques, qui sert à décrire, à déterminer un attribut du corps, sa *position ;* le *lieu* est la mesure de la *position* (θέσις). Pour Jean Philopon, le *lieu*, c'est l'espace avec ses trois dimensions : cet espace doit être entièrement séparé par la pensée des corps qui l'occupent ; il doit être regardé comme un volume incorporel étendu en longueur, largeur et profondeur. « Le lieu et le corps qui est en ce lieu forment une de ces couples de choses qui sont liées individuellement, en sorte que l'une ne peut être sans l'autre ; la pure raison distingue le lieu d'avec le corps, mais le lieu ne peut jamais, sans corps, être en acte. » Cet espace, distinct de tout corps et vide par lui-même, demeure absolument immobile et dans son ensemble et dans chacune de ses parties.

On voit ainsi, peu à peu, se dédoubler la notion du lieu ; au XIVe siècle, ce dédoublement s'affirme dans la théorie de Walter Burley.

« En cette théorie, dit M. Duhem, le lieu garde la définition qu'Aristote lui avait donnée tout d'abord ; mais au lieu ainsi défini l'immobilité n'est point accordée ; on se refuse à employer ce lieu dans la description du mouvement local.

» L'élément fixe qui sert à repérer le mouvement, ce n'est pas le lieu, c'est l'*ubi* du mobile. L'*ubi* d'un corps, c'est la position de ce corps par rapport à d'autres corps fixes. Ces corps fixes d'ailleurs, qui servent de termes de comparaison pour la définition de l'*ubi* et la détermination du mouvement local, n'ont pas besoin d'être des corps réels et concrets ; il suffit qu'ils soient conçus par la raison.

» Si le lieu que considère Walter Burley est bien tel qu'il s'est premièrement présenté à la pensée d'Aristote, l'*ubi* qu'il conçoit est identique de tout point à la θέσις de Damascius et de Simplicius. »

Que la théologie ait contribué à ruiner la doctrine d'Aristote sur l'immobilité nécessaire de la Terre et à préparer ainsi, dans quelque mesure, le système de Copernic, il est piquant de le noter. Au XIIIe siècle, les théologiens de la Sorbonne, inquiets

des restrictions que certains philosophes prétendent, au nom de la logique, apporter au pouvoir divin, condamnent la doctrine d'après laquelle Dieu ne pourrait mouvoir la Terre.

D'autre part, bon nombre de théologiens avaient imaginé de poser un dernier ciel immobile au delà des cieux mobiles des astronomes et de trouver un lieu à ceux-ci, au sens d'Aristote.

« Au delà de la surface convexe de ce neuvième ordre, dit Campanus de Novare, y a-t-il quelque autre chose, une autre sphère, par exemple ? Cette conclusion ne s'impose pas par nécessité de raison. Mais, instruits par la foi, acquiesçant avec respect à l'opinion des saints docteurs de l'Église, nous confesserons qu'au delà de ce neuvième ciel se trouve l'Empyrée, où est la demeure des bons esprits.

. . . .

» Au delà de la surface convexe de l'Empyrée, il n'y a rien ; elle est la limite suprême de toutes les choses corporelles, la surface la plus éloignée du centre commun de toutes les sphères, c'est-à-dire du centre de la Terre. C'est pourquoi elle est le lieu général et commun de toutes choses qui sont contenues, car elle contient toutes choses et rien d'étranger ne la contient. »

C'est encore la doctrine professée par Pierre d'Ailly : au delà des sphères mobiles, il doit exister une autre sphère qui demeure en repos.

Ici, je laisse la parole à M. Duhem :

« Le parti adopté par Pierre d'Ailly est aussi celui auquel va se ranger Copernic ; mais il lui sera possible de concrétiser encore davantage le principe admis par l'évêque de Cambrai. Il ne lui sera pas nécessaire d'attribuer l'immobilité à un orbe dont les raisonnements du théologien et du philosophe affirment seuls l'existence, sans qu'il soit possible à nos sens de s'en assurer. La sphère ultime qu'il va prendre pour lieu de tous les corps célestes ou élémentaires, pour repère de tous les mouvements, c'est la sphère des étoiles fixes. En attribuant aux mouvements de la Terre tous les phénomènes que ses prédécesseurs expliquaient par les mouvements de cette huitième orbite et des deux orbites non

constellées dont ils l'entouraient, il a conquis le droit d'immobiliser l'orbe des étoiles fixes aux bornes du monde.

. . . .

» L'opinion de Copernic s'affirme surtout, avec autant de concision que de netteté, en ces quelques phrases :

» *La première de toutes les sphères célestes, la sphère suprême, est la sphère des étoiles fixes ; elle se contient elle-même et contient toutes choses ; partant elle est immobile, c'est-à-dire qu'elle est le lieu auquel doivent être rapportés le mouvement et la position de tous les autres astres.* »

La notion du mouvement relatif est une notion expérimentale ; nous ne connaissons pas d'autres mouvements que des mouvements relatifs ; leur considération suffit pour une description cinématique de l'Univers. A ce propos, M. Duhem cite quelques pages d'un certain Simon de Gamaches, chanoine régulier de Sainte-Croix de la Bretonnerie et membre de l'Académie des Sciences, dont certaines phrases auraient pu très bien figurer dans *La Science et l'hypothèse*. « ... Mais, si je voulais établir le système du monde, je ferais le contraire : je supposerais la Terre en mouvement ; c'est que le jeu mécanique des parties de l'Univers en deviendrait plus facile à suivre, et puis cette supposition fournirait même plus d'uniformité. Car, dès qu'on fait mouvoir les planètes, pourquoi une seule se trouverait-elle exceptée ? Mais avec tout cela je ne ferais que des suppositions, et, si je prenais les plus simples, ce ne serait que parce que je les trouverais plus commodes ; c'est que rien ne m'obligerait absolument à leur donner la préférence. »

Il est difficile de rester au point de vue purement cinématique, de ne pas tenir compte de la dynamique newtonienne et de l'ordre admirable qu'elle met dans notre conception de l'Univers. Il faut admettre alors un système de repères par rapport auxquels cette dynamique soit vraie. Newton admettait que le centre de gravité du système solaire est immobile.

On a dû abandonner cette hypothèse. Pas davantage, on ne peut regarder l'ensemble des étoiles comme immobile. Où sera donc le système fixe ? L'important est qu'il en existe un. « En une région inconnue de l'Univers, dit Carl Neumann, il existe un

corps également inconnu, qui est un corps absolument rigide, un corps dont la figure et les dimensions demeurent invariables au cours du temps. Qu'il me soit permis, en vue de la brièveté du discours, de nommer ce corps le *corps Alpha*. Il sera désormais admis que, lorsqu'on parle du mouvement d'un point, on n'entend pas parler de son changement de position par rapport à la Terre, ou par rapport au Soleil, mais de son changement de position par rapport au corps Alpha. »

M. Painlevé appelle *axes absolus* tout système d'axes pour lesquels la dynamique de Newton est vraie; il affirme que l'existence d'axes absolus est démontrée par l'expérience. M. Duhem s'était exprimé lui-même d'une façon analogue : les hypothèses et les lois physiques font intervenir les mouvements des différentes parties de la matière par rapport à un certain trièdre de référence idéal, qu'on suppose tracé quelque part; les propositions qu'on regarde comme exactes pour ce trièdre idéal ne le seraient pas par rapport à un autre trièdre de référence, animé d'un mouvement quelconque relativement au premier.

Il y a peut-être des nuances entre les façons dont M. Duhem, M. Painlevé et Carl Neumann entendent le mot *exister;* mais ce n'est sans doute que des nuances. M. Duhem déclare que son trièdre est idéal, et c'est idéalement qu'il le suppose tracé quelque part. M. Painlevé, lorsqu'il dit que l'expérience prouve l'existence d'axes absolus, lorsqu'il se plaît à soutenir que cette existence est aussi certaine que l'existence du monde extérieur, ne prétend assurément pas que lesdits axes soient figurés en noir ou en blanc avec les lettres x, y, z à côté. A lire la phrase de Carl Neumann, citée plus haut, on pourrait estimer que, pour lui, le corps Alpha, absolument rigide, a une existence réelle, actuelle, ...; mais les citations ultérieures que donne M. Duhem idéalisent singulièrement le corps Alpha. Corps Alpha ou axes absolus font partie de la conception scientifique actuelle du milieu qui nous entoure et dont nous faisons partie, de cette conception grâce à laquelle nous comprenons et nous dominons une parcelle de ce milieu.

J. T.

BURALI-FORTI (G.) et MARCOLONGO (R.). — OMOGRAFIE VETTORIALI CON APPLICAZIONI ALLE DERIVATE RISPETTO AD UN PUNTO E ALLA FISICA-MATEMATICA. 1 volume in-8°, XI-115 pages. Turin, 1909.

Cet intéressant Opuscule fait suite aux *Elementi di Calcolo vettoriale* des mêmes auteurs. L'exposition théorique frappera le lecteur par son caractère général et philosophique ; il va de soi que les coordonnées n'y jouent à peu près aucun rôle et que les raisonnements portent sur les êtres géométriques mêmes. Les applications concernent la cinématique des déformations infinitésimales, la statique des corps continus, le mouvement par ondes planes dans les milieux isotropes ou cristallins, les lois de propagation d'une onde plane transversale dans les cristaux magnétiques (équations de Maxwell-Hertz), les propriétés du flux de chaleur dans un corps cristallisé. Elles sont traitées d'une façon brève et élégante qui met en évidence l'importance de deux concepts principaux qui font l'objet de la partie théorique du Livre, les homographies vectorielles et les dérivées par rapport à un point de quantités scalaires, ou d'êtres géométriques qui sont fonctions de ce point. J. T.

ROUSE BALL (W.). — RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES ET PROBLÈMES DES TEMPS ANCIENS ET MODERNES. Deuxième édition française traduite sur la troisième édition anglaise et enrichie de nombreuses additions par J. FITZ-PATRICK. — Deuxième Partie : *Questions de Géométrie. Questions de Mécanique. Questions diverses. Carrés magiques. Problèmes des tracés continus. Trois problèmes de Géométrie. Équation du troisième degré.* 1 vol. in-8°, 363 pages. Paris, Hermann, 1908. — Troisième Partie, avec additions de MM. MARGOSSIAN, REINHART, FITZ-PATRICK et AUBRY. 1 vol. in-8°, 363 pages. Paris, Hermann et fils, 1909.

Le *Bulletin* a déjà eu l'occasion de parler de cette nouvelle édition des *Récréations mathématiques* de M. Rouse Ball [1] ; je ne sais si c'est parce que je viens de le feuilleter, mais le second Volume me paraît encore plus intéressant et plus instructif que le

---

[1] T. XXXII, p. 69.

premier. Les questions célèbres, dont plusieurs ont exercé la sagacité de mathématiciens comme Euler, Möbius, Legendre, Cayley, ..., abondent. Les paradoxes de Géométrie et de Mécanique donnent à réfléchir; les problèmes tirés des jeux de dames, d'échecs, de cartes ou de dominos sont fort curieux et amusants. Signalons enfin un grand nombre de problèmes d'*Analysis situs*, fort instructifs. Récemment, dans sa première leçon comme professeur titulaire au Collège de France, M. Hadamard (1) appelait l'attention de ses auditeurs sur l'importance des problèmes de cette nature et le rôle que devraient jouer dans l'enseignement quelques idées simples relatives à cette branche des Mathématiques. Les maîtres qui voudraient entrer dans cette voie pourront profiter largement du Livre de M. Rouse Ball. Ils profiteront largement aussi des nombreux renseignements historiques dont presque tous les problèmes sont accompagnés. Ils liront avec intérêt, en particulier, ceux qui concernent la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle. Combien de têtes, malgré tout, sont encore hantées par ces problèmes! La plupart de ceux qui lisent ces lignes ont sans doute reçu des lettres d'inconnus leur annonçant ou leur adressant la solution de l'un ou de l'autre de ces problèmes : ils souhaiteront, avec moi, que le Livre de M. Rouse Ball se répande et contribue à faire comprendre la position des questions. Il est vrai que, maintenant, grâce à un prix malencontreux, c'est le théorème de Fermat qui sévit d'une façon particulière.

Je ne dois pas oublier la reproduction, à la fin du Volume, de la Notice historique sur la résolution de l'équation du troisième degré que Terquem avait extraite, pour son *Bulletin*, du Livre du P. Cossali (*Origine*,..., Parme, 1797, 1799).

Enfin l'éditeur, M. Hermann, a plaisir à se rappeler qu'il est mathématicien : il nous donne, en terminant, pour la résolution de l'équation du troisième degré, une méthode d'approximation fort naturelle qui réussit en particulier dans le cas irréductible. Il avait déjà publié cette méthode, en 1869, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

La troisième Partie des *Récréations mathématiques* intéres-

---

(1) *La Revue du mois*, t. VIII, 1909, p. 38.

sera le lecteur comme les deux premières ; M. Rouse Ball, à la vérité, n'occupe qu'une faible place, un peu plus du sixième ; mais les Chapitres qui lui appartiennent sont fort intéressants ; dans l'un de ces Chapitres, l'auteur raconte comment s'y prenaient les astrologues pour construire leurs maisons du ciel ; il a même reproduit un horoscope d'Édouard VI d'Angleterre, dressé par Cardan et dont les prédictions ne furent pas du tout réalisées ; l'astrologie a tenu un si grand rôle dans les romans et dans l'histoire, qu'un peu de curiosité à son égard est bien naturel ; je suis persuadé que plus d'un lecteur prendra, à lire les quelques pages de M. Rouse Ball, le plaisir que j'y ai goûté ; d'autres, qui ne les liront pas, seront très contents d'avoir un Livre où se trouvent de pareils renseignements ; il ne faut pas mépriser ces gens-là (n'en sommes-nous jamais?), sans lesquels les éditeurs qui font paraître des Livres aussi sérieux que les *Récréations mathématiques* n'arriveraient pas à vivre.

Dans un autre Chapitre, sur l'hyperespace, M. Rouse Ball expose, avec beaucoup d'humour, toutes les raisons qu'on a de croire à la réalité de la quatrième dimension. « Le crois-tu? », demandait frère Jean à Panurge (sur d'autres matières) : « jusques au feu, exclusivement », répondait Panurge. Nous ne demanderons pas à M. Rouse Ball une foi plus ferme que celle de Panurge.

Enfin, un troisième Chapitre, sur la mesure du temps, les calendriers, les instruments de mesure, est plein de renseignements fort curieux et intéressants.

Le Volume s'ouvre par un travail de M. Margossian sur l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques impairs (64 p.) : l'auteur traite des carrés magiques à ordonnance régulière, à disposition oblique ou cavalière, en supposant d'abord que le nombre de cases soit le carré d'un nombre premier, puis le carré d'un nombre impair composé.

M. le capitaine Reinhart a donné quelques pages sur l'emploi du papier calque pour la solution graphique de problèmes de construction géométrique, et M. Fitz-Patrick une Note sur un certain nombre de problèmes géométriques qui se résolvent très simplement en pliant et en découpant du papier. Tout cela est extrêmement ingénieux.

C'est M. A. Aubry qui a apporté à l'Ouvrage la plus longue

contribution, presque le tiers du Volume. On appréciera sûrement la patience et le goût avec lesquels il a récolté en Arithmétique, en Algèbre et en Géométrie un nombre extraordinaire de faits curieux, de problèmes singuliers, de solutions inattendues, d'énigmes irritantes, de jolis amusements ; d'ailleurs beaucoup des sujets qu'il traite ont de la portée et se rattachent directement soit à des théories classiques, soit à des applications pratiques.

Plus d'un professeur, en lisant ces pages, notera divers exemples dont il saura se servir pour orner son enseignement, pour réveiller la curiosité de ses élèves, pour les étonner ou simplement pour les amuser. Tout cela est excellent : l'uniformité, l'ennui, la solennité ne sont pas indispensables au maître qui veut enseigner avec ordre, avec rigueur et montrer comment les idées s'enchaînent. J. T.

SCHLESINGER (L.). — BERICHT ÜBER DIE ENTWICKELUNG DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN SEIT 1865 [1]. 1 volume in-8°, IV-133 pages. Leipzig et Berlin, Teubner, 1909.

M. Schlesinger a pris pour épigraphe de son beau rapport, sur le développement de la théorie des équations différentielles linéaires, cette pensée de Leopardi : *Il più certo modo di celare agli altri i confini del proprio sapere e di non trapassarli.* En choisissant cette épigraphe, M. Schlesinger a, sans doute, voulu être modeste ; mais il s'est trompé ; tous ceux qui liront les 60 pages où il a résumé son sujet, qui feuilletteront la liste des 1742 Mémoires ou Livres qui s'y rapportent en seront convaincus.

C'est que, en effet, le développement de la théorie des équations différentielles linéaires s'est fait dans des directions très diverses, qu'il est lié aux principaux progrès réalisés en Analyse depuis un demi-siècle, dans la théorie générale des fonctions, dans l'étude et la création des fonctions particulières, dans la théorie des groupes. Celui qui le connaît à fond manifeste, en le racontant, la grande étendue de ses connaissances mathématiques.

---

[1] Extrait du Tome XVIII du *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung.*

L'illusion de M. Schlesinger provient sans doute de ce qu'il est très familier avec son sujet ; il semble que ce que nous possédons vraiment tienne peu de place dans notre esprit.

Comment les idées et les méthodes s'engendrent, divergent, se rapprochent, c'est ce que doit montrer un rapport comme celui de M. Schlesinger. L'ordre qu'il convient d'adopter pour l'exposition d'une matière aussi riche et aussi variée ne peut être purement chronologique, parce que les diverses branches s'accroissent simultanément et qu'il faudrait sauter continuellement de l'une à l'autre. M. Schlesinger a distingué quelques branches principales, dont il a suivi le développement et les ramifications depuis le Mémoire fondamental de Fuchs (1865) jusqu'à nos jours.

Après une courte introduction, où il met en évidence le rôle qu'ont tenu, dans les découvertes de Fuchs, d'une part les idées profondes sur la nature des solutions de l'équation hypergéométrique que Riemann avait émises et, d'autre part, les recherches sur le développement en séries entières des solutions d'une équation différentielle que Cauchy avait ouvertes et qu'avaient continuées Briot et Bouquet, l'auteur traite d'abord des théorèmes d'existence (développements en séries, méthodes des approximations successives, méthodes d'interpolation), puis de la théorie générale (rôle et distinction des points singuliers, solutions asymptotiques, équations de Fuchs) ; deux Chapitres sont ensuite consacrés, l'un aux analogies des équations différentielles linéaires avec les équations algébriques, l'autre aux analogies entre les fonctions qui satisfont aux équations différentielles linéaires et les fonctions algébriques. Le premier traite, en particulier, de l'extension aux équations linéaires de la théorie de Galois, des équations adjointes, des invariants différentiels, des équations différentielles linéaires algébriquement intégrables, de l'équation de Lamé, à propos de laquelle l'auteur fait ressortir ce fait que la solution d'Hermite fournissait le premier exemple de cette méthode *d'uniformisation* dont le caractère général devait apparaître bientôt dans les travaux de M. Poincaré. Dans l'autre Chapitre, l'auteur s'occupe des recherches relatives à la détermination, pour les équations de Fuchs, des substitutions de passage et du groupe de monodromie, des équations différentielles que vérifient les modules

de périodicité, de l'équation différentielle de Pochhammer qui généralise l'équation hypergéométrique; des propriétés de ces intégrales définies, qui portent sur des solutions d'équations de Fuchs, sont prises entre deux points d'embranchement et généralisent les intégrales abéliennes; enfin de l'échange du paramètre et de l'argument. Le Chapitre suivant concerne le problème d'inversion, les fonctions fuchsiennes et kleinéennes de M. Poincaré, les travaux qui se rattachent aux belles découvertes de ce géomètre dans ce domaine. Enfin le sixième et dernier Chapitre, intitulé *Gruppentheoretische Probleme*, traite en particulier des travaux sur la façon dont les solutions, les substitutions fondamentales, le groupe d'une équation différentielle dépendent d'un paramètre qui figure dans son premier membre, de ceux enfin qui se rapportent au problème de Riemann, c'est-à-dire à la construction d'équations différentielles admettant, avec des points d'embranchements donnés, des substitutions fondamentales données.

J'ai déjà dit que la bibliographie, arrêtée en 1907, comprenait 1742 numéros. Elle est dressée par année et comprend les indications désirables; un index par noms d'auteurs rend les recherches très faciles; on est heureux de voir M. Richard Fuchs prendre déjà dans cette liste une place importante.

J. T.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Janet (P.). — *Leçons d'Électrotechnique générale*, professées à l'École supérieure d'Électricité. 3e édition. T. Ier : Généralités; Courants continus. In-8°, VII-417 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 13 fr.

Tissot (C.). — *La téléphonie sans fil*. In-8°, 26 p. Paris, H. Dunod et E. Pinat. 2 fr.

Appell (P.). — *Traité de Mécanique rationnelle*. T. III : Équilibre et mouvement des milieux continus. In-8°, VIII-646 p., 70 fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

Anthony, Gardner Chace and G. Francis Ashley. — *Descriptive Geometry*. x-130 p., diagrs. Boston, Heath. 2 sh.

Boquet (F.). — *Les observations méridiennes. Théorie et pratique*. XII-660 p. av. 162 fig. et 2 pl. Paris, O. Doin et fils. 10 fr.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. III. Bd : *Geometrie*. Red. v. W. Fr. Meyer. 2. Tl. 4. Heft. In-8°, p. 457-570. Leipzig, B.-G. Teubner.

Leutenegger (J.). — *Lehrbuch der Differential-Rechnung*. Zum Gebrauche an hoheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium bearb. In-8, 160 p. avec fig. Bern, A. Franke. Relié : 3,20 m.

Monlaur (D.). — *Tables de multiplication et de division à l'usage des agents des contributions directes et du cadastre*, etc. In-fol., 999 p. Rennes, Oberthür. Br., 25 fr.; rel., 28 fr.

Turner (G.-C.). — *Graphical methods in applied Mathematics*. In-8°, $7\frac{1}{2} \times 4\frac{3}{4}$, 398 p. London, Macmillan. 6 sh.

Vallois (E.). — *Cours de Géométrie descriptive à l'usage des candidats à l'École des Beaux-Arts*. In-8°, 308 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7,50 fr.

Thomson (Sir J.-J.). — *Elements of the mathematical theory of Electricity and Magnetism*. 4th edit. In-8°, $7\frac{1}{2} \times 4\frac{3}{4}$, 558 p. Cambridge Univ. Press. 10 sh.

Atlas lunaire, publié par la Société belge d'Astronomie. In-4°. Paris, Gauthier-Villars. 3 fr.

Bolza (Osk.). — *Vorlesungen üb. Variationsrechnung.* Umgearb. u. stark verm. deutsche Ausg. der *Lectures on the calculus of variations* desselben Verf. 2. Lfg. Gr. in-8°, iv et 301-541 p., 72 fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 6 m.

Coffin (Jos.-G.). — *Vector analysis: an introduction to vector methods and their various applications to physics and mathematics.* In-12°, xix-248 p., avec fig. New-York, John Wiley and Sons. 2,50 sh.

Comberousse (de). — *Cours de Mathématiques.* T. IV: *Algèbre supérieure*, 2e partie, 3e éd. In-8°, xxiv-832 p. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München u. Wien, sowie unter Mitwirkg. zahlreicher Fachgenossen. III. Bd. : *Geometrie.* Red. v. W.-Fr. Meyer. 1. Tl. III. Heft. In-8°, p. 389-480. Leipzig, B.-G. Teubner. 3 m.

Fuchs (L.). — *Gesammelte mathematische Werke.* Hrsg. v. Rich. Fuchs u. Ludw. Schlesinger. 3. Bd. : Abhandlungen (1888-1902) u. Reden. Red. v. Rich. Fuchs. In-8°, xi-460 p. Berlin, Mayer et Müller. 28 m.; relié, 32,50 m.

Klein (F.). — *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* II. Tl. : *Geometrie.* Vorlesung, geh. im Sommersem. 1908. Ausgearb. v. E. Hellinger. Gr. in-8°, viii p. et 515 p. autogr. avec fig. Leipzig, B.-G. Teubner. 7,50 m.

Kowalewski (Gerh.). — *Einführung in der Determinantentheorie einschliesslich der unendlichen u. der Fredolmschen Determinanten.* Gr. in-8°, v.-550 p. Leipzig, Veit et Co. 15 m.; relié, 16 m.

Minkowski (Herm.). — *Raum. u. Zeit.* Vortrag. Mit dem Bildnis Herm. Minkowskis sowie e. Vorwort v. A. Gutzmer. (Sonderdr.) In-8°, iii-14 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 80 m.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. 18e série. Fiches 1701 à 1800. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr.

Schurig (Rich.). — *Tabulæ cælestes continentes omnes stellas cæli borealis nec non australis nudis oculis conspicuas.* Himmels-Atlas, enth. alle m. blossen Augen sichtbaren Sterne beider Hemisphæren. In 2 neubearb. u. ergänzter Aufl. hrsg. v. *P. Götz.* $32^{cm} \times 22^{cm}$, 9 pl. en couleurs avec iv p. de texte, Leipzig, E. Gæbler. Cart., 3 m.

Schwering (Karl). — *Lehrbuch der kleinsten Quadrate.* Gr. in-8°, vii-105 p. avec 3 fig. Freiburg i. B., Herder. 2,40 m.; relié, 2,80 m.

Lorentz (H.-A.). — *The theory of electrons.* In-8°. London, Nutt. 9 sh.

Lorentz (H.-A.). — *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat.* A courses of lectures (*B.-G. Teubner's Sammlung v. Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen*). Gr. in-8°, IV-332 p. Leipzig, B.-G. Teubner. 8 m.; relié, 9 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

AUERBACH (FÉLIX). — TASCHENBUCH FÜR MATHEMATIKER UND PHYSIKER, unter Mitwirkung von FR. AUERBACH, O. KNOPF, H. LIEBMANN, E. WÖLFING, U. A., herausgegeben. In-8, XLIV-450 pages, avec un portrait de Lord Kelvin. Leipzig et Berlin, B.-G. Teubner, 1909.

L'auteur de ce nouveau Manuel a voulu combler une lacune; il a voulu mettre les mathématiciens et les physiciens sur le même pied que les chimistes, les astronomes, les ingénieurs, les géographes, et les doter d'un Annuaire où ils pourront trouver tous les renseignements et toutes les Tables qui leur sont indispensables pour leurs travaux de chaque jour. S'il a réuni dans un même Volume ceux de ces moyens d'étude qui conviennent aux mathématiciens, et ceux qui conviennent aux physiciens, c'est qu'il a pensé que deux Manuels distincts auraient trop de parties communes et qu'il convenait pour cette raison de les fondre en un seul.

La partie mathématique a été traitée par M. Wölfing, de Stuttgart; elle comprend l'Arithmétique, l'Algèbre, la résolution des équations, la théorie des séries, l'Analyse, la théorie des fonctions, la Géométrie élémentaire, la Géométrie supérieure, la Géométrie infinitésimale, le calcul graphique et l'analyse des vecteurs, le tout traité en 160 pages environ. La Mécanique a pour auteur M. Liebmann, de Leipzig; elle comprend à peine 40 pages, dans lesquelles sont exposées les notions essentielles de Statique, de Cinématique et de Dynamique. Les notions de Physique, qui comprennent 150 pages, sont dues à M. Félix Auerbach. En une vingtaine de pages M. Fr. Auerbach a exposé les lois essentielles de la Chimie générale. C'est à M. Knopf, d'Iéna, que sont dues les notions astronomiques et les Tables qui constituent une partie importante de la préface.

Enfin l'auteur a fait précéder son Ouvrage d'une courte et intéressante Notice sur Lord Kelvin, à laquelle se joint un beau portrait du grand physicien-géomètre. J. G.

BEUTEL (E.). — ALGEBRAISCHE KURVEN. Erster Teil : KURVENDISCUSSION. (Sammlung Göschen.) 1 volume in-18, 147 pages, Leipzig, G.-J. Göschen 1909.

Le titre de ce petit Volume est parfaitement clair : l'auteur s'y est proposé de montrer comment on peut rapidement construire une courbe donnée par son équation en coordonnées ponctuelles. Il expose les théories qui sont nécessaires pour cet objet et les applique à des exemples bien choisis. J. G.

JAULIN (E.). — TRAVAUX GRAPHIQUES. 1 volume in-16, VI-474 pages, avec 739 figures et 8 planches. Paris, H. Dunod et E. Pinat, 1909.

Cet Ouvrage sur les travaux graphiques est consacré à l'étude d'une partie des généralités qui constituent l'instruction première des ingénieurs et conducteurs.

L'auteur, qui a été chef des travaux graphiques à l'École Centrale pendant plusieurs années, était particulièrement qualifié pour écrire cet Ouvrage, qui se recommande surtout par son caractère pratique, exempt de toute spéculation relative à la théorie des courbes et des surfaces, et dont la lecture est accessible aux personnes ne possédant que les premiers éléments de la Géométrie.

Après avoir étudié sommairement les notions de Géométrie descriptive absolument indispensables, l'auteur aborde les applications à la théorie et au tracé des ombres, la perspective, la charpente, la coupe des pierres, la gnomonique, etc. Les Chapitres suivants, relatifs au dessin géométrique et au lavis théorique, seront très appréciés des praticiens qui y trouveront une foule de renseignements utiles et de nombreux exemples. G. J.

BRIOSCHI (FRANCESCO). — OPERE MATEMATICHE PUBBLICATE PER CURA DEL COMITATO PER LE ONORANZE A FRANCESCO BRIOSCHI (G. Ascoli, V. Cerruti, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Tomo quinto ed ultimo. In-4°, XII-556 pages. Milan, Ulrico Hœpli, 1909.

Le Volume cinquième et dernier des Œuvres de Brioschi dont nous avons aujourd'hui à rendre compte a été préparé et revu pour l'impression par les professeurs F. Gerbaldi et E. Pascal. Il se distingue, il est inutile de le dire, par les mêmes qualités que les précédents. Nous y trouvons la fin des Notes insérées dans les *Comptes rendus* de notre Académie des Sciences et quelques Mémoires, presque toujours isolés, publiés dans différents Recueils : *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, *Mathematische Annalen*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *Proceedings of the London mathematical Society*, *Bulletin des Sciences mathématiques*, etc.

Dans l'ensemble des cinq Volumes, les éditeurs ont toujours réuni les Mémoires parus dans un même recueil. Cela trouble l'ordre chronologique, mais, pour remédier à cet inconvénient, ils nous ont donné le classement par ordre chronologique de tous les Mémoires contenus dans les cinq Volumes de la belle publication qui leur fera grand honneur. A tous les services qu'ils ont ainsi rendus au lecteur, les éditeurs en ajoutent un autre encore. Ils nous donnent la liste des publications mathématiques de Brioschi qu'ils ont éliminées pour différents motifs. C'est ainsi que la nouvelle édition ne comprend pas le *Traité sur les déterminants*, que Brioschi a publié en 1854, et qui a contribué beaucoup à répandre une théorie restée jusque-là en possession d'un petit nombre de grands géomètres.

Ainsi se trouve dignement terminée la tâche que le Comité avait assumée. Il nous souvient d'avoir vu le buste de Brioschi dans la salle des séances de l'Académie des Lincei. L'édition achevée aujourd'hui contribuera pour sa part à faire revivre le talent et l'habileté de l'excellent géomètre. G. D.

ANDRÉ (Désiré). — Des notations mathématiques. *Énumération, choix et usage.* 1 volume in-8, XVIII-501 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

1. Tout le monde sait ce qu'on appelle *notations mathématiques.* Ce sont les signes écrits, autres que les mots du langage ordinaire, qui figurent dans les Livres ou Mémoires. Ces notations se rencontrent, sous forme rudimentaire, dans les écrits des géomètres de l'Antiquité ; elles se sont accrues lentement pendant le Moyen Age, se sont fort développées à l'époque de la Renaissance et ont pris aux XVIIIe et XIXe siècles la forme sous laquelle nous les employons aujourd'hui. Elles ont eu pendant tout ce temps, et ont encore de plus en plus, une influence très considérable sur les progrès de la Science; on pourrait dire que sans elles les Mathématiques modernes n'existeraient point; elles constituent donc, dans l'étude de ces sciences, un sujet d'une importance capitale : on pouvait s'étonner qu'il n'existât encore aucun Ouvrage qui leur fût entièrement consacré.

M. Désiré André vient de combler cette lacune, en publiant un fort volume in-8°, intitulé : *Des notations mathématiques. Énumération, choix et usage.* Ce titre fait connaître l'objet de ce Livre et en indique les grandes divisions. Ce sont elles que nous allons suivre pour en présenter une analyse fort incomplète, quoique assez étendue.

I.

2. Sous le titre d'*Énumération*, la première Partie a pour but de faire connaître l'ensemble des signes employés présentement dans les Mathématiques soit pures, soit appliquées. Elle considère : d'abord, les signes de grandeurs; puis, les signes de calcul; ensuite, les signes d'objets; enfin, les signes de rédaction.

3. Dans les quatre Chapitres relatifs aux signes de grandeurs, comme dans tout le reste de l'Ouvrage, se trouvent une multitude d'observations, de remarques, d'exemples, de règles strictes. Nous parlerons seulement des plus importantes de celles-ci.

D'abord, tous les chiffres doivent être nets et simples; dans les assemblages qu'ils forment, ils doivent se suivre conformément aux lois de la numération; ils doivent de plus être séparés nettement les uns des autres : *il ne faut jamais lier entre eux les chiffres d'un nombre comme on lie entre elles les lettres d'un mot.*

La numération des fractions décimales n'est qu'une extension de celle des nombres entiers. La virgule placée à la droite du chiffre des unités partage le nombre en deux portions : la partie entière et la mantisse; mais les chiffres de tout le nombre sont symétriques deux à deux par rapport au chiffre des unités. Dans les nombres fractionnaires décimaux, d'ailleurs, comme dans les nombres entiers, les suites de chiffres un peu longues doivent être divisées en groupes par des vides; mais ces vides doivent être des vides *absolus :* le nombre ne doit contenir aucun point et, quant aux virgules, il n'en doit contenir qu'une, celle qui suit le chiffre des unités.

Les quantités déterminées se représentent par le nombre qui les mesure, joint à l'indication de l'unité employée. Pour les quantités continues usuelles, on emploie les unités du système métrique, leurs multiples et sous-multiples, indiqués par un système d'abréviations très régulier et très simple; le nombre exprimant la mesure ne doit contenir qu'une virgule et qu'une indication d'unité. Les quantités telles que les durées et les angles se représentent par des nombres complexes, composés de groupes de chiffres offrant chacun une indication d'unité et séparés par des vides absolus : ils ne peuvent jamais comprendre qu'une virgule, celle qui précède, s'il y a lieu, la fraction décimale complémentaire. Pour les nombres décimaux très grands ou très petits, les physiciens en réduisent souvent la partie entière à une valeur assez faible, en les multipliant par une puissance de 10 d'exposant positif ou négatif; cette puissance est précédée d'un point : *le point ne doit être employé isolément que comme signe de la multiplication.*

Les grandeurs inconnues ou variables ne peuvent s'écrire en chiffres. On les représente le plus souvent par des lettres de l'alphabet latin ou de l'alphabet grec. Il faut que ces lettres soient de forme franche, de contour bien arrêté, et nettement séparées les

unes des autres. Les menus éléments modificateurs, accents, indices, exposants qui les affectent en doivent être aussi séparés, bien que très rapprochés.

4. Comme l'ont montré Steiner et Bourget, les *opérations fondamentales* de l'Arithmétique et de l'Algèbre sont au nombre de *sept*. L'addition et la soustraction doivent avoir des signes assez longs dans le sens horizontal. La multiplication et la division, des signes assez courts. Voilà pourquoi on remplace par un point, ou supprime tout à fait le signe de la multiplication ; mais cette suppression n'est peut-être pas exempte d'inconvénient. Quant à l'élévation aux puissances, elle possède deux inverses : la recherche de la racine et la recherche de l'exposant. Cette dernière opération a reçu de Bourget le nom d'*exponentation*.

Les *signes de coordination* jouent dans l'écriture et la disposition des calculs un rôle de la plus haute importance. Ce sont les signes de *groupement*, les signes de *séparation*, les signes de *correspondance*. Les signes de groupement sont la parenthèse, le crochet, le trait horizontal supérieur. Il existe entre eux une sorte de hiérarchie : *il ne faut jamais superposer de signes de groupement possédant la même forme*. Les signes de séparation sont la virgule, le point-et-virgule, le trait droit horizontal ou vertical, on pourrait dire aussi les places laissées vides. Ce sont les signes de cette sorte qui servent à séparer les diverses parties, les diverses phases du calcul. Quant aux signes de correspondance, ce sont les lignes de points, les accolades, les traits droits ou courbes. Bien que passés d'ordinaire sous silence, les signes de coordination s'emploient constamment, toujours au grand avantage de l'ordre et de la clarté.

Aucune notion mathématique n'est plus importante que celle de *fonction*. Les fonctions dites *explicites* ne demandent pas de notations spéciales. Les *variantes* de M. Méray s'écrivent à l'aide d'une lettre affectée d'un ou plusieurs indices. Les fonctions *indéterminées* telles que $f(x)$, les fonctions *déterminées* telles que $\sin x$ s'écrivent à l'aide de ce qu'on appelle les *caractéristiques : ces caractéristiques devraient toujours être formées d'une lettre unique, ou de plusieurs lettres liées ensemble et constituant un monogramme*.

Un nombre dépendant d'un autre, par exemple le module d'une imaginaire, doit s'indiquer par une notation spéciale. Une fonction dépendant d'une autre, par exemple la dérivée, l'intégrale, le résidu d'une fonction donnée, doit se représenter par une notation rappelant cette fonction donnée. La question de la représentation des fonctions est une question compliquée. Elle est traitée dans l'Ouvrage que nous analysons avec toute l'ampleur qui lui convient.

Ce sont les *signes de relation* qui permettent d'écrire les phrases mathématiques. Ils sont de deux sortes : les *signes d'égalité*, auxquels se rattachent les signes d'identité, de congruence, d'équipollence, d'équivalence. Les *signes d'inégalité* proprement dits, auxquels se rattachent les signes négatifs de relation et les signes positifs doubles. L'auteur signale la grosse faute qu'on a commise en prenant le signe $\equiv$ de la congruence pour signe de l'identité. Il fait remarquer d'autre part que les signes positifs doubles sont, dans la pratique, fort supérieurs aux signes négatifs de relation.

5. En dehors des signes de nombres ou quantités et des signes de calcul, on doit considérer les signes d'objets. Les plus simples sont les signes de la Géométrie pure. Ils consistent en lettres qu'on place soit sur les figures planes, représentées exactement, soit sur les figures de l'espace, représentées par des procédés tels que la Perspective ou la Géométrie descriptive. L'auteur indique la manière de bien placer les lettres sur les figures, et aussi la méthode qu'il convient de suivre pour désigner les figures non tracées.

Ce sont les coordonnées des différentes espèces qui servent de fondement à la Géométrie analytique. Les systèmes de coordonnées sont homogènes ou hétérogènes, parfaits ou imparfaits. Il faut tenir compte de ces différences pour bien choisir les lettres représentant les coordonnées de chaque point et servant à l'écriture des équations. Ces équations nous donnent tantôt une représentation paramétrique des lignes et surfaces; tantôt une représentation sans paramètre. Certaines équations nous définissent une seule ligne ou surface; d'autres nous en définissent une famille. Parfois, on emploie juste le nombre de coordonnées nécessaire; d'autres fois, on en emploie un plus grand nombre, qui alors ne sont pas indé-

pendantes les unes des autres. L'auteur dit un mot des hyperespaces, de la représentation intrinsèque des courbes et des géométries analytiques sans coordonnées.

Les Mathématiques appliquées possèdent plusieurs notations qui leur sont propres et qu'on ne saurait exposer complètement. L'auteur donne un aperçu des notations de la Stéréotomie, de la Charpente, de la Géométrie cotée, de la Topographie, de la Géodésie, de l'Astronomie et de la Mécanique. Il ne dit pour ainsi dire qu'un mot de celles de la Physique, de la Chimie et de l'Histoire naturelle. Il fait remarquer cependant que, dans ces dernières sciences, le rôle des Mathématiques va sans cesse en grandissant et que ce fait est inévitable. *Toute science*, dit-il, *à mesure qu'elle avance, s'enrichit de lois numériques de plus en plus nombreuses et précises. Or, rien ne saurait remplacer l'Algèbre pour exprimer de pareilles lois et pour en développer toutes les conséquences.*

7. Tout travail écrit exige qu'on ait recours aux *signes de rédaction*, c'est-à-dire aux signes qui servent au bon agencement des matières, à leur distribution, à leur disposition. Les préceptes concernant les divisions d'un Livre ou Mémoire, les Tables et titres courants, les appels de notes, les renvois à un paragraphe s'appliquent à tous les Ouvrages. Mais les Mathématiques exigent, en outre, des préceptes particuliers relatifs aux figures et aux calculs. Il faut que les figures soient mises en place commode et qu'on les puisse consulter sans peine. Il faut dire dans quel cas le langage ordinaire peut s'introduire au milieu des calculs et les notations s'intercaler dans le texte. Pour abréger, surtout dans les manuscrits, on remplace parfois certains mots très fréquents par des caractères qui ne sont le plus souvent que de petites images des objets. Dans quelle mesure peut-on se servir de ces petites images? Bien plus, on a fait récemment des tentatives très méritoires pour créer une *pasigraphie mathématique*. L'auteur, qui loue beaucoup ces tentatives, se demande toutefois si elles donneront les heureux résultats que certains se croient fondés à en espérer.

II.

8. La seconde partie des notations mathématiques est intitulée : *Choix*. Son but, c'est de résoudre cette question : *Étant donné un système quelconque d'objets, créer pour le représenter un système excellent de signes*. On y étudie successivement : les qualités fondamentales des signes de toute espèce ; les signes généraux et les signes des quantités mesurées ; les systèmes ne comprenant qu'une sorte d'objets ; ceux qui en comprennent deux ou plusieurs ; enfin certains systèmes particuliers où le bon choix des signes est difficile, sinon impossible.

9. M. D. André entend par *netteté* du signe *l'ensemble des conditions auxquelles, pour être bon, doit satisfaire un signe quelconque, considéré en lui-même, c'est-à-dire considéré isolément, abstraction faite de l'objet qu'il représente*.

Il faut que ce signe soit bien visible ; qu'il ait une forme franche et décidée ; que sa position et son orientation dans l'ensemble de l'écriture ne souffrent aucune indécision, et qu'il en soit de même pour les positions relatives des éléments qui le composent et des menus modificateurs, accents, exposants, indices dont il est affecté. Il faut de plus que tous ces éléments soient bien séparés ou réunis ; que leur nombre ne soit pas trop grand ; que l'ensemble qu'ils forment ne soit pas compliqué. L'auteur distingue entre la complexité et la complication. *La complexité ne peut pas toujours être évitée, la complication doit toujours l'être*. Il faut enfin que le signe soit immuable, et de nature telle que nous puissions facilement nous l'assimiler.

Plusieurs signes considérés ensemble, abstraction faite des objets qu'ils représentent, doivent pour être bons posséder certaines qualités. C'est l'ensemble de ces qualités que l'auteur désigne par le mot *précision*. Pour que des signes soient précis, il faut d'abord que deux quelconques d'entre eux présentent une différence, simple ou multiple, mais très nette, très tranchée. *Que le même signe représente toujours le même objet, et que deux objets différents soient toujours représentés par deux signes*

différents : c'est une première règle fondamentale. *Que le même objet soit toujours représenté par le même signe et que deux signes différents représentent toujours deux objets différents* : c'en est une seconde. Ces deux règles devraient être constamment observées : les infractions pullulent. Il est encore une condition que les signes doivent toujours remplir : c'est de pouvoir être facilement rapportés à leurs objets respectifs. L'auteur recommande le moyen mnémonique le plus simple, celui qui remonte aux premiers algébristes, et qui consiste à représenter chaque objet par l'initiale de son nom.

Pour pouvoir bien étudier un objet, il faut que nous en ayons constamment les diverses propriétés présentes à l'esprit. Il faut donc que le signe de l'objet nous exprime ces propriétés. Si l'objet est simple, son signe doit être simple ; si l'objet est complexe, son signe doit être complexe. Le signe doit nous montrer la composition ou, si l'on veut, la structure de l'objet. Il doit de même nous en montrer la symétrie et la dissymétrie. En définitive, il doit nous rappeler tout ce qu'il est nécessaire que nous sachions. Par contre, il ne doit rien nous rappeler de superflu : faire dire trop de choses au signe, c'est un sûr moyen de l'alourdir et de le compliquer.

Lorsque l'on considère en même temps plusieurs objets et qu'on s'occupe de les représenter par des signes, il faut que ces signes nous rappellent les relations qui existent entre leurs objets. Deux objets comparés l'un à l'autre peuvent être analogues ou disparates : les deux signes qui les représenteront devront être de même analogues ou disparates. Des objets analogues deux à deux, et analogues de la même façon, formeront une sorte d'objets : des signes présentant les mêmes propriétés formeront une sorte de signes. *Aux objets constituant une sorte d'objets, devront toujours correspondre des signes constituant une sorte de signes. Aux objets constituant deux sortes différentes d'objets, devront toujours correspondre des signes constituant deux sortes différentes de signes.* Dans une même question : *les sortes d'objets et les sortes de signes se correspondront chacune à chacune et seront en même nombre.* S'il existe des correspondances particulières entre les objets de deux sortes, il devra exister des correspondances pareilles entre leurs signes. *Le système entier des signes devra être une image fidèle du système entier des*

objets. Voilà l'un des principes les plus importants de toute la théorie des notations. Il nous prouve que le choix des signes doit toujours être précédé d'un examen minutieux, et aussi d'une classification complète de tous les objets à représenter.

10. Il existe toutefois deux cas où cet examen et cette classification ne sont pas nécessaires. Le premier est celui où l'on n'a à choisir que des signes généraux : chiffres, signes d'opérations, signes de coordination, de relations, de rédaction, c'est-à-dire que des signes qui ne changent point quand on passe d'une question à une autre. Le second cas est celui où il s'agit de représenter des quantités mesurées. Les signes employés alors doivent être d'une précision absolue : il faut dire toujours de quel genre de quantités l'on parle et, lorsque la nature de la quantité est connue, de quelle unité on se sert pour la mesurer. On doit choisir avec le plus grand soin les abréviations indiquant les unités, leurs multiples et sous-multiples, car ce sont les mauvaises abréviations qui ont causé la plupart des erreurs courantes. Il faut, pour que les signes soient comparables, que les quantités d'une même espèce soient toutes mesurées avec la même unité, et que les quantités d'espèces différentes qui se correspondent, par exemple les longueurs, les superficies, les volumes, soient toutes exprimées à l'aide des unités correspondantes. Il faut enfin choisir la grandeur de l'unité : prendre une unité très petite pour mesurer les quantités très petites; une unité très grande pour mesurer les quantités très grandes. Ce n'est qu'à cette condition qu'on obtiendra, comme résultat du mesurage, des nombres qui ne seront ni trop grands, ni trop petits : en un mot, des *nombres modérés*.

11. Les signes particuliers, c'est-à-dire les lettres marquées sur les figures et les lettres désignant soit les données, soit les inconnues, varient quand on passe d'un problème à un autre. Le choix en est plus difficile, parce qu'il exige un examen et une classification préalables des objets à représenter.

Supposons d'abord des objets d'une même sorte : ils devront être représentés par des signes d'une même sorte, en même nombre que les objets et leur correspondant chacun à chacun. Soient trois objets analogues : on les représentera par trois lettres consécutives

d'un même alphabet, par exemple a, b, c; ou trois lettres identiques affectées de trois indices consécutifs, a_1, a_2, a_3; ou trois lettres identiques affectées de trois accents consécutifs, a', a'', a'''. Il en serait ainsi quel que fût le nombre des objets analogues, et lors même qu'il croîtrait indéfiniment.

Deux lettres appartenant à deux alphabets différents, ou à deux variétés d'un même alphabet, ou au même alphabet mais n'y occupant pas deux places contiguës, ne sont jamais deux signes analogues et ne peuvent représenter deux objets analogues. Bien plus, deux lettres identiques, l'une sans accent ni indice et l'autre affectée d'un indice ou d'un accent, par exemple a et a_1, b et b', ne sont pas non plus deux signes analogues. Une foule de géomètres les emploient cependant comme tels; ils se refuseront d'abord à changer leurs habitudes; nous croyons cependant qu'après avoir lu le livre des *Notations mathématiques*, et réfléchi sur les exemples nombreux qu'il renferme, ils se rangeront à l'opinion si nette et si ferme de M. D. André.

Lorsque les objets analogues sont un peu nombreux, ils se disposent parfois d'eux-mêmes en une suite linéaire; mais souvent ils ne nous offrent aucun moyen de leur donner cette disposition. En les ordonnant ainsi, nous introduisons parmi eux un ordre artificiel. L'auteur rappelle ce mot de Bacon : *L'esprit humain met souvent dans les choses plus d'ordre qu'il n'y en a.*

12. Deux objets disparates doivent toujours être représentés par deux signes disparates : par a et k, par b et β, par c et c', par f et f_1. Une règle aussi simple devrait être toujours observée : elle est constamment enfreinte. L'Ouvrage que nous analysons en donne une foule d'exemples tirés de l'Arithmétique, de la Géométrie analytique, de l'Algèbre, de la Mécanique.

Après avoir considéré deux objets disparates, il s'occupe des systèmes comprenant deux sortes d'objets : d'abord deux objets d'une sorte et un de l'autre; puis n objets d'une sorte et un de l'autre; enfin p objets d'une sorte et q de l'autre. Ce dernier cas est très général. On en trouve un exemple dans le système de n forces quelconques appliquées à un corps solide associé à l'un des systèmes de deux forces qui lui sont équivalents.

Lorsque l'on considère ainsi deux sortes d'objets, il arrive sou-

vent qu'il existe des correspondances entre certains objets de la première sorte et certains objets de la seconde. La première sorte étant composée d'un seul objet et la seconde de plusieurs, il se peut que l'objet unique de la première sorte corresponde à un objet déterminé de la seconde; il se peut aussi qu'il corresponde à tous et leur corresponde symétriquement, comme il arrive pour la somme de plusieurs nombres et pour ces nombres eux-mêmes. Il se peut encore qu'il y ait des correspondances entre p objets d'une sorte et q de l'autre. Il se peut enfin que, les deux sortes d'objets en comprenant le même nombre, ces objets se correspondent chacun à chacun. Toutes ces correspondances doivent être indiquées. L'auteur montre comment on les indique en employant des nombres pairs et impairs, des accents, des indices. Il donne enfin des exemples où les correspondances sont mal indiquées et même quelques-uns où elles ne le sont pas du tout.

Lorsque le système des objets à représenter en renferme plus de deux sortes, le choix des notations est plus long, plus compliqué, mais il revient évidemment à appliquer plusieurs fois les principes relatifs au cas de deux sortes. Il va sans dire qu'ici encore toutes les correspondances doivent être indiquées; qu'elles doivent l'être exactement; mais qu'il ne faut jamais que les notations puissent faire croire à des correspondances mensongères. L'auteur nous donne, pour les systèmes contenant plus de deux sortes d'objets, une multitude d'exemples tirés de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Mécanique, de la Géométrie pure, de la Géométrie analytique. Ces exemples nous offrent tantôt de bonnes applications des règles, tantôt des infractions flagrantes. Les exemples d'infractions sont, comme toujours, de beaucoup les plus nombreux.

13. Il ne faudrait pas croire que les règles données par l'auteur, non plus d'ailleurs qu'aucunes autres règles, suffisent dans tous les cas à obtenir des notations excellentes. Il existe des systèmes d'objets, et ce ne sont pas les moins intéressants, pour lesquels une représentation parfaite est difficile et parfois impossible. C'est à en donner des exemples que M. D. André emploie le dernier Chapitre de sa deuxième Partie.

Il y considère d'abord la formation des Tableaux à deux ou

plusieurs indices; les classifications superposées que ces Tableaux rendent visibles; puis la manière de noter les arrangements, permutations, combinaisons simples ou complètes: il montre enfin qu'on est conduit en Géométrie, lorsqu'on ne trace pas les figures, à employer des notations systématiques.

Quant aux systèmes impossibles à représenter d'une façon parfaite, il en donne trois exemples : la rose des vents, les 27 droites, les polyèdres réguliers. Les notations spéciales qu'il en fait connaître sont très remarquables; sauf peut-être pour les polyèdres réguliers, elles étaient déjà connues : ce sont sans doute les meilleures qu'on ait encore publiées.

III.

14. La troisième Partie est intitulée *Usage*. Elle indique la manière dont les signes, une fois choisis, doivent être employés. Elle considère : d'abord, les expressions; ensuite, les relations; enfin, les calculs.

15. Il faut avant tout que les signes simples servant à écrire les expressions soient eux-mêmes parfaitement écrits. Il faut ensuite que les menus modificateurs qui les affectent soient assez grands, bien à leur place et nettement séparés du signe simple. Les éléments de l'écriture étant partagés en éléments significatifs et éléments non significatifs, il faut que les premiers soient toujours séparés les uns des autres, et les seconds toujours réunis à l'un au moins des éléments voisins. Les signes simples formant une suite doivent être bien alignés, bien calibrés. Les vides existant dans cette suite doivent être d'importances inégales : plus grands entre deux expressions voisines qu'entre deux éléments voisins d'une même expression.

Ces vides d'ailleurs ne doivent jamais être trop grands ni trop petits. Il ne faut point que, par la recherche de la brièveté, certains signes deviennent trop rapprochés : en matières difficiles, on doit viser à être clair plutôt qu'à être bref. Dans la bonne écriture, l'ordre des éléments, même celui des facteurs d'un produit, n'est point indifférent. L'omission d'un signe est *a fortiori* une faute

grave. C'est surtout l'omission des signes de groupement qui a des conséquences fâcheuses. C'est elle, en particulier, qui rend les expressions ambiguës. Le pléonasme, qui se rencontre souvent, n'a d'autre inconvénient que d'alourdir l'expression. L'auteur est, d'ailleurs, partisan d'une régularité absolue. On ne saurait l'en blâmer.

La structure du signe avait été considérée dans la deuxième Partie. La structure des expressions l'est ici. L'auteur y étudie la structure des monomes entiers, celle des monomes fractionnaires, celle des polynomes ordonnés; puis les coefficients de ceux-ci; puis les correspondances qui doivent être marquées entre les divers éléments. De quelle façon faut-il ordonner les fonctions algébriques entières à plusieurs variables? C'est là une question souvent difficile : elle aboutit, en dernière analyse, à la façon d'ordonner les permutations, arrangements et combinaisons.

Les expressions à éléments infiniment nombreux : sommes d'une infinité de termes et produits d'une infinité de facteurs, ne peuvent évidemment se représenter *in extenso*. L'auteur indique d'abord la façon de les représenter, ou plutôt de les indiquer en abrégé. Il donne ensuite la manière de les écrire sous forme condensée à l'aide des symboles Σ et Π. Ces symboles, qui conviennent parfaitement aux sommes et produits limités, s'étendent d'eux-mêmes à ceux où le nombre des éléments est infini, à ceux même où il est infini dans les deux sens, l'indice variable pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Il arrive parfois que, dans la suite des valeurs que l'indice peut prendre, certaine valeur particulière demande à être exceptée : on donne le moyen d'indiquer cette exception. On considère ensuite les Σ et les Π qui présentent plusieurs indices; on explique la façon de les calculer, et de les remplacer, au grand avantage de la clarté et de la précision, par des expressions condensées, formées de Σ et de Π superposés.

Sous le titre de *Notations particulières*, le Chapitre suivant nous présente certaines expressions spéciales, qui s'emploient constamment, qui ne sont pas toutes indispensables, mais qu'il faut connaître toutes. Ce sont d'abord les déterminants dont le rôle est si grand dans l'étude des équations linéaires; les factorielles qui figurent dans tous les développements et qui jouent un rôle considérable en Analyse combinatoire; les fractions continues

limitées ou illimitées, simples ou périodiques; les formes algébriques de tous les degrés et de tous les ordres; les substitutions, les différences, les notations symboliques et les opérateurs si employés dans la nouvelle Algèbre. Ces dernières expressions, l'auteur le fait remarquer expressément, sont surtout précieuses parce qu'elles sont des expressions abrégées possédant une grande puissance mnémonique.

16. Les relations, égalités ou inégalités, sont les propositions, les phrases de la langue mathématique. On ne doit point introduire dans leur intérieur de mots tirés du langage ordinaire. Le plus souvent, afin de les rendre comparables entre elles, on réduit leur second membre à zéro; mais il est des cas nombreux où cette réduction serait fautive. De même, il y faut tantôt chasser les dénominateurs, tantôt les laisser tels quels. Ce qui doit décider celui qui écrit, c'est surtout la considération des correspondances qui existent entre les variables et certaines constantes. Les équations très bien écrites, les équations types se nomment d'ordinaire *équations canoniques*. Elles renferment parfois des déterminants sous forme de Tableaux. Ces déterminants produisent presque toujours d'utiles abréviations. M. D. André fait d'ailleurs remarquer que, dans une relation quelconque, l'ordre où l'on écrit les deux membres n'est point indifférent et ne saurait être arbitraire.

Avant de passer aux systèmes d'équations proprement dits, l'auteur s'occupe des *équations continues*. Il appelle ainsi les suites linéaires d'expressions où deux expressions consécutives sont toujours séparées par un signe égal. Il existe de même des *relations continues :* ce sont des suites analogues aux précédentes, où figurent des signes d'inégalité. Les équations ou relations continues, lues comme elles sont écrites, s'accordent mal avec le langage ordinaire, et ce désaccord produit souvent des fautes. Les premiers exemples d'équations continues sont ceux qu'on obtient en écrivant que les quantités formant deux suites sont directement ou inversement proportionnelles. Les proportions n'en sont que des cas particuliers, et elles ne peuvent s'écrire dans un ordre quelconque. C'est aux proportions que se rattachent plusieurs locutions anciennes, ainsi que l'ancien algorithme des rapports ou raisons, des proportions continues, des progressions arithmétiques

et géométriques, algorithme qui devrait être entièrement abandonné, qui subsiste encore en partie, et auquel il faut rapporter certaines notations rarement employées, mais parfois assez obscures.

Parmi les systèmes proprement dits d'équations, les plus simples sont les systèmes de deux équations analogues, et aussi les systèmes de deux équations de définition, où les seconds membres ne sont que les expressions développées des premiers. Viennent ensuite les systèmes de trois équations analogues et, parmi eux, les systèmes de trois équations réversibles; puis les systèmes de quatre équations; et enfin les systèmes de n équations quelconques. Les systèmes de n équations linéaires ont évidemment une importance capitale. On fait connaître les notations si remarquables employées par Cramer dans le mémorable travail qu'il leur a consacré. On s'occupe enfin des abréviations utilisées dans l'écriture des systèmes. Certaines de ces abréviations portent sur les équations isolées; d'autres, sur l'ensemble même du système. Comme exemples de ces dernières, on cite celles que Lamé a employées dans son beau Livre sur les coordonnées curvilignes.

17. La première opération à effectuer dans la résolution d'un problème, c'est le choix des notations initiales. Ce choix doit toujours se fonder sur la classification des objets à étudier : il doit être objectif et non pas subjectif. On y doit considérer à la fois les données et les inconnues. Dans les problèmes où les inconnues sont d'une nature spéciale, l'énoncé les indique de lui-même. On cherche parfois à en réduire le nombre; mais cette réduction n'est pas toujours exempte d'inconvénients. Dans la plupart des problèmes de Géométrie pure, les inconnues sont des longueurs qu'il s'agit de choisir. Dans les problèmes de Géométrie analytique, la première opération à effectuer, c'est de choisir les coordonnées : coordonnées polaires ou bipolaires, coordonnées cartésiennes dans le plan ou dans l'espace. Il faut pour ce choix tenir le plus grand compte de la classification des données. Si l'on a comme données, soit dans le plan, soit dans l'espace, n éléments pareils, c'est-à-dire n droites ou n plans jouant tous le même rôle, il faut se servir : dans le plan, du noyau polygonal formé par ces droites; dans l'espace, du noyau polyédrique formé par ces plans : il faut aban-

donner les coordonnées suffisantes de Descartes et recourir aux coordonnées surabondantes de Bobillier.

Les notations initiales une fois choisies, on doit procéder à la mise en équations du problème. On facilite grandement cette opération *par la considération de certaines quantités qui touchent d'une part aux inconnues, de l'autre aux données, qui établissent entre celles-ci et celles-là comme des sortes de ponts.* Ce sont les *quantités intermédiaires.* On peut ranger parmi les quantités de cette sorte : les coefficients indéterminés employés en Algèbre et les paramètres auxiliaires employés en Géométrie pure et en Géométrie analytique. C'est sur la considération de ces paramètres qu'on s'appuie pour arriver à la représentation algébrique soit des courbes planes, soit des courbes gauches et des surfaces. Les familles de courbes et de surfaces se représentent finalement par des équations où il reste encore un ou plusieurs paramètres, appelés aussi *constantes arbitraires.* Certains êtres géométriques, à définition très large, par exemple les surfaces cylindriques ou coniques, nous présentent, lorsqu'on les prend dans toute leur généralité, ce qu'on appelle des *fonctions arbitraires.*

Mais, quelles qu'elles soient, toutes les équations possibles, relatives aux sciences du concret, doivent posséder une *homogénéité véritable,* qu'il ne faut pas confondre avec l'*homogénéité apparente* résultant de l'introduction d'une variable spéciale. Il faut de plus que les équations qui servent de points de départ présentent une symétrie ou dissymétrie rappelant celle des objets étudiés. Il faut enfin que, si certaines des premières équations nous sont données *a priori*, celles que nous leurs associons soient en complet accord avec celles-là.

Comment diriger les calculs pour résoudre le système des équations obtenues? En s'inspirant des données, et par conséquent des notations initiales : en recourant en même temps, le plus possible, au mécanisme algébrique. Pour abréger, il faut employer des expressions simples, remplaçant les expressions compliquées pendant tout le temps où celles-ci restent les mêmes. Il faut recourir aux changements d'inconnues et aux substitutions. Lorsqu'il y a des symétries, en tenir soigneusement compte : *les inconnues entrant symétriquement dans les équations doivent toujours se calculer de façon symétrique.* Très souvent, pour

calculer ces inconnues symétriques, il faut choisir une inconnue auxiliaire. Ce sont les calculs eux-mêmes qui doivent nous la faire connaître. Dans les éliminations, il faut s'inspirer du même principe : *les quantités entrant symétriquement doivent s'éliminer symétriquement*. Ce principe est tellement général, qu'il faudrait même que les théorèmes de Géométrie à énoncé symétrique pussent se démontrer symétriquement.

Le complément nécessaire de la résolution d'un problème, c'est évidemment la vérification des résultats obtenus. On sait à l'avance, dans la plupart des questions, le genre de la solution à trouver. On peut prévoir quelques propriétés et même quelques racines des équations finales. On peut dire *a priori* que certaines lettres ne figureront point dans le résultat. Les dernières équations doivent présenter l'homogénéité géométrique, l'homogénéité algébrique et aussi, lorsqu'il y entre des infiniment grands ou des infiniment petits, l'homogénéité d'infinitude. Une formule étant obtenue où la variable indépendante est laissée quelconque, si l'on prend une lettre particulière pour variable indépendante nouvelle, puis qu'on fasse la transformation inverse, on doit retrouver la formule initiale. Enfin, le résultat de tout problème doit présenter une symétrie ou une dissymétrie qu'on a pu également prévoir. Ces moyens de vérification sont nombreux : l'auteur fait remarquer cependant qu'on peut, dans chaque cas particulier, en obtenir d'autres en étudiant à fond, pour en tenir absolument compte, la nature spéciale du problème considéré.

IV.

18. Si étendue qu'elle soit, l'analyse qu'on vient de lire est néanmoins incomplète. Elle ne dit rien de l'Introduction très développée intitulée : *Discours préliminaire*. C'est cependant à la fin de ce Discours que l'auteur explique le but qu'il s'est proposé d'atteindre : *Donner des règles sûres pour bien choisir et bien employer les notations, c'est-à-dire pour bien écrire en Mathématiques.*

Ces règles forment l'objet entier des deux dernières Parties de l'Ouvrage. Elles sont nombreuses, claires, nettes. Peut-être les

trouvera-t-on trop rigoureuses et trop strictes. Mais ce n'est qu'à ces conditions qu'elles pouvaient être utiles. Des exemples précis et variés, qui en sont comme autant d'illustrations, en rendent d'ailleurs l'application aisée. Grâce au Livre de M. Désiré André, il suffira d'être attentif et soigneux pour arriver à écrire bien. Et quels avantages si tous les Ouvrages et Mémoires étaient bien écrits! Ils seraient plus faciles à lire et à comprendre; le style en paraîtrait plus élégant, plus délicat, plus agréable; peut-être s'apercevrait-on alors que l'esprit géométrique et l'esprit de finesse sont moins incompatibles que Pascal ne l'avait pensé.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

COSSERAT (E. et F.). — THÉORIE DES CORPS DÉFORMABLES. 1 volume in-8 de 225 pages. Librairie Hermann, Paris.

Ce Volume est la reproduction d'un Appendice à l'édition française du *Traité de Physique* de Chwolson ; il fait suite à une Note ajoutée au même Traité *Sur la Dynamique du point et du corps invariable*.

« Dans ces Notes, disent les auteurs, nous essayons d'esquisser les traits généraux d'une exposition où un effort est fait pour écarter les difficultés (qui apparaissent aujourd'hui dans la Physique mathématique) et notre tendance est d'établir une théorie plus compréhensive. »

1. Il ne sera pas inutile de rappeler les principales définitions introduites dans la première Note.

La notion fondamentale de la Dynamique est ici l'*action* d'un point en mouvement, considérée comme un invariant dans le groupe des déplacements euclidiens. Le point mobile étant rapporté à un trièdre fixe $Oxyz$, on considère sa vitesse v au temps t, puis une fonction $W(v)$ de cette vitesse; le produit $W\,dt$ est l'*action élémentaire* relative à l'intervalle de temps dt et l'action A de l'instant t_0 à l'instant t_1 est, par définition, l'intégrale

$$A = \int_{t_0}^{t_1} W\,dt.$$

A cette notion de l'action on rattache les définitions de la quantité de mouvement, de la masse, du travail et de l'énergie cinétique, de la façon suivante :

Si les coordonnées x, y, z de chacun des points de la trajectoire subissent des variations quelconques δx, δy, δz, fonctions du

temps, l'action éprouve une variation qui a pour expression

$$\delta \mathrm{A} = \left[\mathrm{F}\,\delta x + \mathrm{G}\,\delta y + \mathrm{H}\,\delta z \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,dz)\,dt,$$

en posant

$$\mathrm{F} = \frac{1}{v}\frac{d\mathrm{W}}{dv}\frac{dx}{dt}, \qquad \mathrm{G} = \frac{1}{v}\frac{d\mathrm{W}}{dv}\frac{dy}{dt}, \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{v}\frac{d\mathrm{W}}{dv}\frac{dz}{dt},$$

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathrm{F}}{dt}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{G}}{dt}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{d\mathrm{H}}{dt}.$$

Par définition, le vecteur (F, G, H), issu du point x, y, z, est *la quantité de mouvement* du point à l'instant t ; le facteur $\frac{1}{v}\frac{d\mathrm{W}}{dv}$, par lequel il faut multiplier les projections de la vitesse pour avoir celles de la quantité de mouvement, est la *masse maupertuisienne;* le vecteur (X, Y, Z) issu du point x, y, z est la *force extérieure* sur ce point.

Après avoir vérifié qu'on peut écrire

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = d\mathrm{E} \qquad \left(\mathrm{E} = v\frac{d\mathrm{W}}{dv} - \mathrm{W}\right),$$

on dit que E est l'énergie cinétique du point en mouvement, de sorte que la variation de l'énergie cinétique, dans un intervalle de temps fini, est égale au travail de la force extérieure.

On retrouve les définitions de la Mécanique ordinaire en supposant

$$\mathrm{W} = \frac{mv^2}{2} \qquad (m \text{ constant});$$

mais il est plus intéressant de considérer la Mécanique classique comme une première approximation de celle qui vient d'être définie en considérant, comme on le fait ici en détail, l'état de mouvement infiniment voisin de l'état de repos.

2. Il ne suffirait pas de considérer des points matériels tels que ceux qui viennent d'être définis pour obtenir les milieux continus qu'on fait intervenir en Physique dans la théorie de la lumière, par exemple. Il est utile d'associer à chaque point matériel du milieu trois directions rectangulaires et l'on est conduit à définir l'action d'un trièdre matériel.

Pour cela, on rapporte un trièdre mobile $O'x'y'z'$ à trois axes fixes Ox, Oy, Oz et l'on cherche une fonction de deux positions infiniment voisines du trièdre, qui reste invariante dans le groupe des déplacements euclidiens. La solution générale s'obtient en prenant une fonction W des quantités ξ, η, ζ, p, q, r, qui sont les composantes de la vitesse du point O' et de la rotation instantanée du trièdre suivant les axes mobiles. Le produit $W\,dt$ est *l'action euclidienne du trièdre matériel* $O'x'y'z'$ relative à l'intervalle de temps dt.

En appliquant ici la méthode hamiltonienne de l'action variable, comme on l'a fait pour un point matériel, on trouve deux couples de vecteurs qu'on regarde comme représentant, l'un les quantités de mouvement et l'autre les forces extérieures pour le trièdre matériel. L'énergie cinétique du trièdre étant définie par la formule

$$E = \xi\frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial W}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \zeta} + p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} + r\frac{\partial W}{\partial r},$$

et la définition habituelle du travail d'un système de forces étant conservée, on trouve encore que la variation de l'énergie cinétique dans un intervalle de temps fini est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant cet intervalle.

Ainsi, pour le point matériel et pour le trièdre matériel, on a pu déduire de la notion de l'action toutes les définitions fondamentales de la Dynamique classique. En suivant une voie identique dans l'étude de la déformation statique ou dynamique des systèmes discrets de points et des milieux continus, « on arrive à construire une théorie générale de l'action sur l'étendue et le mouvement qui embrasse tout ce qui, dans la Physique théorique, est directement assujetti aux lois de la Mécanique ».

3. Au début de l'étude des corps déformables, les auteurs donnent les raisons analytiques qui justifient l'étude séparée des *corps minces*, ligne ou surface déformable. Mais, pour ne pas trop allonger ce compte rendu, je reproduirai seulement les définitions principales et les conclusions relatives au **Milieu déformable en mouvement**.

On considère un espace (M_0) décrit par un point M_0 dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 par rapport à trois axes fixes Ox, Oy,

Oz, et l'on adjoint, à chaque point M_0, un trièdre trirectangle $M_0 x'_0$, $M_0 y'_0$, $M_0 z'_0$; l'ensemble continu de tels trièdres peut être considéré comme la position, à un instant t_0, d'un milieu déformable défini de la façon suivante :

On donne au point M_0 un déplacement $M_0 M$ fonction du temps t et des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point M_0, s'annulant pour $t = t_0$, puis on associe au point M un trièdre $M x'y'z'$; l'ensemble continu à trois dimensions des trièdres $M x'y'z'$ sera l'*état déformé* du milieu considéré à l'instant t.

En désignant, pour plus de symétrie, par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les coordonnées x_0, y_0, z_0 qui servent de paramètres géométriques pour définir la position du trièdre $M x'y'z'$ par rapport aux axes fixes, on appelle ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i les composantes de la vitesse de l'origine et de la rotation instantanée relatives au paramètre ρ_i et ξ, η, ζ, p, q, r les quantités analogues relatives à la variable t.

Cela posé, l'*action euclidienne de déformation et de mouvement sur le milieu déformé à l'intérieur de la surface* S *et dans l'intervalle* $(t_1\, t_2)$ est, par définition, l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2}\int\int\int_{S_0} W\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt,$$

W étant une fonction de t, x_0, y_0, z_0, ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, ξ, η, ζ, p, q, r, et S_0 désignant la surface du milieu (M_0) qui correspond à la surface S du milieu (M). Cette intégrale quadruple a une variation nulle quand on soumet l'ensemble de tous les trièdres à une même transformation infinitésimale du groupe euclidien.

Une variation *quelconque* de l'action qui vient d'être définie peut être exprimée de la façon suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2}\int\int_{S_0}(F'_0\,\delta' x + G'_0\,\delta' y + H'_0\,\delta' z + I'_0\,\delta I' + J'_0\,\delta J' + K'_0\,\delta K')\, d\sigma_0\, dt$$

$$+ \left[\int\int\int_{S_0}(A'\,\delta' x + B'\,\delta' y + C'\,\delta' z + P'\,\delta I' + Q'\,\delta J' + R'\,\delta K')\, dx_0\, dy_0\, dz_0\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$- \int_{t_1}^{t}\int\int\int_{S_0}(X'_0\,\delta' x + Y'_0\,\delta' y + Z'_0\,\delta' z + L'_0\,\delta I' + M'_0\,\delta J' + N'_0\,\delta K')\, dx_0\, dy_0\, dz_0\, dt$$

en désignant par $\delta I'$, $\delta J'$, $\delta K'$ les composantes suivant Mx', My', Mz' de la rotation instantanée et par $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ les projections sur les mêmes axes du déplacement du point M.

On rencontre ainsi six groupes de trois quantités, tels que $F'_0\, G'_0\, H'_0$; chacun des groupes est considéré comme donnant les projections sur Mx', My', Mz' d'un segment ayant pour origine le point M.

On appelle :

Force extérieure et *moment extérieur* au point M, rapportés à l'unité de volume du milieu non déformé, les segments X_0, Y_0, Z_0 et L'_0, M'_0, N'_0 ;

Effort extérieur et *moment de déformation extérieure* au point M de la surface S les segments $-F'_0$, $-G'_0$, $-H'_0$ et $-I'_0$, $-J'_0$, $-K'_0$;

Quantité de mouvement et *moment de la quantité de mouvement* au point M, les segments A', B', C' et P', Q', R'.

Les composantes de tous ces segments sont connues quand on donne la fonction W ; elles satisfont à des relations qui conduisent, par l'introduction d'auxiliaires convenables, aux équations suivantes :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = X - \mathcal{A},$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = Y - \mathcal{B},$$

$$\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z - \mathcal{C},$$

$$\frac{\partial q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zx}}{\partial z} + p_{yz} - p_{zy} = L - \mathcal{P},$$

$$\frac{\partial q_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zy}}{\partial z} + p_{zx} - p_{xz} = M - \mathcal{Q},$$

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} + p_{xy} - p_{yx} = N - \mathcal{R}.$$

Dans ces équations :

p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} désignent les projections sur Ox, Oy, Oz de l'effort qui s'exerce au point M sur une surface dont la normale intérieure est parallèle à Ox ;

q_{xx}, q_{xy}, q_{xz} désignent les projections sur Ox, Oy, Oz du moment de déformation en M relatif à la même surface ;

X, Y, Z, L, M, N désignent les projections sur Ox, Oy, Oz de la

force extérieure et du moment extérieur au point M à l'instant t, rapportés à l'unité de volume du milieu déformé (M);

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ sont des termes dépendant des quantités de mouvement et du déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)}$$

qui doivent être remplacés par zéro quand on étudie le milieu déformable au point de vue statique.

Ces relations comprennent comme cas particuliers les principales équations établies auparavant dans la théorie de l'élasticité et dans la théorie de tous les milieux éthérés que, depuis Mac Cullagh jusqu'à Lord Kelvin, on a considérés pour l'étude des ondes lumineuses, et elles conduisent à la notion d'*induction magnétique* introduite par Maxwell.

4. **L'action euclidienne** *de déformation et de mouvement sur un milieu non continu* se définit d'une façon analogue, en considérant un système discret de n trièdres mobiles $M_i x'_i y'_i z'_i$, rapportés à trois axes fixes Ox, Oy, Oz.

On est conduit à considérer une fonction W qui, en dehors des quantités ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, dépend des arguments suivants :

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$\psi_{ij} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\frac{dy_j}{dt} + \frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt},$$

$$\lambda_{ijk} = (x_i - x_j)\frac{dx_k}{dt} + (y_i - y_j)\frac{dy_k}{dt} + (z_i - z_j)\frac{dz_k}{dt}.$$

Les relations, de forme assez compliquée, qui existent entre ces arguments non indépendants sont analogues aux relations connues entre les distances r_{ij} lorsque le nombre des points est ≥ 5.

Connaissant l'action euclidienne W sur les trièdres considérés, on peut, par un calcul analogue aux précédents, obtenir les expressions de la force et du moment extérieurs sur un trièdre quelconque.

On trouve ensuite, pour le travail élémentaire relatif aux forces qui s'exercent entre les trièdres élémentaires, une expression de

la forme

$$dE + \frac{\partial W}{\partial t} dt,$$

où l'on a

$$E = \sum_i \left(\xi_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \ldots + p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + \ldots - \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{dx_i}{dt} \right)} + \ldots - W \right)$$

(en n'écrivant qu'un terme pour chaque groupe de trois termes analogues).

MM. Cosserat indiquent qu'il est facile de déduire de là une dynamique des systèmes établie sur le même plan que la théorie classique (sans se borner, comme dans cette dernière, à envisager des forces centrales) et de rattacher à leur véritable origine les diverses lois de forces à distance étudiées par Gauss, Riemann et Clausius qui introduisent uniquement les r_{ij}, ψ_{ij}, λ_{ijk}.

Enfin ces considérations conduisent, de la façon la plus naturelle, à la notion de *contrainte* qui est due à Gauss et que Hertz a appliquée à l'étude des fondements de la Mécanique, en suivant une voie parcourue par Beltrami, Lipschitz et Darboux.

5. **Action euclidienne au point de vue eulérien.** — Dans la dynamique du milieu déformable, on a pris comme variables indépendantes x_0, y_0, z_0, t qui sont analogues aux variables de Lagrange, en Hydrodynamique; mais on peut prendre comme variables x, y, z, t qui sont analogues aux variables d'Euler.

On est alors conduit, en se guidant sur un travail de Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*, à une conception de l'action autre que celle qui a été envisagée au début.

On imagine un observateur attaché aux axes de référence, portant son attention sur une portion *déterminée et fixe* de l'espace (M), puis l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \int \int_S W \, dx \, dy \, dz \, dt,$$

où cette fois le champ d'intégration (S) par rapport à x, y, z est indépendant de t.

Si l'on reprend une marche analogue à celle du début, une

différence s'introduit en ce qui concerne les dérivées prises par rapport au temps et l'on n'a plus, pour les forces et les moments extérieurs, les efforts et les moments de déformation, les mêmes conclusions. Ces différences peuvent être interprétées en disant que les nouveaux efforts et moments de déformation ne satisfont plus à ce que Poincaré a appelé le *principe de réaction*. Cependant, en rapprochant certains efforts et moments de déformation de ce que Maxwell et Bartoli ont appelé la *pression de l'énergie rayonnante*, les auteurs trouvent un moyen de respecter le principe de réaction.

E. LACOUR.

IGNATOWSKI (W. v.). — DIE VEKTORANALYSIS UND IHRE ANWENDUNG IN DER THEORETISCHE PHYSIK; Teil I. 1 volume in-8°, 111 pages. Leipzig, Teubner, 1909.

L'Ouvrage de M. von Ignatowski sur l'analyse vectorielle comprendra deux Parties ; la première, dont il est question ici, est purement mathématique ; la seconde contiendra les applications à la Physique : il fait partie de cette collection de manuels de Mathématiques et de Physique, destinés aux ingénieurs et aux étudiants, que dirige M. Jahnke et dont le *Bulletin* a déjà eu l'occasion de parler.

Il ne serait pas mauvais que les personnes qui s'imaginent que le niveau des Livres à tendances pratiques est nécessairement un peu bas voulussent bien feuilleter cette collection : elles se rendront compte de leur erreur.

Ce Volume-ci résume, sous une forme condensée, les propositions les plus importantes de la théorie des vecteurs : addition, multiplication scalaire et vectorielle, opérations différentielles et intégrales, nabla, tourbillon, divergence, rotor; théorèmes de Stokes, de Gauss, de Green; potentiel, lignes vectorielles et surfaces de niveau, tenseurs, dyades, etc.

Dans sa préface, l'auteur déclare qu'il a eu toujours en vue les phénomènes physiques que les vecteurs et les opérations sur les vecteurs doivent servir à représenter; de ces phénomènes il n'est d'ailleurs nullement question dans ce premier Volume; les mathé-

maticiens, en lisant M. von Ignatowski, estimeront sans doute qu'il s'est placé au meilleur point de vue : celui d'où l'on pénètre le mieux le sens des éléments qu'on introduit et des opérations qu'on effectue sur ces éléments.

Les Livres qui paraissent sur l'analyse vectorielle ont maintenant un bon nombre de notations communes, et l'espérance de voir ces notations se fixer à peu près, d'ici peu de temps, n'apparaît plus comme entièrement vaine. M. von Ignatowski est de ceux qui adoptent les caractères gothiques pour représenter les vecteurs. Je reconnais qu'il y a là une commodité, mais seulement pour ceux qui ont de bons yeux. J. T.

BOREL (E.). — DIE ELEMENTE DER MATHEMATIK. VOM VERFASSER GENEHMIGTE DEUTSCHE AUSGABE BESORGT VON PAUL STÆCKEL. Zweiter Band : GEOMETRIE. 1 volume in-8°, XII-324 pages.

Nous avons déjà eu l'occasion de parler de cette traduction allemande, par M. P. Stäckel, des petits Livres élémentaires de M. Borel, qui ont en France un succès si mérité. Le second Volume, consacré à la Géométrie, vient de paraître.

J. T.

JAHNKE (E.) et EMDE (F.). — FUNKTIONENTAFELN MIT FORMELN UND KURVEN. 1 volume in-8°, XII-174 pages.

Voici un Livre qui est fait pour les gens pratiques; les auteurs le disent, le répètent et y insistent. Parmi les mathématiciens dont l'esprit est surtout tendu vers les abstractions, plus d'un feuilletera ce Recueil avec une satisfaction mêlée d'un peu d'étonnement, et voudra l'avoir sur sa table, si même il ne doit s'en servir que rarement. Eh quoi! ces fonctions dont les belles propriétés l'ont tant émerveillé, les voilà, figurées exactement, calculées avec précision, pour les besoins des physiciens et des industriels! Elles ne sont pas un simple jeu de l'esprit humain, qui se plaît à exercer ses facultés logiques, comme un enfant ses

membres : non, elles contribuent à notre connaissance du monde extérieur, à notre maîtrise sur lui. Sans doute, notre mathématicien le savait ; on le lui avait dit, il l'avait lu dans les Livres, il l'avait même répété, mais peut-être le croyait-il assez mal, tant le monde abstrait où il vit d'habitude lui semble loin de cette réalité, qu'il est tenté parfois de mépriser ou de nier. L'utilité des Mathématiques, voici un Livre qui la lui fait toucher du doigt. Peut-être, dans son étonnement, va-t-il sortir en hâte de son cabinet de travail, à la recherche d'une usine, où, dans quelque bureau, se trouvent des gens qui se servent vraiment du Livre de MM. Jahnke et Emde ; et quel plaisir ne prendra-t-il pas à les voir feuilleter ces Tables et tourner la manivelle de leur machine à calculer !

Le Livre de MM. Jahnke et Emde traite d'un grand nombre de fonctions ; il contient, pour la plupart, un recueil des formules les plus usuelles, un ou plusieurs graphiques, des Tables numériques, qui comportent d'ordinaire quatre décimales. Les auteurs ont presque toujours donné les valeurs naturelles des fonctions et non les logarithmes ; c'est ce qui convient aujourd'hui que l'usage des machines à calculer se répand de plus en plus. Quant au choix des fonctions réduites en Tables, il a évidemment été dicté par des raisons pratiques ; mais il est très remarquable que la plupart de ces fonctions intéressent vivement les gens qui ne sont que mathématiciens. On en jugera par la liste suivante où, toutefois, je n'ai mentionné ni les fonctions de Bessel et les fonctions associées qui occupent presque la moitié du Recueil et sur lesquelles les auteurs ont accumulé une foule de renseignements très précieux, ni quelques fonctions moins importantes :

$$e^{x},\quad e^{-x},\quad \frac{e^{x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}},\quad \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}};$$

$$\operatorname{amp} x = 2 \operatorname{arc\,tang} e^{x} - \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx,\qquad \operatorname{Ci} x = \int_\infty^x \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dx}{\log x};$$

et

$$C = \int_0^x \cos\frac{\pi x^2}{2}\,dx, \qquad S = \int_0^x \sin\frac{\pi x^2}{2}\,dx;$$

$$\Gamma(x+1), \qquad \Psi(x+1) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x+1),$$

$$\Psi'(x+1), \quad \frac{1}{\Psi'(x+1)};$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx, \qquad \Phi'(x), \qquad \frac{1}{2}\Phi''(x), \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{2^5}\Phi^{VI}(x);$$

$$F(r, v) = e^{\frac{1}{2}\pi v}\int_0^\pi \sin^r x\, e^{vx}\,dx, \qquad \text{pour} \qquad v = r\,\text{tang}\,\varphi;$$

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right), \qquad E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right);$$

$-\log q$, comme fonction de $\alpha = \text{arc}\sin k$,

$$\vartheta_0(v), \quad \vartheta_1(v);$$

$$\wp' u, \quad \wp u, \quad \zeta u, \quad \sigma u, \qquad \text{pour} \qquad g_2 = 0, \quad g_3 = 1;$$

$P_n(x)$, $P_n(\cos\theta)$ et leurs dérivées pour $n = 1, 2, \ldots, 7$.

Nous devons mentionner la prière que les auteurs adressent à tous ceux qui se serviront de leur Livre : signaler les fautes et les imperfections qu'on y pourra rencontrer. Ceux qui rencontreraient des fautes et ne les signaleraient pas se montreraient assurément coupables d'ingratitude envers MM. Jahnke et Emde.

N'est-ce pas ici l'occasion de rappeler la jouissance qu'il y a, d'après Gauss, à se plonger dans les calculs numériques et, en particulier, à se servir de Tables qui abrègent le travail et où l'on a parfois le plaisir de découvrir une faute? J. T.

SERRET (J.-A.). — COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. 6ᵉ édition, 2 volumes in-8°, XIII-647 pages et XIII-694 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Il nous suffira évidemment de signaler cette nouvelle édition d'un Ouvrage qui, paru d'abord en un Volume, avait obtenu le

plus vif succès, que l'auteur a fait paraître ensuite en deux Volumes et n'a cessé de perfectionner jusqu'à sa mort. Le Cours d'Algèbre supérieure est un Ouvrage pour ainsi dire unique, n'ayant pas d'équivalent dans notre pays. Ceux de nos lecteurs qui ne le possèdent pas encore s'empresseront de se le procurer pour en faire un Livre de chevet.

J. C.

WRIGHT (J.-E.). — INVARIANTS OF QUADRATIC DIFFERENTIAL FORMS. 1 volume in-8°, 90 pages. Cambridge, University Press, 1908.

Le petit Volume que M. Edmund Wright publie sur les *Invariants des formes différentielles quadratiques* est le neuvième de ces *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*, dont on voit de mieux en mieux, à mesure qu'elle s'accroît, les services que rendra leur collection.

Le sujet qu'a choisi M. Wright est bien de ceux sur lesquels il convient de renseigner les étudiants en Mathématiques, en raison de son importance tant en Analyse qu'en Géométrie et en Mécanique.

La formule qui donne l'expression de la courbure totale d'une surface au moyen des coefficients de la forme

$$E\,du^2 - 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

qui représente le carré de l'élément linéaire, et des dérivées de ces coefficients, fournit le premier et le plus simple exemple d'invariant différentiel; c'est de cet exemple que part l'auteur, conformément d'ailleurs à l'ordre historique; à cette notion se rattache naturellement celle des paramètres différentiels; et le lecteur, dès les premières pages, aperçoit la possibilité de généraliser ces notions. Cette généralisation est donnée explicitement dans le second Chapitre :

Considérons, d'une part, un certain nombre de formes différentielles quadratiques

$$\sum a_{r,s}\,dx_r\,dx_s \qquad \binom{r}{s} = 1, 2, \ldots, n)$$

et un certain nombre de fonctions $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, puis, d'autre part, un groupe de transformations

$$x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui changent les formes quadratiques et les fonctions en formes quadratiques

$$\sum a'_{r,s}\, dy_r\, dy_s$$

et en fonctions $\varphi'(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Les transformations qui expriment les nouvelles fonctions $a'_{r,s}$, φ', leurs dérivées, etc., au moyen des anciennes fonctions $a_{r,s}$, φ, etc., constituent encore un groupe, le groupe *étendu :* c'est de la détermination de tous les invariants de ce groupe étendu qu'il s'agit.

M. Wright donne quelques indications historiques sur le sujet, qui servent en même temps pour la division des matières.

Christoffel attaque directement le problème et publie en 1869 son Mémoire fondamental. On peut citer, antérieurement à lui, la proposition de Gauss (1827) sur la courbure totale, à laquelle on a fait allusion tout à l'heure; l'introduction des paramètres différentiels par Lamé (1859) et les expressions rencontrées par Riemann (1861) dans ses recherches sur la courbure des hypersurfaces, qu'a retrouvées Christoffel. Une des méthodes de ce dernier a été reprise et développée récemment par MM. Ricci et Levi-Civita, qui fondent la théorie de la *dérivation covariante* et le *Calcul différentiel absolu.* Ils montrent que la recherche des invariants différentiels se ramène à la recherche des invariants algébriques d'un certain système de formes. L'étude des méthodes et des résultats obtenus par Christoffel, par MM. Ricci et Levi-Civita occupe le Chapitre II.

Le Chapitre suivant est consacré à la méthode de Lie : elle est une application directe de son Mémoire *Ueber Differentialinvarianten* (1884) : dans cette méthode, les invariants sont obtenus comme solutions d'un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles; elle a été poursuivie par Sophus Lie, pour le cas de $n = 2$, par MM. Zorawski, C.-N. Haskins, Forsyth; enfin par M. Wright lui-même, qui s'est occupé particulièrement des paramètres différentiels.

Le Chapitre IV traite de la méthode de M. Maschke (1900) qui a introduit un symbolisme très analogue à celui qui sert pour les invariants algébriques et un procédé pareil à celui qui est connu sous le nom d'*Ueberschiebung*. Ce procédé permet de construire une suite limitée d'invariants.

Enfin, un dernier Chapitre contient de nombreux et intéressants exemples où l'auteur apprend tant à interpréter géométriquement les invariants qu'à exprimer au moyen d'invariants les propriétés géométriques qu'on sait être invariantes : il se termine par quelques belles applications à la Mécanique.

J. T.

JACOBI ET VON FUSS. — DER BRIEFWECHSEL ZWISCHEN C.-G.-J. JACOBI UND P.-H. VON FUSS ÜBER DIE HERAUSGABE DER WERKE LEONHARD EULERS HERAUSGEGEBEN, ERLAUTERT UND DURCH EINEN ABDRUCK DER FUSSSCHEN LISTE DER EULERSCHEN WERKE ERGÄNZT VON P. STÄCKEL und W. AHRENS. 1 volume in-8, XI-184 pages. Leipzig, Teubner, 1908.

BOSMANS (H.). — SUR UNE TENTATIVE D'ÉDITION DES ŒUVRES COMPLÈTES DE L. EULER, FAITE A BRUXELLES EN 1839. 39 pages in-8. Louvain, Centerick, 1909.

Euler est mort en 1783 ; il avait désiré que, pendant 40 ans après sa mort, les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* continssent des travaux de lui. La publication des *Opuscula analytica* (3 vol. in-4°) et de la seconde édition des *Institutiones calculi integralis* se fit rapidement. Les 25 Volumes des *Nova Acta* et des *Mémoires* qui suivirent la mort d'Euler contiennent en effet de nombreux travaux de lui.

En 1823, il restait encore dans les archives de l'Académie quatorze Mémoires d'Euler à imprimer. Trois ans plus tard, un siècle après sa fondation, l'Académie prit la résolution de commencer une nouvelle série et de liquider les inédits dans un Volume supplémentaire consacré en entier à la publication des Mémoires posthumes de L. Euler, F.-T. Schubert et N. Fuss.

Ce Volume parut en 1830. Mais on était bien loin d'en avoir

fini. Paul Heinrich von Fuss, l'arrière-petit-fils d'Euler, le fils de ce Nicolaus Fuss grâce auquel Euler, complètement aveugle, put encore produire 355 Mémoires pendant les dix dernières années de sa vie, publia en 1843 la *Correspondance mathématique et physique de quelques géomètres du* XVIIIe *siècle précédée d'une Notice sur les travaux de Léonard Euler tant imprimés qu'inédits...* (2 vol.), puis, avec son frère Nicolaus, en 1849, les *L. Euleri commentationes arithmeticæ collectæ...* (2 vol.); les *L. Euleri opera posthuma mathematica et physica, anno* 1844 *detecta*, ne parurent qu'en 1862, 7 ans après la mort de Paul Heinrich.

En 1844, Paul Heinrich avait proposé à l'Académie de Saint-Pétersbourg d'entreprendre l'édition des Œuvres complètes d'Euler : il en soumit le plan au Ministre de l'Instruction publique, le comte Uwaroff, lequel invita l'Académie à attendre des circonstances plus favorables. Paul Heinrich estimait que cette édition comporterait environ 25 Volumes de 640 pages chacun. C'est à la même évaluation qu'est arrivé le P. Hagen, dans l'*Index operum Leonardi Euleri* qu'il a publié à Berlin en 1906 ; les jeunes mathématiciens peuvent aujourd'hui nourrir l'espoir de feuilleter un jour ces 25 volumes.

Paul Heinrich, qui consacra en fait sa vie à publier ce qu'il put des œuvres de son illustre bisaïeul, espéra un moment que d'autres allaient entreprendre une édition générale : le P. Bosmans nous conte la lamentable histoire de cette édition, dont 5 Volumes, aujourd'hui introuvables, ont paru, avec le titre suivant :

Œuvres complètes en français de L. Euler, publiées par MM. Dubois et Drapiez, examinateurs permanents à l'École militaire de Belgique ; Moreau, Weiler et Steichen, professeurs à la même École ; et Ph. Vandermaelen, fondateur de l'Établissement géographique de Bruxelles ; accompagnées de figures et ornées du portrait de L. Euler, par M. Madou, professeur de dessin à l'École militaire. Bruxelles, Établissement géographique, près la porte de Flandre, 1839.

P.-H. von Fuss fut très content du premier Volume, qui con-

tenait les *Lettres à une princesse d'Allemagne*, écrites en français, bien faciles à reproduire. Les éditeurs avaient commencé de faire traduire les écrits latins, et ces traductions, faites d'ailleurs avec conscience, existent encore à l'Observatoire de Bruxelles ; le P. Bosmans en donne la liste et identifie les Mémoires avec ceux qu'a numérotés le P. Hagen dans son *Index* ; mais les éditeurs, qui avaient compté pouvoir, en deux ans, classer, traduire et publier les Œuvres d'Euler, ne s'avisèrent-ils pas ici d'abréger son texte, là de le mettre au point ? Une pareille naïveté désarme ; mais, malgré la bonne volonté de ces excellents éditeurs, on comprend que Paul Heinrich n'ait pas beaucoup regretté l'interruption de leur publication.

On savait déjà, par la correspondance entre Jacobi et son frère, combien Jacobi s'intéressait à la publication des Œuvres d'Euler ; on aurait pu d'ailleurs l'inférer des passages de ses Mémoires où il se plaît à faire ressortir le mérite d'Euler et ce qu'il lui doit. Son admiration, sa reconnaissance pour le maître dont les œuvres ont tant contribué à former son intelligence mathématique, éclatent d'une façon touchante dans les lettres que publient MM. Paul Stäckel et Wilhelm Ahrens ; son zèle est vraiment actif ; il ne se contente pas de harceler Paul Heinrich, dont il avait fait la connaissance personnelle en 1836 ; il travaille de son mieux à établir le plan de la future édition, il consulte les procès-verbaux de l'Académie de Berlin, fouille les archives, retrouve les dates et envoie à son correspondant tous les renseignements qui peuvent lui être utiles.

MM. Stäckel et Ahrens publient huit lettres de Jacobi et quatre lettres de Paul Heinrich, appartenant les premières à M. Viktor Fuss, neveu de Paul Heinrich, et les autres à Mlle Margarete Jacobi, la fille du mathématicien. Elles s'étendent de 1841 à 1849.

Nicolaus Fuss avait joint, à l'édition allemande (1) de l'éloge d'Euler qu'il lut en octobre 1783 à l'Académie des Sciences de Pétersbourg, une Table des écrits d'Euler. Vers 1818, Paul Heinrich avait tracé le plan d'une Table méthodique ; sur les conseils de Jacobi, il reprend et complète ce travail, dont il publie les

(1) *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler*.... Bâle, 1783.

résultats dans la *Correspondance mathématique et physique* (1843); la revision qu'il fait pour cela lui fait découvrir de nombreux et importants inédits. Un complément à la liste figure dans les *Commentationes arithmeticæ collectæ* (1844). Mais il reste toujours à faire; la correspondance de Jacobi et de Paul Heinrich témoigne de leurs préoccupations : l'un et l'autre signalent et comblent maintes lacunes : tout ce qui se rapporte à cette liste méthodique eût été difficilement intelligible, si MM. Stäckel et Ahrens ne l'avaient pas reproduite. Mais ils ne se sont pas bornés à une simple reproduction. M. Viktor Fuss a mis à leur disposition le précieux exemplaire de son oncle, sur lequel celui-ci avait noté et les nombreuses indications de Jacobi et les conclusions de ses propres recherches.

Tous ces résultats ont été soigneusement comparés avec ceux auxquels sont parvenus MM. Fr. Engel, I.-G. Hagen, Félix Müller et G. Valentin dans leurs études sur la bibliographie des écrits d'Euler.

La liste méthodique de Paul Heinrich, telle que la publient MM. Stäckel et Ahrens, avec toutes les vérifications, rectifications, additions qui l'améliorent et l'enrichissent, est en elle-même un document très important pour l'histoire des Sciences; elle rendra sans doute d'inappréciables services à ceux qui s'occuperont de l'édition des Œuvres d'Euler.

Pour la commodité des recherches, les auteurs ont établi la concordance entre les cotes qui figurent dans cette liste et celles de l'*Index* du P. Hagen.

J. T.

MÜLLER (F.). — Führer durch die mathematische Litteratur mit besonderer Berücksichtigung der historisch-wichtigen Schriften. 1 volume in-8, x-226 pages. Leipzig et Berlin, Teubner, 1909.

Voici un Livre dont l'idée est fort heureuse et qui rendra beaucoup de services. Ce n'est nullement une Bibliographie; il ne vise pas à être complet. Et, pour être complet, combien de

Volumes faudrait-il, au lieu de 200 pages? Non, les prétentions de M. Félix Müller sont beaucoup plus modestes; il ne veut qu'orienter le lecteur en lui signalant, avec leurs titres précis, les principaux Recueils, les Œuvres des grands mathématiciens, les Livres ou les Mémoires qui ont ou qui ont eu une importance particulière.

Forcément, il y a une part d'arbitraire dans l'appréciation de ces Livres et de ces Mémoires, et il est entendu qu'un pareil guide ne peut satisfaire tout le monde, et en particulier tout le monde des auteurs ou des éditeurs. Mais, sans doute, M. Félix Müller s'est préoccupé surtout de satisfaire ceux pour lesquels il écrivait et non point ceux qui ne liront de son Livre que les lignes où ils sont cités, et je crois bien que les étudiants lui sauront gré des indications que ce Livre leur fournira; elles leur éviteront, tout d'abord, ces grosses ignorances qui humilient; elles leur permettront, sur un sujet déterminé, de trouver avec moins de peine les indications plus spéciales qu'il leur faudra chercher ailleurs; M Müller n'a pas eu d'autre prétention.

Admettons aussi qu'un Livre de cette nature ne peut être parfait, surtout dans une première édition; c'est une raison de plus pour souhaiter à l'auteur d'en faire rapidement une seconde, où il pourra réparer quelques oublis. Je crois toutefois qu'il fera bien de ne pas trop grossir son Livre, et de s'en tenir à peu près aux dimensions qu'il a adoptées, à moins qu'il ne se décide à faire rentrer dans son plan la Mécanique rationnelle, qu'il a écartée.

J. T.

Annuaire pour l'an 1910, publié par le Bureau des Longitudes. In-16 de plus de 900 pages, avec figures. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

L'*Annuaire* du Bureau des Longitudes est attendu chaque année avec impatience par un grand nombre de personnes, savants, ingénieurs, praticiens, hommes du monde. Cette année, il a paru de très bonne heure, et nous devons en féliciter à la fois le Bureau des Longitudes et l'éditeur. Le Volume de cette année contient,

avec les documents astronomiques habituels, des Tableaux relatifs à la Physique et à la Chimie. On y trouve : éléments magnétiques, correction et comparaison des thermomètres et des baromètres, dilatation des liquides, tension de vapeur, élasticité et frottement des solides, viscosité des gaz, longueurs d'ondes, solubilités, etc.

Cet Ouvrage, en dehors des Tables des constantes usuelles, contient deux très intéressantes Notices : l'une de M. Baillaud sur la *Réunion du Comité international de la Carte photographique du ciel*, qui a eu lieu cette année à Paris ; l'autre de M. Lallemand sur un sujet dont l'intérêt est des plus actuels : *Les marées de l'écorce terrestre*.

J. C.

MÉLANGES.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SURFACES APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION ;

PAR M. J. HAAG.

Cette propriété, qui est peut-être déjà connue, est la suivante :

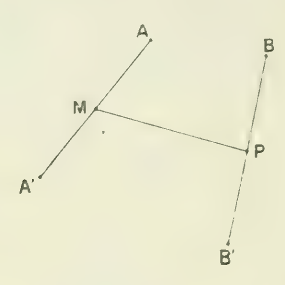
Étant donnée une surface quelconque applicable sur une surface de révolution, si, à partir de chaque point M *de cette surface, on porte sur la tangente au parallèle déformé qui passe par ce point, de part et d'autre de* M, *deux longueurs* MA *et* MA′ *égales au rayon primitif du parallèle en question, les points* A *et* A′ *décrivent deux surfaces applicables.*

Voici comment j'ai été conduit à ce théorème.

D'après la théorie générale de la déformation infiniment petite des surfaces, on sait que, si les lignes asymptotiques se corres-

pondent sur les deux nappes (S) et (Σ) de la surface focale d'une congruence, on peut obtenir deux couples de surfaces applicables de la manière suivante (DARBOUX, *Théorie des surfaces*, nos 888 et 898) :

Soient M et P deux points homologues de (S) et (Σ). Par M, menons une perpendiculaire au plan tangent en P à (Σ). Nous obtenons la directrice d'une déformation infiniment petite de (S).



Si sur cette directrice on porte, de part et d'autre de M, deux longueurs MA et MA′ proportionnelles au module de cette déformation et égales entre elles, les points A et A′ décrivent deux surfaces applicables.

On aura un autre couple de surfaces applicables en construisant d'une façon analogue les deux points B et B′. On sait même que, si V désigne l'angle des plans tangents en M et P à (S) et (Σ), on a la relation

$$(1) \qquad \overline{\text{MA}}\,.\,\overline{\text{PB}}\,\sin \text{V} = h\,\overline{\text{MP}},$$

h désignant une constante.

Ceci étant rappelé, proposons-nous d'examiner le cas où la congruence précédente est une congruence de normales. D'après une proposition de Ribaucour (DARBOUX, *Théorie des surfaces*, n° 765), on sait qu'une telle congruence est formée par les normales à une surface de Weingarten, ce qui exige que les surfaces (S) et (Σ) soient applicables sur des surfaces de révolution.

Dans ces conditions, la droite MA, par exemple, est forcément située dans le plan tangent en M à (S).

D'autre part, elle est perpendiculaire à MP, par conséquent normale au méridien déformé qui passe par M sur (S), et par suite tangente en M au parallèle déformé.

Les raisonnements précédents montrent donc les propriétés suivantes :

Étant donnée une surface applicable sur une surface de révolution, il lui correspond une déformation infiniment petite dont la directrice en chaque point est la tangente au parallèle déformé.

Ce cas est même le seul où la directrice d'une déformation infiniment petite d'une surface soit constamment dans le plan tangent à cette surface au point que l'on considère, car, si la droite MA est dans le plan tangent en M à (S), les plans tangents en M et P à (S) et (Σ) sont rectangulaires et, par suite, on a une congruence de normales.

Il ne nous reste plus qu'à trouver le module de la déformation correspondant à une surface (S) donnée. C'est ce que nous allons faire maintenant par un calcul très simple, qui nous établira du même coup, par voie analytique, les propositions précédentes.

Supposons une surface (S) possédant une déformation infiniment petite, telle que la directrice relative à chaque point M de cette surface soit dans le plan tangent en ce point. Prenons comme courbes coordonnées les courbes tangentes en chacun de leurs points à la directrice correspondante et leurs trajectoires orthogonales. Les premières seront, par exemple, les courbes $u = \text{const.}$, et les secondes les courbes $v = \text{const.}$ Considérons maintenant le trièdre mobile attaché à chaque point de la surface, comme à la page 385 du Tome II de l'Ouvrage de M. Darboux.

Les coordonnées relatives du point A seront $(0, y, 0)$, y étant une fonction convenable de u et de v. L'élément linéaire décrit par ce point A est

$$ds^2 = [A\,du - (r\,du + r_1\,dv)y]^2 + (dy + C\,dv)^2 + (p\,du + p_1\,dv)^2 y^2.$$

Écrivons qu'il ne change pas quand on change y en $-y$,

$$(2) \qquad -2A\,y(r\,du + r_1\,dv)\,du - 2C\,dy\,dv = 0.$$

Ceci doit avoir lieu quels que soient du et dv. Annulons le coefficient de du^2, nous obtenons

$$A\,y\,r = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $r = 0$. On en déduit

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0;$$

d'où $A = 1$, en choisissant convenablement l'argument u.

L'équation (2) se réduit maintenant à

$$d(\log y) = \frac{\partial}{\partial u}(\log C)\,du.$$

On en conclut

$$\frac{\partial C}{\partial v} = 0 \qquad \text{et} \qquad y = C,$$

à un facteur constant près.

Finalement, nous avons maintenant l'élément linéaire d'une surface de révolution rapportée à ses méridiens et à ses parallèles. On sait que, dans cet élément linéaire, C est proportionnel au rayon du parallèle. Par conséquent, *le module cherché est, à un facteur constant près, égal au rayon primitif du parallèle déformé qui passe par le point* M *considéré.*

On est donc en droit, à présent, d'énoncer la propriété qui se trouve au début de cette Note. Nous avons même prouvé sa réciproque, qui peut se mettre sous la forme suivante :

Étant donné un couple de surfaces applicables, si la droite joignant deux points homologues A *et* A' *admet constamment pour point focal le milieu* M *de* AA', *ce point* M *décrit une surface applicable sur une surface de révolution.*

Citons encore la propriété suivante, qui se déduit immédiatement de la formule (1) et de ce que nous venons de voir, et qu'il est du reste très facile de vérifier directement :

Étant donnée une surface (W) *quelconque, soient* M *et* P *les centres de courbure principaux relatifs à un point de cette surface. Le produit des rayons des parallèles déformés qui*

passent respectivement par M *et* P *sur les deux nappes de la surface des centres de courbure est proportionnel à la distance* MP.

Indiquons maintenant quelques applications du théorème qui fait l'objet de cette Note. Il nous donne une méthode générale pour exprimer qu'une surface (S) est applicable sur une surface de révolution. Il suffit d'écrire qu'on peut trouver, dans chaque plan tangent à (S), deux points symétriques par rapport au point de contact de ce plan et décrivant deux surfaces applicables. S'il existe une solution unique (en négligeant celles qu'on en déduit par homothétie), la surface est applicable sur une surface de révolution à courbure totale variable. *S'il y a, au contraire, une infinité de solutions distinctes, la surface considérée doit être à courbure totale constante*, car il n'y a que la sphère et le plan qui soient de révolution de plusieurs manières différentes.

Soit, par exemple, une surface (S) d'élément linéaire,

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2. \tag{3}$$

Si on la rapporte à un trièdre mobile (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 385), pour que le point $(x, y, 0)$ décrive le même élément linéaire que le point $(-x, -y, 0)$, il faut et suffit qu'on ait

$$A\,du[dx - (r\,du + r_1\,dv)y] + C\,dv[dy + (r\,du + r_1\,dv)x] = 0.$$

D'où les trois équations

$$\left\{\begin{aligned} C\frac{\partial x}{\partial u} + y\frac{\partial A}{\partial v} &= 0,\\ A\frac{\partial y}{\partial v} + x\frac{\partial C}{\partial u} &= 0,\\ A\frac{\partial x}{\partial v} - x\frac{\partial A}{\partial v} + C\frac{\partial y}{\partial u} - y\frac{\partial C}{\partial u} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Donc, *pour que l'élément linéaire* (3) *puisse convenir à une surface de révolution, il faut et suffit que le système* (4) *soit compatible en* x *et* y. *S'il admet une infinité de solutions, la surface sera à courbure totale constante, et dans ce cas seulement.*

Supposons, en particulier, que les lignes $v =$ const. soient des géodésiques. On peut alors supposer $A = 1$. La première équation (4) donne d'abord

$$x = V.$$

Cette équation n'est autre que la formule de Clairaut.

Réciproquement, si les lignes $v =$ const. obéissent à la formule de Clairaut, ce sont bien des géodésiques; car on a alors

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = 0;$$

à moins qu'on n'ait $y = 0$, auquel cas les lignes v seraient des parallèles, cas d'exception bien connu.

Les deux autres équations (4) deviennent

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial v} - V\dfrac{\partial C}{\partial u} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial \log C}{\partial u}\, y - \dfrac{V'}{C}. \end{cases}$$

Posons

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial u};$$

alors l'intégrale générale de la seconde équation est

$$y = C(V_1 - V'\gamma).$$

En portant dans la première, on a

$$(6)\qquad V\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2} + (V_1 - V'\gamma)\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u\, \partial v} + 2V'\frac{\partial \gamma}{\partial u}\frac{\partial \gamma}{\partial v} + 2(V''\gamma - V'_1)\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0.$$

Donc, *pour que l'élément linéaire*

$$ds^2 = du^2 + \frac{dv^2}{\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}}$$

convienne à une surface de révolution, il faut et suffit qu'on puisse trouver deux fonctions V et V_1 de v satisfaisant à l'équation (6).

On peut encore se poser le problème suivant :

Que doit être la fonction C *pour que les lignes* $v =$ const. *soient des géodésiques égales sur la surface de révolution?*

Pour cela, il faut et suffit que la constante de Clairaut soit la même pour toutes les lignes v, autrement dit que la fonction V se réduise à une constante, soit $V = a$. L'équation (6) se réduit alors à

$$a \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2} + V_1 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u \, \partial v} - 2 V'_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0.$$

Elle s'intègre facilement et donne

$$C = V'_2 f(u - a V_2).$$

En prenant V_2 pour argument v, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que les lignes* $v =$ const. *proviennent de géodésiques égales, il faut et suffit qu'on puisse mettre l'élément linéaire sous la forme*

$$ds^2 = du^2 + f^2(u - av)\, dv^2.$$

Le rayon du parallèle est alors proportionnel à $\sqrt{f^2 + a^2}$, de sorte que les parallèles ont pour équation

$$u - av = \text{const.}$$

Pour terminer, nous allons montrer comment notre méthode permet de déterminer certaines catégories de surfaces applicables sur une surface de révolution.

Premier exemple. — *Surfaces réglées applicables sur une surface de révolution.* — Ces surfaces sont connues (Darboux, *Théorie des surfaces*, nos 691, 692, 693).

Nous voulons simplement montrer avec quelle simplicité notre méthode permet de les retrouver.

Si l'on écarte certaines surfaces imaginaires, on sait que l'élément linéaire de toute surface réglée peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + \beta^2]\, dv^2,$$

où α et β sont des fonctions de v ayant des significations géométriques bien connues.

On a alors

$$v = \int \frac{du}{(u-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{\varphi}{\beta},$$

en posant

$$u - \alpha = \beta \operatorname{tang} \varphi.$$

D'où

$$y = \frac{V_1 - V'\varphi}{\cos\varphi}.$$

Portons dans la première équation (5), il vient

$$(7)\quad V \sin\varphi + \frac{V_1''}{\cos\varphi} + \frac{V''\varphi}{\cos\varphi} - V_1 \frac{\alpha'}{\beta} \sin\varphi - V_1 \frac{\beta'}{\beta} \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$
$$+ V' \frac{\alpha'}{\beta} \varphi \sin\varphi - V' \frac{\beta'}{\beta} \frac{\varphi \sin^2\varphi}{\cos\varphi} - V' \frac{\alpha'}{\beta} \cos\varphi + V' \frac{\beta'}{\beta} \sin\varphi = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée quels que soient v et φ.

Si on la divise par $\cos\varphi$ et qu'on annule successivement les termes en φ, $\varphi \operatorname{tang}\varphi$, $\varphi \operatorname{tang}^2\varphi$, terme constant, $\operatorname{tang}\varphi$, $\operatorname{tang}^2\varphi$, on obtient

$$V'' = 0, \quad V'\alpha' = 0, \quad V'\beta' = 0, \quad V_1'' = 0, \quad V - V_1 \frac{\alpha'}{\beta} = 0, \quad V_1 \beta' = 0.$$

Si β' n'était pas nul, la dernière équation donnerait $V_1 = 0$, puis la cinquième $V = 0$; alors x et y seraient nuls. Il faut donc déjà $\beta' = 0$.

La deuxième équation nous donne maintenant deux cas à considérer :

Premier cas : $\alpha' = 0$. — Alors la cinquième donne $V = 0$, et toutes les équations sont vérifiées. On a, dans ce cas, la surface engendrée par les binormales d'une courbe à torsion constante, qui est, comme on sait, applicable sur l'alysséide.

Second cas : $V' = 0$. — De la cinquième équation, on tire

$$\alpha' = k = \text{const.}$$

D'où

$$\alpha = kv.$$

On retombe alors sur l'élément linéaire de la surface gauche de révolution rapportée à une famille de génératrices et à leurs trajectoires orthogonales.

Telles sont, conformément à ce qu'on savait, les surfaces réglées réelles applicables sur une surface de révolution.

Deuxième exemple. — *Surfaces spirales applicables sur une surface de révolution.* — Toute surface spirale a un élément linéaire qui peut se mettre sous la forme (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 83)

$$ds^2 = V^2(du^2 + u^2\,dv^2).$$

Prenons donc

$$A = V, \qquad C = Vu,$$

et portons dans (4). La seconde équation donne d'abord

$$x = -\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Portons dans les deux autres

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} &= \frac{V_1}{u}\,y,\\ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} &= u\,\frac{\partial y}{\partial u} + V_1\,\frac{\partial y}{\partial v} - y, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\frac{V'}{V} = V_1.$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^3 y}{\partial u\,\partial v^2}$, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{V_1}{u^2}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{V'_1 - V_1^2}{u^2}\,y.$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^3 y}{\partial u^2\,\partial v}$, il vient

$$(9)\qquad \frac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{y} = V_1 - \frac{V''_1}{2V'_1}.$$

Cette équation ne peut être satisfaite identiquement que pour $V'_1 = 0$; d'où $V = e^{mv}$. Mais alors on vérifie de suite que la courbure totale est nulle; on a donc une surface développable.

Ce cas étant écarté, l'équation (9) montre que y est nécessairement de la forme

$$y = UV_2.$$

Portons dans (8)

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} U' V_2' &= \frac{V_1}{u} U V_2, \\ U V_2'' &= u U' V_2 + V_1 V_2' U - U V_2. \end{aligned} \right.$$

La première donne

$$\frac{U' u}{U} = \frac{V_1 V_2}{V_1'} = m = 0.$$

D'où

$$U = \alpha u^m \qquad (\alpha = \text{const.}),$$

$$\frac{V'}{V} = V_1 = m \frac{V_2'}{V_2};$$

d'où

$$V = V_2^m,$$

à une homothétie près.

Si l'on porte dans la seconde équation, on a

$$V_2'' = (m-1) V_2 + m \frac{V_2'^2}{V_2},$$

d'où

$$V_2'^2 = V_2^2 (a V_2^{2m-2} - 1) \qquad (a = \text{const.}).$$

Si nous prenons alors la fonction V_2 pour nouvelle variable v, nous avons finalement

$$ds^2 = v^{2m}\, du^2 + u^2 \frac{v^{2(m-1)}}{a v^{2(m-1)} - 1} dv^2$$

et

$$y = \alpha u^m v, \qquad x = -\alpha u^m v \sqrt{a v^{2(m-1)} - 1},$$

d'où

$$r = \beta (uv)^m \qquad (\beta = \text{const.}),$$

en appelant r le rayon du parallèle.

On voit, sur les formules précédentes, que les *spirales gauches* $v = \text{const.}$ *correspondent à des loxodromies.*

Il en est de même des lignes $u = \text{const.}$, quand $m = 1$, auquel cas la surface est d'ailleurs développable.

On a

$$\frac{1}{RR'} = \frac{m(1-m)}{u^2 v^2}.$$

On peut déduire de là que l'élément linéaire de la surface de révo-

lution rapportée à ses méridiens et parallèles est de la forme

$$ds^2 = du^2 + u^{2p}\, dv^2.$$

Sophus Lie a obtenu le même résultat en cherchant les surfaces dont les géodésiques admettent deux transformations infinitésimales conformes et distinctes, ce qui est évidemment le cas pour toute surface spirale applicable sur une surface de révolution. Il a remarqué que ces surfaces étaient surfaces des centres de courbure des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont dans un rapport constant (*Mathematische Annalen*, 1882, p. 389).

Troisième exemple. — On peut, toujours par la même méthode, chercher les *surfaces moulures* applicables sur une surface de révolution, en partant de l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + (U - V)^2\, dv^2.$$

On trouve qu'il n'y en a pas d'autres que les surfaces développables qu'on obtient en prenant une droite pour profil.

On pourrait plus généralement chercher, parmi les éléments linéaires de la forme

$$ds^2 = du^2 + (U_1 V_1 + U_2 V_2 + \ldots + U_m V_m)^2\, dv^2,$$

ceux qui peuvent convenir à une surface de révolution.

Ceci s'appliquerait, en particulier, aux surfaces de Monge les plus générales.

Remarque. — Si l'on revient au cas des surfaces réglées, quelques considérations géométriques conduisent aux deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soient* (S) *la surface engendrée par les binormales d'une courbe à torsion constante,* (π) *le paraboloïde équilatère de raccordement relatif à une génératrice quelconque* (G), (A) *et* (A') *deux génératrices de* (π) *symétriques par rapport à* (G). *Si l'on fait glisser* (π) *sur* (S), *les droites* (A) *et* (A') *engendrent deux surfaces applicables, les points homologues étant symétriques par rapport à* (G).

Théorème II. — *Soient* (γ) *et* (γ') *deux courbes de Bertrand associées,* M *et* M′ *deux points homologues,* Δ *la perpendiculaire au plan osculateur en* M′ *menée par* M, Δ' *la droite analogue issue de* M′. *Faisons subir à* Δ *une rotation d'un angle* φ *autour de* Δ', *puis une homothétie de centre* M′ *dans le rapport* $\frac{1}{\cos\varphi}$, *puis une réduction des cotes relatives au plan osculateur en* M′ *dans le rapport* $\cos\varphi$. *Soit* D *la droite obtenue. En tournant de l'angle* -2φ *autour de* Δ', *elle nous donne une autre droite* D′. *Si l'on suppose maintenant que* M *décrive* (γ), *les droites* D *et* D′ *engendrent deux surfaces applicables, les points homologues ayant leur milieu sur* Δ.

SUR CERTAINES SURFACES DE WEINGARTEN;

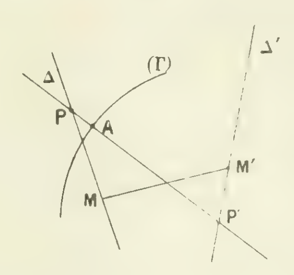
Par M. J. Haag.

Proposons-nous de chercher *les surfaces* W *dont une nappe de la surface des centres de courbure est une surface réglée.* Comme cette nappe doit être applicable sur une surface de révolution, les génératrices rectilignes ne correspondant pas aux méridiens, ce ne peut être, si l'on s'en tient aux solutions réelles, qu'une surface réglée provenant de la flexion d'un hyperboloïde de révolution. Or, nous savons que toute surface de cette nature peut être obtenue de la manière suivante :

Soient (γ) et (γ') deux courbes de Bertrand associées, M et M′ deux points homologues, Δ la perpendiculaire menée par M au plan osculateur en M′, Δ' la droite analogue menée par M′. Quand M décrit (γ), les droites Δ et Δ' engendrent deux surfaces (S) et (S′) provenant toutes deux de la déformation de l'hyperboloïde (H) engendré par la rotation de Δ autour de Δ', ou de l'hyperboloïde (H)′ engendré par la rotation de Δ' autour de Δ (1).

(1) *Voir*, par exemple, une Note de l'auteur aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 10 août 1908.

Ceci étant rappelé, proposons-nous de *chercher la seconde nappe de la surface des centres de la surface* (W) *dont la première nappe est la surface* (S). A cet effet, prenons un point P quelconque sur Δ. La normale menée par ce point à la sur-



face (W) est la tangente au méridien de (H). C'est donc la droite PP' qui rencontre Δ' et qui se trouve dans le plan mené par Δ perpendiculairement au plan (P, Δ'). Mais alors, par le même raisonnement, on voit que la tangente en P' au méridien de (H') est aussi la droite PP'. Il résulte évidemment de là que *la seconde nappe cherchée n'est autre que la surface* (S'). On a vérifié en passant que les deux plans focaux (Δ, PP') et (Δ', P'P) sont bien rectangulaires.

D'après ce qui précède, on voit qu'*il n'y a pas de surface* (W) *réelle dont une seule nappe de la développée soit une surface réglée.*

Il serait maintenant très facile d'étudier les surfaces (W) déduites du couple de surfaces (S) et (S').

On peut, par exemple, en donner un mode de génération très simple. Quand P et P' décrivent respectivement Δ et Δ', la droite PP', qui est l'intersection de deux plans rectangulaires passant respectivement par les droites fixes Δ et Δ', engendre un hyperboloïde (h). Soit (Γ) une trajectoire orthogonale des droites PP' sur cet hyperboloïde. *Si l'on suppose que* (Γ) *soit entraînée dans le mouvement de glissement* (G) *de* (H) *sur* (S) (*Comptes rendus* du 10 août 1908), *elle engendrera une des surfaces* (W) *en question.* En effet, la droite PP' est à chaque instant normale à la trajectoire d'un quelconque de ses points, du point A en particulier. Elle est d'autre part normale à (Γ). Donc elle est normale à la surface engendrée par (Γ).

Les *rayons de courbure principaux* relatifs au point A sont évidemment AP et AP′. Ils ne dépendent bien que d'une seule variable, celle qui fixe la position de PP′ sur (h). La relation entre ces rayons de courbure est transcendante et nécessite l'introduction des fonctions elliptiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KOWALEWSKI (G.). — EINFÜHRUNG IN DIE DETERMINANTENTHEORIE, EINSCHLIESSLICH DER UNENDLICHEN UND DER FREDHOLMSCHEN DETERMINANTEN. 1 volume in-8, VI-550 pages. Leipzig, Veit et Cie, 1909.

« L'Algèbre est si vaste qu'il y faut, sans doute, plusieurs *introductions*... », écrivait ici même (¹) M. Tannery. Le Livre de M. Kowalewski en est une et, à la vérité, nous dit l'auteur dans sa préface, « pour une grande et importante discipline qui, récemment encore, a accru son domaine et transporté la notion de déterminant dans l'infini dénombrable et dans le continu ». La théorie des déterminants, une des plus belles et des plus attrayantes de l'Algèbre, avec son mécanisme si simple, ses méthodes presque élémentaires, ses résultats si féconds, a provoqué de nombreux travaux ainsi que bien des Livres classiques, et de bons Livres. Celui-ci pourtant ne sera pas inutile; il se distingue de ses devanciers; il a son originalité propre; c'est une *Introduction*, mais au sens le plus large du mot; il conduit très loin : de la notion de déterminant telle qu'elle résulte des travaux de Leibniz et de Cramer nous trouvons, chemin faisant, une multitude d'applications intéressantes; puis, sortant du domaine de l'Algèbre proprement dite, l'auteur expose les propriétés des déterminants fonctionnels, étudie une classe étendue de déterminants infinis et enfin les déterminants de Fredholm qui jouent un si grand rôle dans la résolution des équations intégrales. Il y a là un vaste programme, traité de main de maître, en un Livre clairement écrit qu'on ne saurait trop recommander aux étudiants.

Une première Partie, 300 pages environ, s'occupe en treize Chapitres des déterminants ordinaires, des matrices et de quelques applications algébriques et géométriques. Des notions historiques,

(¹) *Bulletin*, 2ᵉ série, t. XXXII, 1908, p. 37.

la définition d'un déterminant commencent l'Ouvrage; les propriétés élémentaires sont ensuite étudiées, de nombreux exemples familiarisent le lecteur avec les idées essentielles; puis viennent des développements et des études sur une foule de questions variées (équations linéaires, multiplication des déterminants et des matrices, déterminants dont les éléments sont mineurs d'un autre, déterminants bordés, théorème de Sylvester, déterminants symétriques, équation séculaire, déterminants gauches, déterminants orthogonaux, résultants et discriminants, invariants; formes linéaires, quadratiques, bilinéaires et formes d'Hermite, transformations et substitutions, théorie des diviseurs élémentaires; applications géométriques). Cette simple énumération montre l'abondance des sujets traités; mais l'exposé de M. Kowalewski n'est pas un simple résumé des faits; l'auteur ne se défend pas, à chaque fois qu'il en a l'occasion, dès qu'une notion particulière évoque une théorie générale, de nous en donner quelques aperçus; il en montre le sens et la portée. On sait très nettement, car il ne craindra pas au besoin de reprendre une question à ses débuts, d'où viennent les idées; on sait aussi, par la variété des applications, jusqu'où elles peuvent conduire.

Deux Chapitres sont consacrés : l'un, aux déterminants fonctionnels avec leurs applications à l'Algèbre et à la Géométrie; l'autre aux déterminants de Wronski et de Gram dont on connaît le rôle important en Analyse et qui permettent, entre autres choses, de reconnaître si des fonctions sont linéairement indépendantes.

Le reste du Livre est la partie la plus originale; l'auteur a fait œuvre neuve et exposé les plus récentes recherches. Un long Chapitre est consacré aux déterminants infinis et spécialement à ceux que von Koch appelle des *déterminants normaux* (¹); les propriétés essentielles de ces symboles sont très nettement expliquées et la théorie trouve son application dans les équations linéaires à un nombre infini de variables dont le déterminant est normal. A ce propos, l'auteur expose la belle théorie fondée par Erhard Schmidt (²) pour un système d'équations linéaires tel que la

(¹) La série double des termes du déterminant (les termes diagonaux étant diminués de 1) est supposée absolument convergente.

(²) *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXV, 1908, p. 53.

somme des carrés des coefficients de chaque équation converge; l'exposé est une mise au point magistrale des remarquables considérations géométriques de Schmidt; c'est une généralisation de la théorie des vecteurs que l'on définit dans l'espace à une infinité de dimensions; on étudie l'orthogonalité de ces éléments, les projections d'un vecteur sur un axe, et l'on obtient sous une forme extrêmement élégante la résolution complète des équations. Les deux derniers Chapitres sont une introduction à l'étude des équations intégrales et renferment les principaux points des théories de Fredholm, de Hilbert et de E. Schmidt. Les déterminants de Fredholm, qui jouent pour une fonction $f(x, y)$ le même rôle qu'un déterminant pour une fonction à deux variables numériques C_{pq}, sont déduits d'un déterminant infini normal par un passage à la limite; il en est de même pour les mineurs de Fredholm, pour les relations entre ces mineurs, et l'on est conduit ainsi tout naturellement à la résolution des équations intégrales linéaires. L'auteur ajoute un exposé succinct de la méthode de E. Schmidt pour résoudre l'équation à noyau symétrique, méthode que prépare l'étude des notions, dues à Hilbert, des *autofonctions* (Eigenfunctionen) et des *autovaleurs* (Eigenwerte) d'un noyau symétrique.

Le Livre se termine par des notes et une courte bibliographie. Le lecteur qui voudra s'initier à la théorie des déterminants, et surtout à ses applications les plus modernes, trouvera dans l'Ouvrage de M. Kowalewski un Livre très clair, d'une lecture facile et attrayante, une préparation excellente à la lecture des Mémoires originaux, en un mot, un guide éclairé et sûr.

J. Marty.

PICKDORF (A.-G.). — Elementary projective Geometry. 1 volume petit in-8, XII-256 pages. Cambridge, University Press, 1909.

Cet élégant petit Livre correspond bien à son titre; c'est bien un Traité élémentaire de Géométrie projective, destiné à des élèves et surtout à des élèves qui ont reçu l'éducation géométrique d'après Euclide : ces élèves-là ne seront pas dépaysés, en étudiant

le Livre de M. Pickford, et c'est peu à peu qu'ils se sentiront dans un monde nouveau.

L'exposition de l'auteur est nettement métrique : c'est le rapport anharmonique, la *cross-ratio*, comme on dit en Angleterre, qui est son point de départ; il aboutit à la théorie des coniques, considérées comme lieu du point d'intersection des rayons correspondants AM, BM de deux faisceaux projectifs ayant pour centres les points A, B; il démontre, de deux façons élégantes, que, si C est un point fixe quelconque pris sur la courbe ainsi définie, le faisceau CM est projectif aux faisceaux AM, BM. Le Livre se termine par quelques notions sur l'homologie et la projection centrale dans l'espace. J. T.

LOVE (A.-E.-H.). — ELEMENTS OF THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS. 1 volume in-8, XIII-207 pages. Cambridge, University Press, 1909

Ces *Éléments de Calcul différentiel et intégral* s'adressent à un public analogue à celui de nos Cours de Mathématiques générales, chez lequel, pourtant, on supposerait un peu moins de connaissances mathématiques et qu'on voudrait conduire un peu moins loin; la tâche du professeur n'en est sans doute que plus difficile. C'est une vingtaine de leçons que M. Love consacre à cet enseignement : le présent Livre est le résultat de son expérience et le résumé de ses leçons; on sera frappé du talent que déploie l'auteur pour se mettre à la portée de son auditoire.

J. T.

RIQUIER (CH.). — LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. 1 volume in-8, XXVII-590 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Depuis bien des années déjà, les questions relatives à la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles sont pour l'auteur un sujet de prédilection. Le moment était venu de réunir en un Livre les résultats qu'il avait accumulés dans de nombreux et longs Mémoires, dispersés dans des Recueils divers,

et d'en faire, avec les propositions élémentaires de la théorie, avec cet ensemble de connaissances indispensables qui sont, comme il le dit, du domaine public, un tout organisé qui se suffise à lui-même, une doctrine que puissent apprendre ceux qui veulent étudier cette importante partie des Mathématiques.

Dans une très intéressante Préface, l'auteur fait l'historique des travaux qui ont précédé les siens, ainsi que de ses propres recherches. C'est à Cauchy qu'est dû le point de départ (1842-1843). Entre autres résultats, M. Darboux et Sophie de Kowalewski établissent à nouveau les théorèmes d'existences dus à Cauchy (1875). En 1880, M. Méray publie, dans le *Journal de Liouville*, sa *Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles*. M. Riquier analyse et critique avec soin ce Mémoire, dont l'étude a été le point de départ de ses propres recherches, et qui a été très fécond pour lui, tant par les idées et les méthodes qu'il en a tirées, que par les lacunes mêmes qu'il a su reconnaître et que, de concert avec M. Méray, il a contribué à combler (1890). Depuis sa collaboration avec M. Méray, M. Riquier est parvenu à des extensions successives des théorèmes d'existence.

Arrivons maintenant à l'analyse de son Livre.

Il convient de noter tout d'abord deux points : d'une part, l'auteur n'impose jamais aux intégrales des systèmes qu'il étudie que des conditions dites *initiales;* d'autre part, il ne considère jamais que les fonctions dites *analytiques*, en adoptant, relativement à ces dernières, le point de vue de M. Méray, qui consiste, comme on sait, à faire reposer leur théorie générale sur les propriétés des séries entières. De ce point de vue, qui n'exige que peu de connaissances préalables, l'ordre et l'unité de la méthode apparaissent clairement.

Économie des conditions initiales dans les systèmes différentiels résolus par rapport à diverses dérivées des inconnues. — Étant donné un système différentiel, S, résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues u, v, ..., qui s'y trouvent engagées, nous conviendrons de dire, avec l'auteur, qu'une dérivée de ces fonctions est *principale* relativement au système, lorsqu'elle coïncide, soit avec quelqu'un des premiers

membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées; nous conviendrons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique*.

Considérons, dans un pareil système, S, un groupe d'intégrales (hypothétiques), u, v, ..., que nous supposerons développables, à partir des valeurs initiales x_0, y_0, ... choisies pour les variables indépendantes x, y, ..., en une série entière par rapport aux accroissements $x - x_0$, $y - y_0$, ...; et nommons *détermination initiale* de l'une d'entre elles la portion de son développement formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées paramétriques de tous ordres. Cela étant, l'auteur démontre, par des raisonnements tout élémentaires fondés sur la signification bien connue des coefficients du développement, que, *pour se donner arbitrairement les déterminations initiales des intégrales (hypothétiques) du système, il suffit d'imposer à ces intégrales et à telles ou telles de leurs dérivées, en nombre essentiellement limité, la condition de se réduire respectivement, pour les valeurs initiales de tels ou tels groupes de variables, à des fonctions arbitraires des groupes de variables restants*. Ainsi se trouve fixé ce qu'on peut appeler l'*économie des conditions initiales* du système.

Si l'on considère, par exemple, un système différentiel impliquant deux fonctions inconnues, u, v, des trois variables x, y, z, et résolu par rapport aux quatre dérivées

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3},$$

l'application de la méthode de M. Riquier donnera, pour l'économie des conditions initiales, le Tableau suivant :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} u = \varphi(y, z) & \text{pour} & x - x_0 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \psi(x, z) & \text{pour} & y - y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \omega(x, y & \text{pour} & z - z_0 = 0, \\ v = \mu(z) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta \end{array}\right\} & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0; \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'en désignant par x_0, y_0, z_0 les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, il suffit, pour se donner arbitrairement les déterminations initiales des intégrales hypothétiques du système, de se donner arbitrairement les fonctions

$$\varphi(y, z), \qquad \psi(x, z), \qquad \omega(x, y), \qquad \mu(z)$$

et les constantes α, β, auxquelles doivent se réduire respectivement

$$\begin{array}{rll} u & \text{pour} & x - x_0 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \text{pour} & y - y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} & \text{pour} & z - z_0 = 0, \\ v & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0. \end{array}$$

L'étude de cette question préliminaire est fondamentale dans les théories de l'auteur.

Pour se représenter commodément l'économie des conditions initiales, on peut procéder comme il suit : construire un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux diverses variables indépendantes x, y, ..., et les colonnes aux diverses quantités (inconnues et dérivées) qui figurent dans les premiers membres des conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircir à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction (ou constante) arbitraire qui figure dans le second membre de la condition correspondante; en répétant cette opération successivement pour toutes les colonnes, on obtient une sorte de damier où les cases blanches et noires peuvent offrir des dispositions relatives variées. Par exemple, à des conditions initiales de la forme (1) correspondra le damier ci-dessous :

	u	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$	v	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
x						
y						
z						

Calcul inverse de la dérivation. — Le problème du calcul inverse de la dérivation peut se formuler comme il suit :

Chercher toute fonction des variables x, y, ... développable à partir de valeurs données x_0, y_0, ..., et dont on suppose données telles ou telles dérivées (d'ordres quelconques).

Lorsqu'on se donne une seule dérivée de la fonction inconnue, aucune condition de possibilité n'intervient ; lorsqu'on s'en donne plusieurs, il faut, pour la possibilité du problème, que certaines identités en x, y, ... (très faciles à former) se trouvent vérifiées. En supposant qu'elles le soient, le problème admet une solution (unique) répondant à des conditions initiales arbitrairement données, et la recherche de cette solution se ramène à une recherche du même genre successivement exécutée dans diverses équations dont chacune a la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, \ldots),$$

ou, en d'autres termes, à un certain nombre de *quadratures*. La seule inspection des équations proposées et du Tableau des conditions initiales (convenablement écrites) suffit d'ailleurs pour qu'on puisse former *immédiatement* le Tableau des quadratures successives.

Systèmes passifs ; systèmes complètement intégrables. — Si aux équations qui composent un système différentiel donné quelconque, T, on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, le groupe illimité résultant de cette adjonction s'appellera le *système* T *prolongé*.

Si l'on considère, dans le système T, un groupe quelconque d'intégrales, et qu'on assimile pour un instant les variables x, y, ..., les fonctions inconnues u, v, ..., et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, le système T prolongé ne peut manquer d'être *numériquement* vérifié par des valeurs particulières quelconques, x_0, y_0, ..., de x, y, ..., prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales considérées et de leurs dérivées de tous ordres.

Inversement, si le système T prolongé admet quelque solution

numérique, et si, en désignant par x_0, y_0, ... les valeurs numériques de x, y, ..., les développements entiers en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., qui ont pour coefficients (aux facteurs numériques connus près) les valeurs numériques de u, v, ... et de leurs dérivées de tous ordres sont convergents, les sommes des développements dont il s'agit constituent, comme on le démontre sans peine, un groupe d'intégrales du système T.

D'après cela, la recherche des divers groupes d'intégrales d'un système différentiel quelconque T peut s'effectuer par celle des diverses solutions *numériques* de T *prolongé* qui donnent lieu à des développements convergents.

Considérons actuellement, comme le fait l'auteur, un système différentiel, S, possédant la double propriété d'être *résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues* qui s'y trouvent engagées, et de ne contenir dans ses seconds membres aucune dérivée principale; et proposons-nous de rechercher s'il existe, dans un pareil système, un groupe d'intégrales répondant à des conditions *initiales* données. Puisqu'on suppose données les valeurs initiales de x, y, ..., de u, v, ... et de leurs dérivées paramétriques, la question revient à examiner : 1° s'il existe, pour les dérivées principales de u, v, ..., des valeurs numériques (initiales) qui, prises conjointement avec les valeurs initiales données, vérifient numériquement le système S prolongé ; 2° si une pareille solution numérique, en supposant qu'elle existe, donne lieu à des développements convergents. Il est clair d'ailleurs que les systèmes différentiels véritablement commodes et utiles sont ceux où, pour un choix *arbitraire* des données initiales, les deux conditions qui viennent d'être formulées se trouvent à la fois satisfaites.

Occupons-nous d'abord de la première; le système S est dit *passif*, si, assimilant pour un instant les variables x, y, ..., les inconnues u, v, ..., et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, on peut, par voie d'éliminations, déduire du système S prolongé un système numériquement équivalent résolu par rapport aux dérivées principales : chacune de ces dernières se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, et il va sans dire qu'à chacune d'elles est supposée

correspondre, dans le système numériquement équivalent à S prolongé, une formule *unique* de résolution. La solution *numérique* générale de S prolongé est alors fournie par un groupe de formules où les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de tous ordres ont des valeurs arbitraires, tandis que les dérivées principales se trouvent entièrement déterminées en fonctions de ces diverses quantités.

Le système S étant supposé passif, la question de savoir si le groupe (forcément unique) d'intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existe effectivement se résout, d'après ce qui a été dit plus haut, par l'affirmative dans le cas où leurs développements, construits *a priori*, sont tous convergents, par la négative dans le cas contraire. Si donc cette convergence a lieu quelles que soient les données initiales, le système S admet un groupe (unique) d'intégrales répondant à des conditions initiales *arbitrairement* choisies : il est dit, en pareil cas, *complètement intégrable*.

Systèmes orthonomes. — Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots,$$
$$u, \quad v, \quad \ldots$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les dernières diverses fonctions inconnues de ces variables. A chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, faisons correspondre un entier (positif, nul ou négatif), que nous nommerons la *cote* de cette quantité ; puis, considérant une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions $u, v, \ldots$, nommons *cote* de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote de la fonction celles des r variables de différentiation.

Cette définition posée, imaginons qu'on attribue aux quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots, p$ cotes successives ($p \geqq 1$) ; désignons par δ, δ' deux quantités appartenant à l'ensemble que forment les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, par

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_p,$$
$$c'_1, \quad c'_2, \quad \ldots, \quad c'_p$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que δ' est *normale* ou *anormale* par rapport à δ, suivant que les différences successives

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_p - c'_p$$

satisfont ou non à la double condition : 1° que ces différences ne soient pas toutes nulles ; 2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive.

Considérons enfin un système différentiel impliquant les fonctions inconnues u, v, ... des variables indépendantes x, y, ..., et possédant, comme plus haut, la double propriété d'être résolu par rapport à diverses dérivées de ces inconnues, et de ne contenir dans ses seconds membres aucune dérivée principale. Puis, à chacune des quantités x, y, ..., u, v, ..., attribuons, conformément aux indications qui précèdent, p cotes successives, sous la seule condition *que les cotes premières de toutes les variables indépendantes* x, y, ... *aient pour valeur commune l'unité*. Cela étant, le système considéré sera dit *orthonome*, si, moyennant un choix convenable de l'entier p et des cotes qu'on a commencé par attribuer aux variables et aux inconnues, chaque second membre ne contient *effectivement*, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant.

Dans un système orthonome, la convergence des développements des intégrales est assurée (l'auteur le prouve à l'aide d'un système majorant approprié), en sorte que *le système, s'il est passif, est par là même complètement intégrable*. D'un autre côté, les conditions de passivité d'un système orthonome, qui semblent au premier abord devoir être en nombre infini, résultent, à titre de conséquences nécessaires, d'un nombre *essentiellement* limité d'entre elles. Il est donc nécessaire et suffisant, pour qu'un *système* orthonome soit complètement intégrable, que certaines relations en nombre fini, subsistant entre les variables, les inconnues et quelques-unes de leurs dérivées paramétriques, soient vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités ; l'auteur formule à ce sujet une règle très précise. Dans le cas où les divers premiers membres du système appartiennent à des inconnues toutes différentes, aucune condition n'intervient.

(Il convient d'observer en passant que la forme orthonome passive de M. Riquier comprend, comme cas très particuliers, tous les types complètement intégrables étudiés jusqu'à ce jour).

Systèmes plus généraux. — L'auteur, après avoir étudié les systèmes orthonomes, s'efforce de généraliser et de simplifier les résultats obtenus. D'une part, grâce à un lemme élémentaire qu'il établit sur les équations du premier degré (p. 369 et suiv.), il rend la méthode des fonctions majorantes applicable à des cas beaucoup plus étendus; d'autre part, grâce à certaines réductions (fondées sur la considération du Tableau des conditions initiales) qu'il effectue sur les systèmes différentiels étudiés (p. 327 et suiv., p. 337 et suiv.), il substitue à la règle primitivement formulée pour les conditions d'intégrabilité complète des systèmes orthonomes une règle notablement plus avantageuse, applicable, elle aussi, à des systèmes plus généraux.

Le lecteur trouvera page 358 les énoncés définitifs des théorèmes d'existence qui concernent les systèmes orthonomes, puis pages 384 et 387 les énoncés relatifs aux nouveaux systèmes étudiés : dans ces derniers interviennent des restrictions d'inégalité portant sur les données initiales. Sans entrer, relativement à ces divers résultats, dans des détails qui nous entraîneraient un peu loin, nous citerons deux exemples qui, nonobstant leur extrême simplicité, suffiront à donner une idée du double progrès réalisé.

Supposons d'abord qu'un système différentiel, impliquant une fonction inconnue, u, des variables indépendantes x, y, ..., ait pour premiers membres toutes les dérivées d'ordre m de u, les seconds membres ne contenant, avec les variables x, y, ..., que l'inconnue u et ses dérivées d'ordre inférieur à m. Pour former les conditions d'intégrabilité complète d'un pareil système (visiblement orthonome), il suffit, d'après la règle simplifiée à laquelle nous venons de faire allusion, d'adjoindre aux équations qui le composent celles qui s'en déduisent par des différentiations premières, et d'opérer, dans le système résultant, l'élimination des dérivées d'ordres m et $m+1$. Or, il fallait, d'après la règle primitive, adjoindre aux équations proposées toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations d'ordres $1, 2, \ldots, m$, et opérer

ensuite l'élimination des dérivées d'ordre m, $m+1$, ..., $2m$: on se trouvait ainsi conduit, par un calcul beaucoup plus long, à un ensemble de conditions dont un grand nombre étaient superflues.

Supposons maintenant que, dans l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, il s'agisse de déterminer un ensemble de conditions suffisantes pour l'existence d'une intégrale répondant à des conditions initiales données, de la forme

$$u = \varphi(y) \qquad \text{pour} \qquad x = x_0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \psi(x) \qquad \text{pour} \qquad y = y_0.$$

En désignant par A et B les dérivées partielles du second membre f relatives $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, et par A_0, B_0 les valeurs numériques initiales de A, B, on a successivement assigné comme condition suffisante à l'existence de l'intégrale :

1° La nullité identique des deux fonctions A et B. (Ce résultat se trouve contenu, comme cas particulier, dans les recherches publiées par M. Méray en 1890, avec la collaboration de M. Riquier; *voir* à ce sujet une Note insérée dans la Préface de l'Ouvrage.)

2° La nullité identique de l'une ou de l'autre des fonctions A, B. (C'est là une application particulière des recherches publiées par M. Riquier en 1893, ou de celles qui ont paru peu après sur les systèmes orthonomes.)

3° La simple inégalité numérique

$$\operatorname{mod}(A_0 B_0) < \frac{1}{4}.$$

(C'est là une application particulière des recherches les plus récentes de M. Riquier.)

On peut juger, par ce simple rapprochement, de l'extension progressivement donnée aux théorèmes d'existence.

APPLICATIONS A DIVERSES QUESTIONS. — I. *Déformations finies d'un milieu continu dans l'espace à n dimensions.* — Désignant par (j, k) une combinaison de deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite 1, 2, ..., n, par $\mu_{j,k} = \mu_{k,j}$ une fonction donnée des n variables indépendantes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

et par

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

n fonctions inconnues de ces variables, l'auteur considère le système des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_k} = \mu_{j,k};$$

bien que ces équations ne contiennent pas explicitement $u, v, \ldots, w$, il est toujours permis de les considérer comme subsistant entre

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$
$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w,$$

et les n^2 dérivées premières de $u, v, \ldots, w$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit en tout $n(n+2)$ quantités : il va sans dire alors que, dans les solutions *numériques* du système (2), les valeurs de $u, v, \ldots, w$ sont entièrement arbitraires.

Cela étant, l'auteur est tout d'abord conduit, par l'application de ses théories, à la conclusion suivante :

Pour que le système (2) possède quelque groupe d'intégrales, il est nécessaire que les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions données $\mu_{j,k}$ et leurs dérivées premières et secondes satisfassent à certaines relations, en nombre $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, qu'on nommera, pour cette raison, *conditions de possibilité.*

Inversement, les conditions de possibilité étant supposées vérifiées, à toute solution numérique du système (2) [subsistant, comme il a été dit plus haut, entre $n(n+2)$ quantités] correspond un groupe unique d'intégrales, et il suffit, pour avoir les intégrales générales du système (dépendant de $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes

arbitraires), de connaître un seul de ces groupes d'intégrales particulières.

M. Riquier se pose ensuite, au sujet des fonctions données $\mu_{j,k}$, une question qui n'avait pas encore été examinée : puisqu'elles doivent vérifier identiquement les conditions de possibilité, un point intéressant consiste à rechercher quels sont, dans le choix de ces fonctions, les éléments dont on peut disposer arbitrairement. Pour résoudre cette question, l'auteur considère, dans les conditions de possibilité, les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions $\mu_{j,k}$ comme des inconnues, et il met le système différentiel résultant sous une forme orthonome complètement intégrable : une pareille réduction, toujours possible au point de vue théorique (à l'aide de différentiations et d'éliminations), mais souvent inexécutable au point de vue pratique, peut s'effectuer, dans le cas actuel, par le moyen simple d'une résolution d'équations linéaires. Cela fait, il ne reste plus qu'à fixer, dans la forme ainsi obtenue, l'économie des conditions initiales : le résultat auquel on parvient présente cette particularité remarquable que n des fonctions μ convenablement choisies, par exemple

$$\begin{array}{cccc} \mu_{1,2} & \mu_{1,3}, & \ldots, & \mu_{1,n}, \\ & \mu_{2,3}, & & \end{array}$$

sont entièrement arbitraires.

II. *Détermination des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à n variables.* — Dans le système (2), précédemment examiné, l'auteur considère le cas particulier où les diverses fonctions μ pourvues d'indices inégaux sont identiquement nulles; l'examen de ce cas lui fournit une méthode très simple pour étudier le système des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0,$$

où (j, k) désigne une combinaison quelconque de deux entiers distincts pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$. Il arrive à ce résultat que la solution générale du système (3) contient (avec diverses arbitraires dépendant de moins de deux variables) $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux variables.

Systèmes différentiels où les conditions initiales présentent une disposition régulière. — Étant donné un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous dirons que le damier des conditions initiales y est *régulier*, si, en adoptant pour ses lignes, c'est-à-dire pour les variables indépendantes du système, un ordre convenable, les cases blanches de chaque colonne se trouvent toutes situées au bas de cette colonne.

Certains des théorèmes d'existence dont il est fait mention plus haut se simplifient légèrement lorsque les conditions initiales présentent une disposition régulière. Le système est d'ailleurs, en pareil cas, susceptible d'une réduction intéressante que nous allons formuler.

Nous nommerons à cet effet *système simple* un système différentiel du premier ordre résolu par rapport aux diverses dérivées (premières) qui intéressent une seule et même variable, et linéaire par rapport à l'ensemble de toutes les dérivées (premières). Cela étant, la réduction annoncée consiste en ce que la recherche d'intégrales répondant à des conditions initiales données se ramène à une semblable recherche successivement exécutée dans divers systèmes simples.

Systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. — Parmi les systèmes différentiels auxquels s'applique l'un ou l'autre des théorèmes d'existence formulés par l'auteur, il était intéressant de rechercher s'il en est dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. Cette recherche peut se résumer comme il suit :

Si l'ensemble des éléments arbitraires qui figurent dans les conditions initiales ne renferme, avec un nombre (fini) quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales répondant à des conditions initiales données, se ramène à deux intégrations successives, savoir : 1° celle d'un système complètement intégrable d'équations différentielles totales, variable avec le choix des conditions initiales ; 2° celle d'un système linéaire et complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, indépendant du choix dont il s'agit, et qui, bien

que les fonctions inconnues s'y trouvent en nombre généralement supérieur à 1, peut se traiter par la méthode classique de Jacobi.

Ce résultat a été communiqué par M. Riquier à l'Académie des Sciences, le 21 novembre 1898. Au commencement de la même année, Beudon avait formulé un résultat analogue (*Comptes rendus*, 31 janvier 1898), et M. Riquier avait lui-même, quatre ans auparavant (*Comptes rendus*, 30 juillet 1894), examiné le cas où le système considéré est du premier ordre.

Il va sans dire que la démonstration exposée s'applique, en particulier, au cas d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire : il en résulte, pour traiter l'équation dont il s'agit et en ramener l'intégration à celle du système bien connu d'équations différentielles ordinaires, une méthode nouvelle, différente de celles qu'ont données Jacobi, Lagrange et Cauchy.

Réduction d'un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable. — En se fondant sur les propriétés des systèmes qu'il a nommés *orthonomes*, l'auteur établit le théorème suivant :

Étant donné un système différentiel quelconque (composé d'un nombre limité d'équations), *on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes* (indiquant l'impossibilité du système), *en déduire, par de simples différentiations et éliminations, un système complètement intégrable, équivalent au proposé au point de vue de l'intégration.*

On voit ainsi que, dans tout système différentiel (compatible), la solution générale dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre fini, résultat publié par M. Riquier dès 1893, dans les *Annales de l'École Normale*. (L'auteur suppose d'ailleurs, expressément, que tout système différentiel *directement donné* se compose d'un nombre limité d'équations : c'est toujours, en effet, à de pareils systèmes que conduit la mise en équations des problèmes de Mathématiques appliquées.)

Une dernière étude, à laquelle l'auteur se trouve naturellement conduit par la précédente, consiste à comparer, dans deux formes

passives provenant d'un même système différentiel, le nombre et la nature des éléments arbitraires que comportent les conditions initiales.

A cet effet, nommons *genre* d'une fonction arbitraire le nombre de ses variables; puis, considérant un système passif, désignons par λ le genre maximum des arbitraires qui figurent dans les conditions initiales, et appelons μ le nombre des arbitraires qui, parmi elles, sont de genre λ. On voit immédiatement que le nombre des arbitraires restantes peut être augmenté au delà de toute limite : si l'on désigne en effet par n un entier positif aussi grand qu'on le voudra, et par x_0 une valeur initiale de x choisie comme on voudra, toute fonction arbitraire, $\Phi(x, y, z, \ldots, t)$, des p variables $x, y, z, \ldots, t$ peut être mise sous la forme

$$\psi_0(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)\psi_1(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)^2\psi_2(y, z, \ldots, t) + \ldots \\ + (x - x_0)^{n-1}\psi_{n-1}(y, z, \ldots, t) + (x - x_0)^n\Psi(x, y, z, \ldots, t),$$

où figurent, avec une arbitraire de genre p,

$$(4) \qquad \Psi(x, y, z, \ldots, t),$$

n arbitraires de genre $p - 1$,

$$(5) \qquad \begin{cases} \psi_0(y, z, \ldots, t), & \psi_1(y, z, \ldots, t), \\ \psi_2(y, z, \ldots, t), \quad \ldots, & \psi_{n-1}(y, z, \ldots, t); \end{cases}$$

en conséquence, la donnée de la fonction arbitraire

$$\Phi(x, y, z, \ldots, t)$$

équivaut visiblement à celle des fonctions arbitraires (4) et (5).

Considérons maintenant un système différentiel quelconque; supposons-le réduit, de diverses manières, à une forme passive, et comparons, dans ces diverses formes, le nombre et la nature des éléments arbitraires que l'économie des conditions initiales met en évidence : il est clair, d'après ce qui précède, que les résultats intéressants d'une semblable comparaison ne peuvent se rapporter qu'aux valeurs prises, dans les formes considérées, par les entiers λ et μ. Cela étant, M. Riquier s'est proposé de rechercher s'il y avait effectivement sur ce point quelque loi générale, et cette étude l'a conduit à diverses propositions (*Acta mathematica*, 1902), dont l'une, notablement supérieure aux autres

en importance, se trouve exposée dans son Ouvrage; elle peut se formuler comme il suit :

Considérons d'abord deux systèmes passifs, S', S''; désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement, et convenons de dire que les formes passives S', S'' ont un *degré de généralité égal*, si les deux différences $\lambda'-\lambda''$, $\mu'-\mu''$ s'annulent à la fois; convenons de dire, dans le cas contraire, que la forme S' a un *degré de généralité supérieur* ou *inférieur* à celui de S'', suivant que, parmi ces deux différences, la première qui ne s'annule pas est positive ou négative.

Considérons d'autre part, en même temps qu'une forme passive, le groupe illimité des formules qui donnent la solution numérique générale de cette forme prolongée, et où les quantités principales se trouvent, comme nous l'avons vu dans la définition de la passivité, exprimées à l'aide des variables indépendantes et des quantités paramétriques. Cela étant, nous dirons qu'une forme passive est *ordinaire*, si, en attribuant à chacune des variables indépendantes une cote égale à 1, et à chacune des fonctions inconnues une cote convenablement choisie, les formules dont il s'agit satisfont toutes, sauf un nombre essentiellement limité d'entre elles, à la condition que les inconnues et dérivées figurant dans le second membre de chacune d'elles aient des cotes respectives au plus égales à celle du premier membre correspondant. Telles sont, par exemple, les formes complètement intégrables indiquées par l'auteur dans ses théorèmes d'existence.

Ces deux définitions étant posées, M. Riquier établit la proposition suivante :

Parmi toutes les formes passives sous lesquelles on peut mettre un système différentiel donné (non impossible), les formes passives ordinaires présentent un degré de généralité constant, qui se trouve être, de plus, supérieur ou égal à celui de toute autre.

Le lecteur ne peut manquer d'être frappé par l'importance, la généralité et la précision des résultats obtenus par M. Riquier.

MÉLANGES.

TRANSFORMATION D'UN DÉTERMINANT INFINI EN UN DÉTERMINANT DE FREDHOLM;

Par M. J. MARTY.

Dans ce qui va suivre, nous considérerons des quantités

$$f_{pq} \qquad [(p, q) = 1, 2, \ldots, \infty]$$

telles que la série

$$F = \sum f_{pq}$$

soit absolument convergente et, d'autre part, un système de fonctions bornées

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions d'orthogonalité

$$\int_0^1 f_p(x) f_q(x)\, dx = \begin{cases} 0 & p \neq q, \\ 1 & p = q. \end{cases}$$

1. Soient

$$\alpha_{ip}, \qquad \beta_{qj} \qquad [(p, q) = 1, 2, \ldots, \infty, \; (i, j) = 1, 2, \ldots, n]$$

des quantités inférieures en module à un nombre fixe, et soit

$$(1) \qquad D = \begin{vmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

un déterminant dont l'élément d_{ij}, de ligne i, de colonne j, est égal à la série double

$$\alpha_{ij} = \sum_{(p,q)=1}^{\infty} \alpha_{ip} f_{pq} \beta_{qj},$$

série absolument convergente, comme la série F.

D *est égal à la série* $(2n)^{uple}$

$$(2)\quad \Delta = \sum_{\left(\substack{p_1<p_2<\ldots<p_n \\ q_1<q_2<\ldots<q_n}\right)=1}^{\infty} \begin{vmatrix} \alpha_{1p_1} & \ldots & \alpha_{1p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{np_1} & \ldots & \alpha_{np_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_{p_1q_1} & \ldots & f_{p_1q_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{p_nq_1} & \ldots & f_{p_nq_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{q_11} & \ldots & \beta_{q_1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{q_n1} & \ldots & \beta_{q_nn} \end{vmatrix}.$$

Cette série est, en effet, absolument convergente; il suffit de le montrer pour la série

$$s = \sum \begin{vmatrix} f_{p_1q_1} & \ldots & f_{p_1q_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{p_nq_1} & \ldots & f_{p_nq_n} \end{vmatrix},$$

ou encore pour la série σ des modules des termes de tous les déterminants de s,

$$\sigma = \sum |f_{p_1\rho_1} f_{p_2\rho_2} \cdots f_{p_n\rho_n}|,$$

termes pour lesquels $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ et $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n$ est une permutation quelconque de $q_1 q_2 \ldots q_n$; tous ces termes sont différents, et si, de plus, on limite σ à σ_N, somme des termes pour lesquels p et q sont inférieurs à un nombre naturel N arbitraire, chaque terme est contenu avec le coefficient $n!$ dans le développement de

$$(|f_{11}| + |f_{12}| + \ldots + |f_{NN}|)^N,$$

expression inférieure à φ^n, φ désignant la somme

$$\varphi = \sum |f_{pq}|.$$

On voit donc que

$$\sigma_N < \frac{\varphi^n}{n!};$$

quand N augmente indéfiniment, σ_N a une limite; la série σ est donc convergente, il en est de même pour la série Δ; mais alors, si nous considérons Δ_N et D_N valeurs respectives de Δ et D quand on suppose que les indices p et q ne varient que de 1 à N, on voit aisément que

$$\Delta_N = D_N;$$

en faisant croître N indéfiniment et tenant compte de la convergence absolue démontrée, on en déduit

$$\Delta = D. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2. Posons

$$\mathrm{F}_{p_1 p_2 \ldots p_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} f_{p_1}(x_1) & \ldots & f_{p_n}(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_{p_1}(x_n) & \ldots & f_{p_n}(x_n) \end{vmatrix};$$

nous supposerons ensuite $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ et nous considérerons la quantité

$$f_{\substack{p_1 p_2 \ldots p_n \\ q_1 q_2 \ldots q_n}} = \underbrace{\int_0^1 \cdot \cdot \int_0^1}_{n} \mathrm{F}_{p_1 p_2 \ldots p_n} \mathrm{F}_{q_1 q_2 \ldots q_n} d(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n);$$

le produit des deux déterminants sous le signe d'intégration sera composé de termes de la forme

$$f_{p_{i_1}}(x_1) f_{p_{i_2}}(x_2) \ldots f_{p_{i_n}}(x_n) f_{q_{i_1}}(x_1) \ldots f_{q_{i_n}}(x_n),$$

et l'on pourra remplacer l'intégrale n^{uple} relative à ce terme par un produit d'intégrales simples

$$\lambda_i = \int_0^1 f_{p_i}(x_i) f_{q_i}(x_i)\, dx_i;$$

supposons qu'un des p soit différent de l'un des q, on aura $\lambda_i = 0$; si donc l'ensemble des q n'est pas identique à l'ensemble des p, il ne sera pas possible d'avoir des termes non nuls et, nécessairement,

(3) $$f_{\substack{p_1 p_2 \ldots p_n \\ q_1 q_2 \ldots q_n}} = 0.$$

Si $p_1, p_2, \ldots, p_n = q_1, q_2, \ldots, q_n$, on aura

$$f_{\substack{p_1 p_2 \ldots p_n \\ p_1 p_2 \ldots p_n}} = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} (\mathrm{F}_{p_1 p_2 \ldots p_n})^2\, d(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

et les seuls termes non nuls seront les intégrales des carrés des termes du déterminant, donc

(3) $$f_{\substack{p_1 p_2 \ldots p_n \\ p_1 p_2 \ldots p_n}} = n!$$

3. Supposons alors que, dans la formule (2), nous posions

$$\alpha_{ip} = f_p(x_i) \qquad \text{et} \qquad \beta_{qj} = f_q(x_j);$$

la série $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ obtenue sera uniformément convergente et l'on pourra l'intégrer terme à terme. En tenant compte des formules (3), on voit qu'on obtiendra par cette intégration

$$\underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= n! \sum_{(p_1<p_2<\ldots<p_n)=1}^{\infty} \begin{vmatrix} f_{p_1p_1} & \cdots & f_{p_1p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{p_np_1} & \cdots & f_{p_np_n} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'autre part, d'après la formule (1) et si nous posons

$$f(x, y) = \sum_{(p,q)=1}^{\infty} f_{pq} f_p(x) f_q(y),$$

on aura

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & \ldots & f(x_1, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n, x_1) & \ldots & f(x_n, x_n) \end{vmatrix},$$

et l'on a

$$(4) \quad \sum_{(p_1<p_2<\ldots<p_n)=1}^{\infty} \begin{vmatrix} f_{p_1p_1} & \cdots & f_{p_1p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{p_np_1} & \cdots & f_{p_np_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{n!} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} \begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & \ldots & f(x_1, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f(x_n, x_1) & \ldots & f(x_n, x_n) \end{vmatrix} d(x_1, \ldots, x_n).$$

Or, le déterminant infini

$$\begin{vmatrix} 1 + f_{11} & f_{12} & \cdots \\ f_{21} & 1 + f_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

est égal à

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_{ii} + \sum_{(i<j)=1}^{\infty} \begin{vmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{vmatrix} + \ldots,$$

et, d'après la formule (4), il se transformera en

$$1 + \int_0^1 f(x_1, x_1)\, dx_1 + \frac{1}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & f(x_1, x_2) \\ f(x_2, x_1) & f(x_2, x_2) \end{vmatrix} d(x_1, x_2) + \ldots,$$

ce qui est le déterminant de Fredholm relatif à la fonction $f(x, y)$.

Un déterminant infini normal[1] *est égal au déterminant de Fredholm d'une fonction qui aurait pour coefficients de Fourier relatifs à un système orthogonal quelconque les termes du déterminant infini.*

Remarque. — On peut d'une manière analogue trouver la relation entre les mineurs d'un déterminant infini et les coefficients du développement d'un mineur de Fredholm suivant certain système de fonctions; on peut aussi remarquer que si l'on ramène, comme le fait M. Hilbert, la résolution d'une équation intégrale linéaire à celle d'un système d'un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, la méthode de résolution de von Koch pour ce dernier système serait identique à celle de Fredholm pour l'équation intégrale.

---

(1) Le théorème est vrai pour une classe de déterminants plus étendue que celle des déterminants normaux [en particulier pour ceux que considère von Koch dans les *Rendiconti di Palermo* (1909)], mais la démonstration exige des considérations un peu moins élémentaires.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXIII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXIII; 1909. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXIII.

44950 Paris. Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BROCARD, GOURSAT, G. KŒNIGS,
LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXIII. — ANNÉE 1909.

(XLIVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. In-4° (¹).

Tome XVI (suite).

Kapteyn (*J.-C.*). — Sur la densité d'étoiles moyennes à des distances différentes du système solaire. (600-609).

Schoute (*P.-H.*). — Sur les réseaux quadridimensionaux et leurs sections tridimensionales. (Seconde Partie). (623-635, 2 pl.).

Le réseau (C_8).

1. Le problème de la construction de la section du réseau (C_8) par un espace donné consiste en deux parties. La première partie s'occupe de la question, comment un faisceau d'espaces parallèles à l'espace donné coupe une cellule C_8 déterminée; la seconde partie fait voir comment la section des autres cellules C_8 coupées par l'espace donné se déduit de la section trouvée dans la première Partie. Il va sans dire qu'on doit étudier d'abord les sections avec les quatre faisceaux d'espaces parallèles normaux à un des quatre axes d'espèces différentes; de ces sections on considère, à côté des *sections de transition,* où l'espace contient un ou plusieurs sommets de la cellule C_8 de la première Partie, entre chaque couple de sections de transition, la *section intermédiaire* avec l'espace qui bissecte la distance des espaces de ces deux sections de transition.

(¹) Voir *Bulletin,* t. XXXII_2, p. 150.

Dans la première Partie de cette étude, chacune des cellules C_{16} et C_{24} des réseaux (C_{16}) et (C_{24}) a été emballée dans une cellule C_8 minima aux arêtes parallèles aux axes des coordonnées, avec l'intention de lier ensuite les sections des réseaux (C_{16}) et (C_{24}) à celles du réseau (C_8), en coupant avec chaque C_{16} et C_{24} cette boîte minima qui l'enferme. Cela exige qu'on étudie, à côté des quatre séries de sections principales, celles par les deux faisceaux d'espaces parallèles normaux aux deux droites joignant l'origine aux points (3, 1, 1, 1) et (2, 1, 1, 0).

Pour faciliter la résumption des résultats, l'auteur a disposé les sections d'une cellule C_8 déterminée, obtenues à l'aide des six faisceaux d'espaces parallèles, en deux planches. La première donne la projection des sommets, des arêtes, des faces et des espaces limitants de C_8 sur le diamètre normal aux espaces sécants, ce qui permet d'en déduire immédiatement les caractères des sections d'une manière tabulaire; la seconde fait connaître ces sections elles-mêmes en perspective parallèle.

2. Le cas (1, 1, 1, 1), où les espaces sécants sont normaux à la diagonale.
3. Les trois autres cas principaux (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0).
4. Le cas (3, 1, 1, 1).
5. Le cas (2, 1, 1, 0).

Les Parties suivantes traiteront des sections des réseaux (C_{16}) et (C_{25}).

Kamerlingh Onnes (*H.*) et *Keesom* (*W.-H.*) — Sur l'équation d'état d'une substance à proximité du point critique fluide-gaz. (659-678, 2 pl.).

I. La fonction perturbatrice à proximité de l'état critique.

II. Recherche spectroscopique de l'opalescence d'une substance à proximité de l'état critique.

Schoute (*P.-H.*). — Sur les sections du réseau des polytopes de mesure M_n de l'espace E_n par un espace E_{n-1} perpendiculaire à une diagonale. (699-709).

1. Dans le plan E_2 le simplexe régulier, le triangle équilatéral, forme, à lui seul ou avec quelques autres polygones réguliers, un réseau; dans l'espace E_3 le simplexe régulier, le tétraèdre, forme un réseau en combinaison avec l'octaèdre. En E_4 le simplexe régulier, la cellule C_5, ne forme plus un réseau, avec quelques-uns des autres polytopes réguliers. Quels sont les polytopes, tant soit peu réguliers, capables de remplir avec C_5 l'espace E_4?

2. Considérons le réseau (M_5) des polytopes de mesure M_5 de l'espace E_5 et coupons-le par un espace E_4 normal à une diagonale d'une des cellules M_5 et détachant de ce polytope de mesure une pyramide régulière; alors la section de l'E_4 avec cette M_5 est une cellule régulière C_5 et le réseau d'intersection de l'E_4 avec le réseau des M_5 fournit la réponse à la question posée. Ainsi l'on trouve :

3. *Si l'on veut remplir l'espace* E_4 *par des cellules* C_5 *d'une même longueur d'arête et une seule espèce d'autres polytopes, on doit prendre la forme* (10, 30, 30, 10) *à dix sommets, trente arêtes, trente faces, dix espaces*

limitants; si la cellule C_5 *est une* $C_5^{(2\sqrt{2})}$, *ce polytope nouveau s'obtient en tronquant une* $C_5^{(4\sqrt{2})}$ *aux sommets, jusqu'aux points milieux des arêtes. Si l'on admet deux formes différentes, on doit prendre les deux formes*

$$(20, 40, 30, 10) \quad \textit{et} \quad (30, 60, 40, 10)$$

qu'on obtient en tronquant respectivement une $C_5^{(3\sqrt{2})}$ *et une* $C_5^{(5\sqrt{2})}$ *aux sommets, jusqu'à* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{2}{5}$ *des arêtes. Même on obtient facilement un réseau composé de* C_5 *et de quatre formes complétantes.*

4. Considérations générales sur le problème :

Un bloc de p^n *polytopes de mesure* $M_n^{(1)}$ *de l'espace* E_n *formant ensemble un* $M_n^{(p)}$ *est coupé par un espace* E_{n-1} *normal à une diagonale de* $M_n^{(p)}$; *on veut déterminer la forme des différentes pièces de la section et évaluer leurs nombres.*

5. Exemple en E_{10} :

Si par S_k *on représente la section du polytope de mesure* $M_{10}^{(1)}$ *par un espace* E_9 *normal à une diagonale* AA′ *en un point* P, *pour lequel*

$$k\,AA' = 10\,AP,$$

on trouve :

La section centrale du polytope de mesure $M_{10}^{(1)}$, *divisé en* 10^{10} *polytopes* $M_{10}^{(1)}$, *se compose de*

$$\begin{aligned}394\,713\,550\,(S_1 + S_9) + 410\,820\,025\,(S_2 + S_8) + 422\,709\,100\,(S_3 + S_7)\\ + 430\,000\,450\,(S_4 + S_6) + 432\,457\,640\,(S_5);\end{aligned}$$

ici les couples de symboles S_q *et* S_{10-q} *représentent des formes égales d'orientation opposée.*

A l'aide des relations de volume

$$\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{502} = \frac{S_3}{14\,608} = \frac{S_4}{88\,234} = \frac{S_5}{156\,190} = \frac{R}{9!},$$

où R représente le rhombotope formant la section entière de M_{10}^{10}, on retombe en effet, sur la relation identique

$$S_5^{(10)} = 10^9\,S_5^{(1)}.$$

Van der Stok (J.-P.). — L'analyse des courbes de fréquence d'après une méthode générale. (825-843).

Dans la statistique de la climatologie, on a affaire à des fréquences de toute description. Pour la plupart elles se trouvent entre des limites indéfinies. Quelquefois, au contraire, les limites sont finies, comme dans les observations du degré de nébulosité (0 — 10); dans le cas des fréquences des grosses pluies, on trouve de l'un des deux côtés la limite zéro, tandis que l'autre limite est indéterminée. Les observations des vents exigent des fréquences en deux directions, etc.

Pour les fréquences à limites indéfinies, le développement en série d'après les formules de Bruns et de Charlier est, à ce qu'il semble, la forme indiquée d'analyse; seulement la déduction, se basant sur une généralisation de l'usage d'intégrales définies due à Bessel, n'est pas encore tout à fait indépendante de prémisses un peu étrangères au problème; de plus, elles n'est pas applicable au cas de limites indéterminées. Les formules de Pearson et de Charlier ne contiennent qu'un nombre déterminé de constantes et ne sont pas données en forme de série.

Le but de la Communication de l'auteur est de faire connaître une méthode simple générale.

Van der Waals Jr. (*J.-D.*). — La valeur de l'auto-induction d'après la théorie des électrons. (867-871).

Pour donner une explication de l'existence d'énergie de mouvement chez les électrons, on s'en rapporte quelquefois à l'auto-induction. Seulement, il ne faut pas perdre de vue : 1° que cetté énergie de mouvement consiste pour la plus grande partie en énergie électrique, tandis que, dans le cas de l'auto-induction, on ne s'occupe que de l'énergie magnétique; 2° ce qui est plus grave encore, que, dans la théorie, précisément l'auto-induction doit être expliquée à l'aide de l'énergie cinétique des électrons.

Considérations en rapport avec ces difficultés.

De Vries (*J.*). — Sur des courbes gauches du genre 2. (871-876).

1. Une courbe du genre *deux* ne porte qu'une involution unique I_2 de couples de points.

2. Le lieu des droites qui supportent les couples de points de cette involution I_2 de la courbe gauche ρ^n de genre *deux* est une surface réglée Φ^{n-3} de l'ordre $n-3$ et du genre *zéro*, admettant une courbe double de l'ordre

$$\tfrac{1}{2}(n-4)(n-5).$$

3. Pour ρ^5, cette surface d'involution est un hyperboloïde ou un cône quadratique.

4, 5. Étude du cas ρ^6; cette courbe du genre *deux* admet une quadrisécante; elle est l'arête de rebroussement d'une surface développable S^{14}; le lieu de ses trisécantes est une surface réglée Φ^{12}, etc.

De Vries (*J.*). — Courbes gauches algébriques sur ces surfaces réglées de l'ordre n à droite $(n-1)^{\text{uple}}$. (876-878).

1, 2. Si l'on coupe une surface réglée Φ^3 par un faisceau de plans dont une des génératrices a de Φ^3 est l'axe, on obtient un système de coniques passant par le point de rencontre O de a et de la droite double d de Φ^3. A l'aide d'une correspondance (p, q) entre les plans du faisceau (a) et ceux du faisceau (d), on fait correspondre à chaque conique p génératrices g de Φ^3 et à chaque génératrice q coniques c^2. Le lieu des points d'intersection des g et c^2 corres-

pondantes est une courbe gauche ρ^m de l'ordre

$$m = p + q.$$

3. Le genre de cette courbe est

$$(m-1)(q-1) - \tfrac{3}{2}q(q-1).$$

4. Extension de ces considérations en remplaçant la surface Φ^3 à droite double par une surface Φ^n à droite $(n-1)^{\text{uple}}$. Alors la correspondance engendre une courbe ρ^m de l'ordre

$$m = p + q$$

et du genre

$$(m-1)(q-1) - \tfrac{1}{2}nq(q-1), \quad \ldots.$$

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXVIII; 1905 (¹).

Hensel (*K.*). — Sur un nouveau fondement de la théorie des nombres algébriques. (1-32).

Ce Mémoire a pour but d'étendre à la théorie des nombres algébriques dans le domaine d'un nombre premier p les méthodes et les résultats d'un Mémoire précédent (même Journal, t. 127, p. 51-84) relatifs aux nombres rationnels. La théorie sera, dans un Mémoire ultérieur, étendue à la recherche des unités algébriques.

1. Un nombre algébrique α est dit *algébrique entier dans le domaine du nombre premier* p (ou *modulo* p), s'il satisfait à une équation algébrique entière à coefficients numériques entiers, le coefficient de la plus haute puissance de x étant premier avec p. L'ensemble des fonctions rationnelles de α à coefficients numériques rationnels constitue le corps $K(1, \alpha)$ correspondant à α. Un nombre β de ce corps est dit *divisible par une puissance entière ou fractionnaire* p^δ *de* p, si le quotient $\frac{\beta}{p^\delta}$ est un nombre algébrique entier (modulo p). Il existe toujours un exposant δ_0 tel que β soit divisible par p^{δ_0}, mais ne soit divisible par aucune puissance p^δ à exposant δ supérieur à δ_0.

Si l'équation irréductible à laquelle satisfait α est de degré n, il est toujours possible de trouver, dans le corps $K(1, \alpha)$, n nombres algébriques entiers $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, ..., $\gamma^{(n)}$, tels que tout nombre algébrique entier (modulo p) de $K(1, \alpha)$ puisse être représenté, d'une manière et d'une seule, sous la forme

$$(1) \qquad \gamma = c_1\gamma^{(1)} + c_2\gamma^{(2)} + \ldots + c_n\gamma^{(n)},$$

les coefficients $c_1, \ldots, c_n$ étant des nombres rationnels entiers (modulo p), c'est-à-dire des nombres rationnels dont les dénominateurs sont premiers avec p.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 49.

2. Dans le Mémoire précédent auquel il a été fait allusion tout à l'heure, l'auteur a étendu le domaine des nombres entiers et positifs par l'adjonction de nombres nouveaux représentés par des séries (formelles) en général indéfinies,

$$A = a_\rho p^\rho + a_{\rho+1} p^{\rho+1} + \ldots,$$

où ρ désigne un entier, positif, nul ou négatif quelconque, les coefficients a_i étant des nombres bien définis de la suite $0, 1, 2, \ldots p-1$. On obtient ainsi un ensemble de nombres $K(p)$, qui peuvent s'ajouter, se retrancher, se multiplier et se diviser et qui contiennent, comme cas particulier, les nombres rationnels ordinaires, positifs ou négatifs, en prenant une suite *périodique* simple ou mixte de coefficients $a_\rho, a_{\rho+1}, a_{\rho+2}, \ldots$.

Cela étant, on désignera par $K(\alpha, p)$ l'ensemble des fonctions rationnelles de α à coefficients numériques appartenant à $K(p)$. Chaque quantité du nouveau corps $K(\alpha, p)$ peut être représentée par un développement en série formelle procédant suivant les puissances croissantes de p, les coefficients étant pris parmi p^n nombres algébriques entiers *réduits* de $K(\alpha, 1)$, par exemple ceux qu'on obtient dans la formule (1) en donnant aux c_i les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Les nombres de $K(\alpha, p)$ sont susceptibles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division comme ceux de $K(p)$.

3. Si l'équation irréductible de degré n à laquelle satisfait α est irréductible, non seulement dans le domaine $K(1)$, mais encore dans le domaine $K(p)$, ce dont on peut s'assurer par un nombre fini d'essais, toute quantité du domaine $K(\alpha, p)$ satisfait à une équation de degré n dont le premier membre est, dans le domaine $K(p)$, ou bien irréductible, ou bien une puissance d'un polynome irréductible. En particulier ce premier membre est congru (modulo p) à une puissance d'une fonction rationnelle entière à coefficients entiers, irréductible $(\text{mod}\, p)$.

4. On appelle *unité* dans le domaine de p tout nombre algébrique entier tel que son inverse soit également algébrique entier (modulo p).

Supposons toujours l'équation de degré n à laquelle satisfait α irréductible dans le domaine $K(p)$. Alors, pour qu'un nombre γ du domaine $K(\alpha, p)$ soit une unité, il faut et il suffit qu'il ne soit divisible par aucune puissance de p à exposant entier ou fractionnaire, positif ou négatif. S'il n'en est pas ainsi, le dénominateur de l'exposant de la puissance par laquelle γ est divisible est un diviseur de n.

Soit π un des nombres algébriques entiers du domaine $K(\alpha, p)$ qui soient divisibles par la plus petite puissance de p; l'exposant de cette puissance est de la forme $\frac{1}{e}$, e étant un diviseur de n. Tout nombre β du domaine $K(\alpha, p)$ peut alors se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\beta = \pi^d \varepsilon$, d désignant un exposant entier et ε une unité appartenant à $K(\alpha, p)$. L'exposant d s'appelle l'*ordre* de β. Le nombre premier p lui-même possède l'ordre e.

Ce nombre π a le caractère d'un nombre premier, car le produit $\beta\beta'$ de deux nombres du corps $K(\alpha, p)$ n'est manifestement divisible par π que si l'un des facteurs l'est.

Parmi les p^n nombres algébriques entiers *réduits* du corps $K(\alpha, 1)$ il y en a un certain nombre, soit σ, qui sont incongrus $(\text{mod}\, \pi)$. Tout nombre du corps $K(\alpha, p)$ peut alors, d'une manière et d'une seule, être développée en série for-

melle procédant suivant les puissances croissantes de n et dont les coefficients sont pris parmi ces σ nombres *réduits*.

5. La valeur de l'entier σ est facile à déterminer; si l'on pose $n = ef$, on a $\sigma = p^f$. On a de plus la congruence

$$x^{p^f} - x \equiv \prod_{k=0}^{k=p^f-1} (x - \varepsilon^{(k)}) \pmod{\pi},$$

en désignant par $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(\sigma-1)}$ les $\sigma = p^f$ nombres réduits. D'autre part on a, comme on sait,

$$x^{p^f} - x \equiv \prod g_d(x) \pmod{p},$$

le produit du second membre étant étendu à toutes les fonctions irréductibles (mod p), incongrues entre elles, et dont le degré d est un diviseur de f. D'après cela, pour qu'une congruence de degré d, irréductible (mod p), admette (mod π) une racine du corps $K(\alpha, p)$, il faut et il suffit que d soit un diviseur de f; dans ce cas elle en admet exactement d.

Si l'on prend en particulier une congruence de degré f, irréductible (mod p), soit

$$g(x) \equiv 0,$$

et si l'on désigne par ε un des nombres du corps $K(\alpha, p)$ qui rendent $g(x) \equiv 0$ (mod π), les $\sigma = p^f$ nombres algébriques

$$c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \ldots + c_{f-1}\varepsilon^{f-1} \qquad (c_i = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

sont tous incongrus (mod π). On peut alors les prendre comme nombres *réduits*. Tout nombre réduit de $K(\alpha, p)$ sera donc une fonction entière de ε, de degré inférieur à f et dont les coefficients sont pris dans la suite $0, 1, \ldots, p-1$. On pourra par suite désigner le corps $K(\alpha, p)$ par le symbole $K(\varepsilon, \pi)$.

6. Considérons maintenant une équation algébrique entière $F(y) = 0$ de degré n *dont les coefficients appartiennent au domaine* $K(p)$ et qui soit irréductible dans ce domaine. Alors il existe un domaine convenablement choisi $K(\varepsilon, \pi)$, défini comme il a été dit plus haut [en partant d'une équation à coefficients rationnels irréductible dans le domaine $K(p)$], et tel que l'équation $F(y) = 0$ admette une racine appartenant au domaine $K(\varepsilon, \pi)$; elle admet en outre $n-1$ autres racines appartenant respectivement aux $n-1$ domaines *conjugués* de $K(\varepsilon, \pi)$.

Plus généralement *toute équation à coefficients entiers possède dans le domaine de p autant de racines que l'indique son degré, et ces racines s'ordonnent en autant de cycles de racines conjuguées que son premier membre admet de facteurs irréductibles dans le domaine* $K(p)$.

7. Les nombres algébriques ε et π qui servent à définir le domaine $K(\varepsilon, \pi)$ peuvent être choisis d'une infinité de manières. On peut toujours faire en sorte :

1° Que ε soit *racine* d'une équation à coefficients entiers de degré f, irréductible (mod p);

2° Que π soit *racine* d'une équation irréductible de degré e

$$\pi^e + pc_{e-1}\pi^{e-1} + \ldots + pc_0 = 0,$$

où les c_i sont des nombres entiers déterminés de $K(\varepsilon)$ et où c_0 n'est pas divisible par p.

Il est bon de remarquer que le nombre π choisi ainsi ne fait plus nécessairement partie du domaine $K(\alpha, 1)$.

Thomé (L.-W.). — Sur une application au calcul des variations de la théorie des équations différentielles linéaires. (33-44).

Dans un Mémoire ayant le même titre et paru au Tome 125 du même Journal (p. 1-27), l'auteur avait considéré l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx,$$

où f est une fonction réelle de $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Remplaçons y par $y + \varepsilon z$, ε étant un paramètre infiniment petit, z une fonction réelle quelconque de x, qui reste, ainsi que ses $2n$ premières dérivées, finie et continue dans l'intervalle (a, b) et qui s'annule pour $x = a$ et $x = b$ ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées. En exprimant que la variation première de l'intégrale est nulle pour $\varepsilon = 0$, on obtient pour y une équation différentielle linéaire d'ordre $2n$. Si l'on prend pour y une solution de cette équation prenant pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs données à l'avance ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées, l'intégrale définie passe, *si y et f satisfont à des conditions nettement précisées*, par un maximum ou par un minimum pour $\varepsilon = 0$, en supposant toutefois que la fonction arbitraire z soit soumise à certaines restrictions, entre autres d'être nulle dans un certain nombre fini d'intervalles partiels situés à l'intérieur de (a, b). Dans le Mémoire actuel l'auteur lève une grande partie de ces restrictions.

Mirimanoff. — L'équation indéterminée $x^l + y^l + z^l = 0$ et le criterium de *Kummer*. (45-68).

L'auteur revient sur la méthode exposée par Kummer en 1857 (*Abh. der Akad. der Wiss. zu Berlin*) pour étudier les solutions de l'équation

$$(1) \qquad x^l + y^l + z^l = 0 \qquad (l \text{ premier}),$$

pour lesquelles x, y et z sont trois entiers premiers à l.

I. Considérons les polynomes $P_i(x, y)$ entiers et homogènes de degré i en x, y, définis par l'égalité

$$\left[\frac{d^i \log(x + e^v y)}{dv^i}\right]_{v=0} = \frac{P_i(x, y)}{(x + y)^i}.$$

Kummer a démontré que si l'équation (1) admet une solution $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, α, β, γ étant trois entiers premiers à l, chacun des six couples α, β; β, α; ..., vérifie les $\frac{l-3}{2}$ congruences

$$B_{\frac{l-i}{2}} P_i(x, y) \equiv 0 \qquad [(\text{mod}\, l) \quad (i = 3, 5, \ldots, l-2)].$$

Dans ces congruences B_k désigne le $k^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Si l'on pose

$$P_i(t) = P_i(1, t),$$

les congruences

(2) $$B_{\frac{l-i}{2}} P_i(t) = 0 \pmod{l}$$

sont vérifiées par les six rapports mutuels de deux des nombres α, β, γ. Ces six racines des congruences (2), si τ est l'une d'entre elles, sont

$$\tau, \quad \frac{1}{\tau}, \quad -1-\tau, \quad -\frac{1}{1-\tau}, \quad -1-\frac{1}{\tau}, \quad -\frac{\tau}{1+\tau}.$$

Elles forment un groupe incomplet :

1° Lorsque τ est congru à 0 ou à -1;

2° Lorsque τ est racine de $t^2 + t + 1 \equiv 0$;

3° Lorsque τ est congru à $1, -2$ ou $-\frac{1}{2}$;

dans tous les autres cas elles forment un groupe complet.

En posant $\frac{l-1}{2} = \nu$ et en se bornant aux valeurs de $i \leqq 9$, on a les quatre congruences suivantes

$$B_{\nu-\varkappa} P_{2\varkappa+1}(t) \equiv 0 \quad [\pmod{l} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)].$$

En se bornant à considérer ces quatre congruences, on arrive à la conclusion suivante :

L'équation (1) est impossible en nombres entiers premiers à l, si l'un au moins des nombres de Bernoulli $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$, $B_{\nu-3}$, $B_{\nu-4}$, n'est pas divisible par l.

On savait déjà que l'équation (1) est impossible pour $l < 223$; le théorème précédent, joint au criterium de Legendre, permet d'étendre cette conclusion à toutes les valeurs de l inférieures à 257.

II. On peut substituer à la considération des polynomes $P(t)$ celle d'autres polynomes plus commodes. Ce sont les suivants :

$$\varphi_i(t) = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=l-1} (-1)^{\varkappa-1} \varkappa^{i-1} t^{\varkappa} \equiv (1+t)^{l-i} P_i(t) \qquad (i = 2, 3, \ldots, l-1),$$

$$\varphi_1(t) = \frac{t(1-t^{l-1})}{1+t} \equiv P_l(t).$$

A ces polynomes on peut adjoindre les polynomes $\psi_i(t)$ définis par

$$\psi_i(t) = \varphi_i(-1-t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, l-1),$$

on a en particulier

$$\varphi_{l-1}(t) = \psi_{l-1}(t).$$

L'auteur étudie la formation des coefficients de ces polynomes, ainsi que les congruences $\varphi_i(t) \equiv 0$. En particulier la congruence $\varphi_{l-1}(t) \equiv 0$ n'admet pas de racines appartenant aux groupes complets pour $l < 23$.

III. Les congruences (2) de Kummer peuvent être remplacées par un autre système de congruences équivalent d'où sont éliminés tous les nombres de Ber-

noulli; c'est le suivant :

$$\varphi_{l-i}(t)\,\varphi_i(t) \equiv 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, \nu),$$
$$\varphi_{l-1}(t) \qquad \equiv 0.$$

En faisant en particulier $i = 3$, on voit que, pour $l < 29$, le rapport τ ne peut appartenir à un groupe complet.

Aucun des résultats ainsi déduits du criterium de Kummer ne s'applique donc à tous les l, et il est fort peu probable qu'on en puisse déduire un résultat essentiellement nouveau.

Meyer (*Eug.*). — Deux contributions à la théorie du maximum et du minimum des figures planes. (69-77).

Cet article contient, dans sa première Partie, des solutions élémentaires des théorèmes suivants :

De tous les triangles qui ont même base et même périmètre, c'est le triangle isoscèle qui a le plus grand angle au sommet.

De tous les triangles qui ont même base et même angle au sommet, c'est le triangle isoscèle qui a le plus grand périmètre.

De tous les triangles inscrits dans un cercle donné, c'est le triangle équilatéral qui a le plus grand périmètre.

De tous les triangles de périmètre donné, c'est le triangle équilatéral dont le cercle inscrit a le plus grand rayon et le cercle circonscrit le plus petit rayon.

De tous les triangles acutangles tels que le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs ait un périmètre donné, c'est la triangle équilatéral qui a la plus petite aire.

La seconde Partie traite d'un problème dont s'est occupé Steiner : « Étant donnés en grandeur un certain nombre de segments de droite a, b, c, ..., et une longueur p, combien y a-t-il de cercles tels que la somme des arcs de ces cercles sous-tendus par des cordes égales à a, b, c, ..., soit égale à p? »

Jung (*Heinrich*). — Un théorème sur les fonctions thêta. (78-86).

Il existe 4^n fonctions thêta de n variables du premier ordre. L'auteur démontre le théorème suivant :

On peut de plusieurs manières former 4^ν formes quadratiques de ces fonctions thêta, telles qu'entre ces 4^ν formes il existe les mêmes relations linéaires qu'entre les carrés des 4^ν fonctions thêta de ν variables.

Bauer (*Michael*). — Généralisation d'un théorème de *Schönemann*. (87-89).

Cet article contient la démonstration, au moyen de la théorie des nombres premiers idéaux, du théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction rationnelle entière de z à coefficients entiers irréductible (mod p), *le coefficient de la plus haute puissance de z étant* 1; *soient d'autre part t et α deux entiers premiers entre eux, et enfin soit* $\mathrm{M}(z)$ *un*

polynome entier en z à coefficients entiers, de degré inférieur à $f^t(z)$ et non divisible par $f(z)$ (mod p); alors l'équation

$$F(z) = f^t(z) + p^\alpha M(z) = 0$$

est irréductible.

La démonstration donnée montre que $F(z)$ est irréductible (mod $p^{\alpha+1}$). Le théorème de Schönemann correspond au cas $\alpha = 1$.

Hauck (Guido). — Théorie de l'homographie trilinéaire parallèle des figures planes. (91-167).

1. On considère trois plans S, S′, S″ et dans chacun d'eux deux faisceaux de rayons parallèles : P et Q, P′ et Q′, P″ et Q″. Ces six faisceaux se partagent en trois couples Q et P′, Q′ et P″, Q″ et P formé de deux faisceaux *semblables* et qui constituent ce qu'on appellera trois couples de faisceaux de base conjugués (gegnerische Kernstrahlenbüschel). On établit entre les points des trois plans une correspondance telle que si x, x', x'' sont trois points correspondants quelconques, deux quelconques d'entre eux se trouvent sur deux rayons homologues des deux faisceaux de base conjugués des deux plans correspondants. On dit alors que *les points des trois plans sont en relation homographique trilinéaire parallèle*.

Pour déterminer un triplet (x, x', x'') de l'homographie, on peut se donner arbitrairement le point x; le point x' est alors assujetti à la seule condition d'être sur un rayon déterminé du faisceau P′; x' étant choisi sur ce rayon, x'' est parfaitement déterminé par l'intersection d'un rayon de P″ et d'un rayon de Q″.

L'homographie trilinéaire parallèle établit aussi une correspondance entre les droites des trois plans. On peut se donner arbitrairement deux droites l et l' des deux plans S et S′; la droite l'' est bien déterminée. Sur un triplet de droites de l'homographie les points homologues décrivent des divisions semblables.

L'homographie est déterminée par les trois couples de faisceaux de base conjugués, c'est-à-dire en somme par les trois angles aigus ω, ω', ω'' que font entre eux dans chaque plan les rayons des deux faisceaux de base situés dans ce plan, et par les trois rapports ε_{01}, ε_{12}, ε_{20} des distances de deux couples de rayons de base correspondants dans les trois couples de faisceaux de base conjugués.

Ces six quantités ω, ω', ω'', ε_{01}, ε_{12}, ε_{20} déterminent en réalité deux homographies, dites *supplémentaires l'une de l'autre*.

2. Si l'on déplace les trois systèmes plans S, S′, S″ de manière à les placer tous sur un même plan, les trois systèmes sont dits *en orientation plane dans le sens large;* alors les rayons homologues de deux faisceaux de base conjugués se coupent suivant une droite fixe, qu'on appelle *axe* de l'homographie. L'homographie admet donc trois axes.

Si ces trois axes sont concourants, les systèmes sont dits en *orientation plane dans le sens étroit;* le point de concours des axes ou *sommet* constitue à lui seul un triplet de l'homographie.

Une homographie trilinéaire parallèle en orientation plane peut encore être définie de la manière suivante :

Si un hexagone plan se déforme de manière que ses côtés restent constam-

ment parallèles à eux-mêmes et que trois de ses sommets non contigus glissent sur des droites fixes, les trois autres sommets décrivent trois systèmes plans en homographie trilinéaire parallèle.

3. Deux homographies supplémentaires se distinguent par les caractères suivants relatifs aux positions de deux triplets :

Dans l'une (type A ou type obtus) les points de l'un des triplets sont ou tous les trois dans les angles obtus formés par les rayons de base qui passent par les points de l'autre triplet, ou un dans l'angle obtus, les deux autres dans les angles aigus.

Dans l'autre (type B ou type aigu) les points de l'un des triplets sont ou tous les trois dans les angles aigus formés par les rayons de base qui passent par les points de l'autre triplet, ou l'un dans un angle aigu, les deux autres dans les angles obtus.

4. Les trois systèmes S, S', S″ sont dits *orientés dans l'espace* si l'un des triplets de l'homographie est formé de trois points confondus; ce point unique s'appelle *sommet* et les rayons homologues de deux faisceaux de base conjugués se coupent suivant trois droites fixes issues du sommet et qu'on appelle les *axes*. Les trois axes forment ce qu'on appelle le *trièdre d'orientation*. Les trois systèmes donnés peuvent d'une infinité de manières être orientés dans l'espace.

Étant donnée une orientation particulière dans l'espace, si l'on considère un triplet quelconque (x, x', x'') de l'homographie, les trois *plans de base* (plans formés par les trois couples de rayons de base conjugués qui passent par x, x', x'') se coupent en un même point X. Les droites xX, x'X, x''X sont parallèles à trois directions *fixes*. Par suite *les points d'un triplet quelconque de l'homographie peuvent être regardés comme les projections sur leurs trois plans, parallèlement à trois directions fixes, d'un même point de l'espace.*

5. Lorsqu'on se donne X, les rayons Xx, Xx', Xx'' peuvent s'appeler les rayons *projetants;* inversement lorsqu'on se donne le triplet (x, x', x''), ces mêmes rayons peuvent être appelés les rayons *objectants*. Il existe plusieurs constructions linéaires de ces rayons objectants.

6. Si les trois systèmes sont en orientation *plane* (au sens étroit), les trois points x, x', x'' d'un même triplet peuvent encore être regardés comme les projections d'un même point X du plan. Le système des points X est dit la *résultante des systèmes des points x, x', x''*. Les trois points x, x', X constituent un triplet d'une nouvelle homographie trilinéaire parallèle, de même les points x', x'', X et les points x'', x, X.

A chaque orientation plane des systèmes S, S', S″ correspondent naturellement des directions différentes pour les rayons objectants.

7. On peut se proposer de chercher tous les triplets de droites sur lesquelles les points homologues forment des divisions *congruentes*. Si l'on a un triplet de droite satisfaisant à cette condition, tous les triplets de droites respectivement parallèles y satisfont également. Il existe alors quatre solutions essentiellement distinctes du problème.

8. Si l'on se donne un triplet particulier (a, a', a'') de l'homographie, trois droites homologues quelconques (ξ, ξ', ξ'') passant par ces trois points forment trois faisceaux. Si p, q ; p', q' ; p'', q'' sont les rayons de base qui passent par

les trois points a, a', a'', on a, entre les angles que font avec ces rayons trois rayons homologues des trois faisceaux, la relation

$$\frac{\sin(p, \xi)}{\sin(\xi, q)} \frac{\sin(p', \xi')}{\sin(\xi', q')} \frac{\sin(p'', \xi'')}{\sin(\xi'', q'')} = \frac{1}{\varepsilon_{01}\varepsilon_{12}\varepsilon_{20}}.$$

Il existe différentes manières de construire ξ'' connaissant ξ et ξ'.

9. Une homographie trilinéaire parallèle est déterminée par quatre triplets; les six faisceaux de base se construisent très simplement au moyen de ces quatre triplets. On peut déduire de là que trois quadrilatères plans quelconques peuvent toujours être regardés comme les projections parallèles d'un seul et même tétraèdre.

10. En appliquant la construction du paragraphe précédent, il peut arriver que dans un des trois systèmes S, S', S'' les directions des rayons des deux faisceaux de base coïncident; alors elles coïncident aussi dans les deux autres systèmes. On a alors une homographie *monobasique* (einzelkernig). C'est un cas particulier du type A ou *obtus*, défini par les relations

$$\omega = \omega' = \omega'' = 0,$$

$$\varepsilon_{01}\varepsilon_{12}\varepsilon_{20} = 1.$$

Cette homographie n'est plus complètement définie par les six faisceaux de base (qui ici se réduisent à trois). Si, par exemple, l'homographie a été amenée en orientation *plane* (au sens étroit), on peut se donner arbitrairement les directions des rayons objectants.

11. Les rayons de base qui passent par les trois points (x, x', x'') d'un même triplet, dans une homographie monobasique, forment un triangle. Ce triangle restant le même et les points (x, x', x'') du triplet variant sur les côtés de ce triangle, il existe entre les abscisses de ces trois points, comptées sur chaque côté à partir d'une origine fixe, une relation linéaire. On peut construire x'', connaissant x, x', de plusieurs manières, par exemple en se servant des rayons objectants; les directions de ces rayons sont connues lorsqu'on se donne trois triplets de points homologues.

En ce qui concerne les faisceaux de rayons homologues issus de trois points a, a', a'' d'un même triplet, dans l'homographie monobasique, on arrive à des relations qui ne rentrent pas dans le type général (n° 8). Désignons par p, p' p'' les rayons de base issus de a, a', a''; par u, v', w'' trois rayons issus de a, a', a'' et tels que chacun d'eux forme, avec les rayons perpendiculaires aux rayons de base n'appartenant pas au même système, un triplet de rayons de l'homographie. Si ξ, ξ', ξ'' forment un triplet quelconque de rayons issus de a, a', a'', on a la relation

$$\frac{\cot(p, \xi)}{\cot(p, u)} + \frac{\cot(p', \xi')}{\cot(p', v')} + \frac{\cot(p'', \xi'')}{\cot(p'', w'')} = 1.$$

12. Ce paragraphe s'occupe de différentes constructions permettant de déterminer une homographie monobasique lorsqu'on se donne quatre triplets de cette homographie (satisfaisant à une certaine condition).

13. Il existe une dégénérescence de l'homographie trilinéaire parallèle dans

laquelle un seul des angles ω, ω', ω'' est nul, soit ω''. Dans ce cas, les triplets de l'homographie peuvent être de deux espèces différentes :

Dans les triplets de la première espèce, x et x' décrivent deux figures affixes ; x étant donné, x' est bien déterminé et x'' peut être pris arbitrairement sur un des rayons du faisceau de base P″.

Dans les triplets de la deuxième espèce, x étant donné, x' est pris arbitrairement sur le rayon de base correspondant du faisceau P′ ; quant à x'', il est rejeté à l'infini dans la direction commune des rayons de P″.

On peut donner à cette homographie une orientation plane jouissant de propriétés particulières intéressantes.

14. Outre les homographies particulières dont il vient d'être question, il en est un certain nombre de remarquables et qui jouent un rôle important en Géométrie descriptive.

Si les faisceaux de base conjugués sont congruents, on a ce qu'on appelle l'homographie *orthogonale ;* si l'on considère les trois projections orthogonales d'un point arbitraire de l'espace sur trois plans donnés, ces trois projections constituent, dans ces trois plans, un triplet d'une homographie orthogonale. Cette homographie est dite en *orientation de Monge* si, des trois plans, deux sont rectangulaires.

15. L'homographie orthogonale est caractérisée par les relations

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{20} = 1.$$

En orientation plane arbitraire (au sens étroit) chaque axe est bissectrice de l'angle formé par deux rayons homologues des deux faisceaux de base conjugués correspondants.

L'orientation plane la plus simple est celle dans laquelle deux des trois couples de faisceaux de base conjugués jouissent de la propriété que deux rayons homologues coïncident. Dans chacun de ces couples l'axe est indéterminé, mais peut être pris perpendiculaire à la direction commune des rayons des deux faisceaux coïncidents du couple. On passe facilement de cette orientation plane à une orientation dans l'espace pour laquelle les trois points d'un même triplet sont les projections *orthogonales* d'un même point dans l'espace ; on dit dans ce cas qu'on a une *orientation orthogonale.* Néanmoins une orientation orthogonale *réelle* n'est pas toujours possible : il faut, pour qu'il en soit ainsi :

a. Dans le cas du type *obtus,* que chacun des angles ω, ω', ω'' soit inférieur à la somme des deux autres ;

b. Dans le cas du type *aigu,* que la somme des trois angles ω, ω', ω'' soit supérieure à deux droits.

Les homographies orthogonales qui ne sont pas susceptibles d'orientation orthogonale réelle sont dites plus particulièrement *pseudoorthogonales.*

Lorsqu'une homographie orthogonale a été amenée en orientation orthogonale, on obtient un triplet de droites à divisions congruentes issues du sommet en prenant les génératrices de contact des faces du trièdre d'orientation avec l'un des quatre cônes de révolution inscrits ou ex-inscrits dans ce trièdre. Dans chaque système les quatre directions obtenues font avec le même axe quatre angles déterminés ; ces quatre angles restent les mêmes pour un autre axe et un autre système. Cette propriété subsiste dans l'homographie pseudoorthogonale.

16. Si une homographie orthogonale est amenée en orientation plane d'une manière quelconque, deux des trois systèmes et le système résultant sont encore en homographie orthogonale.

17. Une homographie monobasique peut être en même temps orthogonale; il faut et il suffit pour cela que les perpendiculaires élevées aux rayons de base en trois points d'un triplet forment un triplet de droites de l'homographie. Dans ce cas on peut en général donner à l'homographie une orientation dans l'espace telle que les trois plans S, S′, S″ soient parallèles à une même droite, les trois points d'un triplet quelconque étant les projections orthogonales d'un même point de l'espace. Tout triplet de droites à divisions congruentes est formé de trois perpendiculaires aux trois directions des rayons de base.

Une homographie orthogonale monobasique n'est pas toujours susceptible d'une orientation orthogonale réelle.

18. Une homographie orthogonale susceptible d'une orientation orthogonale réelle, dans laquelle un des dièdres du trièdre d'orientation est droit, est dite *homographie de Monge*. Elle n'est possible que dans le type obtus A.

La relation qui doit exister entre les trois angles ω, ω', ω'' d'une homographie de Monge est de la forme

$$\cos\omega'' = \cos\omega \cos\omega'.$$

Si l'on veut que deux dièdres du trièdre d'orientation soient droits, il faut que deux des angles ω, ω', ω'' soient droits. Si, enfin, on veut que les trois dièdres soient droits, il faut que les trois angles ω, ω', ω'' soient droits; on a alors une *homographie de Monge trirectangle.*

Une homographie de Monge peut aussi être monobasique.

19. On obtient un cas particulier intéressant de l'homographie orthogonale en supposant que le sinus de l'un des angles ω, ω', ω'' soit égal au sinus de la somme des deux autres.

Si l'homographie est du type *aigu* B, elle reste susceptible d'une orientation orthogonale; seulement, si l'on rabat deux des faces du trièdre d'orientation sur la troisième, leur arête d'intersection se rabat suivant deux droites qui sont dans le prolongement l'une de l'autre.

Si l'homographie est du type *obtus* A, elle n'est plus susceptible d'orientation orthogonale. On peut alors donner à l'homographie une orientation plane telle que les trois points d'un triplet quelconque de cette homographie soient les sommets d'un triangle assujetti à la seule condition d'être semblable à un triangle donné; chaque point du plan peut être regardé comme constituant un triplet de trois points confondus.

On peut aussi orienter cette homographie dans l'espace de manière que les trois points d'un triplet quelconque soient les projections parallèles d'un même point de l'espace sur trois plans de projection parallèles; on peut même faire en sorte que ces trois plans de projection soient confondus. On dit dans ce cas que l'homographie est en orientation *complanaire.*

Une homographie susceptible d'orientation complanaire est dite *complanaire.*

Une homographie complanaire du type A ou du type B n'est jamais susceptible d'orientation orthogonale; elle est toujours susceptible d'une orientation plane dans laquelle les trois points d'un triplet forment les sommets d'un triangle semblable à lui-même, obtusangle ou acutangle.

Une homographie complanaire du type obtus peut être monobasique; en orientation complanaire, les trois points d'un triplet sont sur une même ligne droite parallèle à une droite fixe; le rapport de leurs distances mutuelles est constant.

Toute homographie trilinéaire parallèle peut être déduite d'une homographie complanaire en soumettant un ou deux des systèmes à une transformation affixe.

20. Revenons à un cas plus général que celui de l'homographie orthogonale, le cas où deux seulement des rapports ε_{01}, ε_{12}, ε_{20} sont égaux à l'unité. Soit

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = 1.$$

On peut toujours orienter les systèmes S, S', S'' de manière que le plan S soit perpendiculaire au plan S' et que de plus le rayon objectant xX soit perpendiculaire à S, les rayons x'X, x''X étant respectivement perpendiculaires aux arêtes d'intersection (S, S'), (S, S''). Si l'on veut que x' soit également projection orthogonale de X, il faut en outre que l'on ait

$$\varepsilon_{12} = \frac{\cos\omega \cos\omega'}{\cos\omega''}.$$

Si l'on a de plus

$$\cos\omega = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''},$$

le plan S'' est lui aussi perpendiculaire au plan S. On obtient, comme cas plus particulier encore, la *perspective militaire* en faisant $\omega'' = \omega$.

On peut encore obtenir la perspective militaire en prenant S'' confondu avec S; si l'on regarde S comme un plan vertical, S' comme un plan horizontal, on a la *perspective cavalière*.

21. Une homographie est dite *cartésienne* lorsqu'elle est susceptible d'une orientation *cartésienne*, c'est-à-dire lorsque les trois points d'un triplet sont les projections d'un point de l'espace sur les trois faces d'un trièdre, les projetantes étant parallèles aux arêtes de ce trièdre. Une telle homographie est définie par les relations

$$\varepsilon_{01} = \frac{\sin\omega}{\sin\omega'}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''}, \qquad \varepsilon_{20} = \frac{\sin\omega''}{\sin\omega}.$$

Une homographie cartésienne est dite *axonométrique* si l'on a en outre

$$\sin\omega'' = \sin(\omega + \omega').$$

Au contraire, elle est dite *rhomboédrique* si l'on a

$$\omega = \omega' = \omega''.$$

L'homographie de Monge trirectangle est une homographie rhomboédrique pour laquelle $\omega = \omega' = \omega'' =$ un droit.

L'homographie définie par

$$\omega = \omega' = \omega'' = \frac{\pi}{3}, \qquad \varepsilon_{01} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{20} = 1$$

est à la fois rhomboédrique, axonométrique, orthogonale et complanaire.

Jourdain (*Philip E.-B.*). — Sur la théorie générale des fonctions. (169-210).

Ce Mémoire contient une théorie du nombre cardinal de certains ensembles de fonctions, un essai de généralisation de la théorie des fonctions d'une variable réelle à un point de vue purement ordinal, enfin quelques formules d'interpolation relatives aux fonctions analytiques d'une variable complexe.

I. *La théorie cardinale des fonctions.* — Certaines classes de fonctions, comme les fonctions continues, les fonctions analytiques d'une variable réelle, admettent des *ensembles de définition*. Ainsi une fonction continue de la variable réelle x, dans un intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$, est complètement définie par les valeurs qu'elle prend pour un ensemble de valeurs x *dénombrable* et *partout dense* contenu dans l'intervalle (α, β) et comprenant les valeurs α et β; cet *ensemble de définition* est du type ordinal η. Au contraire, une fonction analytique de la variable réelle x dans le même intervalle est complètement définie par les valeurs qu'elle prend pour un ensemble dénombrable de valeurs de x, du type ordinal ω ou ${}^{*}\omega$, dont les éléments admettent un seul point limite situé dans l'intervalle.

Il est d'ailleurs bon de remarquer que l'ensemble de définition d'une fonction continue, par exemple, n'a de signification précise que lorsqu'on a spécifié la nature de l'ensemble pour lequel $f(x)$ doit être finalement défini; une fonction continue peut en effet être définie dans un ensemble qui n'est pas un intervalle.

De la notion d'ensemble de définition on peut facilement conclure que le nombre cardinal de l'ensemble des fonctions continues, aussi bien que de l'ensemble des fonctions analytiques d'une variable réelle, est

$$\mathfrak{C} = 2^{\aleph_0}.$$

Il en est de même pour l'ensemble des fonctions admettant un « théorème d'existence », ou, ce qui revient au même, des fonctions représentables analytiquement comme limite d'une suite dénombrable de fonctions continues.

Quant aux fonctions intégrables, le nombre cardinal de leur ensemble est plus élevé : il est égal à

$$\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}} = 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Une fonction intégrable n'est donc en général susceptible d'aucune représentation analytique.

Ce même nombre est encore le nombre cardinal de l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle, et aussi de toutes les fonctions de $\aleph_0$ variables; au contraire, le nombre cardinal de l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{C}$ variables est $\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}}} > \mathfrak{C}^{\mathfrak{C}}$.

II. *La théorie ordinale des fonctions.* — On peut donner une forme purement ordinale aux notions de fonction continue d'une variable réelle, de borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de nombres réels, de limite supérieure et limite inférieure d'un ensemble de nombres réels.

Ces notions peuvent être généralisées pour des ensembles quelconques simplement ordonnés. Si P et Q sont deux ensembles simplement ordonnés entre les éléments desquels on a établi une correspondance telle qu'à un élément

de P correspond un élément, et un seul, de Q, à un élément de Q correspond *au moins* un élément de P, on peut dire que l'ensemble Q constitue une *fonction* de l'ensemble P.

Cette fonction est *continue* à gauche pour un élément p_ω de P qui soit un élément limite de P, si à toute suite du type ω d'éléments

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_\nu, \quad \ldots,$$

appartenant à P et ayant p_ω pour limite unique, correspond dans Q une suite

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_\nu, \quad \ldots,$$

admettant une limite unique, à savoir celui des éléments de Q qui correspond à p_ω. On définit de même la continuité à droite. Q est continu pour p_ω s'il est continu à gauche et à droite.

Si Q est une fonction continue de P et si l'ensemble P est fermé, Q est fini ou fermé.

Si P est un ensemble parfait, si Q est une fonction continue de P, l'ensemble Q étant dense, cet ensemble Q est parfait.

Si P est du type η ou θ et si Q contient plus d'un élément, Q est lui aussi du type η ou θ.

Les notions de convergence uniforme, de dérivée, d'intégrale définie d'une fonction continue d'une variable réelle ne semblent pas pouvoir s'étendre à des ensembles simplement ordonnés quelconques, car elles ne sont pas purement ordinales. Mais les notions de limite inférieure et supérieure, à gauche et à droite, d'une fonction pour un élément x de la variable, le peuvent, ainsi que la notion de semi-continuité qui dérive des précédentes.

III. *Les ensembles de définition des fonctions analytiques uniformes d'une variable complexe.* — Cette troisième Partie contient la solution des trois problèmes suivants :

A. *Déterminer, dans le cas où elle existe, une fonction analytique $f(z)$ de la variable complexe z, régulière au point a, connaissant la suite*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_\nu, \quad \ldots$$

des valeurs que prend cette fonction pour une suite dénombrable de points

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

admettant a comme unique limite.

B. *Existe-t-il une fonction transcendante entière* $G(z)$ *prenant une succession (dénombrable)*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_\nu, \quad \ldots$$

de valeurs pour une suite dénombrable de points

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots$$

admettant pour unique limite l'infini et ne décroissant pas en valeur absolue?

C. *Dans le cas où le problème* B *est possible, quelle est la forme la plus générale de la fonction* $G(z)$?

Le problème B se pose d'ailleurs comme conséquence naturelle du problème A lorsque la suite de valeurs donnée pour $f(z)$ conduit à une fonction admettant a comme point singulier essentiel.

Les solutions de ces trois problèmes sont toutes obtenues par des généralisations de la formule d'interpolation de Lagrange.

La solution (unique) du problème A, quand elle existe, est fournie par la série

$$f(z) = u_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu \varphi_\nu(z),$$

où l'on a posé

$$\varphi_\nu(z) = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_\nu),$$

$$c_\nu = \frac{u_1}{\varphi'_{\nu+1}(a_1)} + \frac{u_2}{\varphi'_{\nu+1}(a_2)} + \ldots + \frac{u_{\nu+1}}{\varphi'_{\nu+1}(a_{\nu+1})}.$$

Cette solution existe effectivement lorsque la série indiquée est absolument et uniformément convergente sur un cercle de centre a entourant tous les points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$.

Quant au problème B, il est toujours possible; la forme générale de la fonction $G(z)$ s'obtient par application des théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler; $G(z)$ est le produit d'une fonction entière *particulière* $\psi(z)$ admettant comme zéros (simples) les points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ par la fonction méromorphe *la plus générale* $f(z)$ admettant pour pôles simples $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, avec les résidus correspondants

$$\frac{u_1}{\psi'(a_1)}, \quad \frac{u_2}{\psi'(a_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{u_\nu}{\psi'(a_\nu)}, \quad \ldots.$$

La fonction $\psi(z)$ est donnée, d'après la formule de Weierstrass, par son développement en facteurs primaires; la fonction $f(z)$ est donnée, *à une fonction entière arbitraire près,* par son développement en série d'après la formule de Mittag-Leffler.

On peut déduire de ce qui précède que le nombre cardinal des fonctions entières de z est $\mathfrak{C}$.

Lerch (*M.*). — Sur quelques développements se rapportant à la théorie des intégrales eulériennes incomplètes de seconde espèce. (211-221).

Si l'on pose

$$(1) \qquad Q(s, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx,$$

on a la formule suivante :

$$(2) \qquad e^{\frac{u}{v}} Q\left(1 - a, \frac{u}{v}\right) = v^a \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu(v)\, \Delta^\nu u^{-a}.$$

Dans cette formule, v désigne un nombre positif inférieur à $\frac{1}{\log 2}$, u désigne un nombre complexe à partie réelle positive, a un nombre complexe quelconque,

$\Delta^\nu u^{-a}$ la différence $\nu^{\text{ième}}$ de la suite

$$u^{-a},\quad (u+1)^{-a},\quad (u+2)^{-a},\quad \ldots;$$

enfin $C_\nu(v)$ est un polynome entier en v défini par la formule

$$\frac{1}{1-v\log(1+z)} = C_0(v) + C_1(v)z + C_2(v)z^2 + C_3(v)z^3 + \ldots.$$

Si u et a sont réels et positifs, $u > 1$, on a une limite supérieure de la valeur absolue du reste R_n de la série qui est dans le second membre de (2), par la formule

$$|R_n| = \left|\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} C_\nu \Delta^\nu u^{-a}\right| < g\,|\Delta^n(u-1)^{-a}|,$$

où g est le nombre positif $\dfrac{1}{1-v\log 2}$.

De la formule (2) on peut déduire la suivante :

$$(3)\qquad e^{\frac{u}{v}}\int_{\frac{u}{v}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} C_\nu(v)\,\Delta^\nu \log u$$

et aussi, comme cas particulier, la suivante :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{u}{v}e^{\frac{u}{v}}\int_{\frac{u}{v}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \\ &\quad = 1 - \frac{1\,C_1(v)}{u+1} + \frac{1.2\,C_2(v)}{(u+1)(u+2)} - \frac{1.2.3\,C_3(v)}{(u+1)(u+2)(u+3)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

déjà donnée par Schlœmilch pour $v = 1$.

En partant du développement

$$\frac{1}{[1-v\log(1+z)]^c} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \Phi_\nu(c, v)\,z^\nu,$$

on arrive à la formule suivante, généralisation de la formule (4) :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u}{v}\right)^c e^{\frac{u}{v}}\,Q\left(1-c, \frac{u}{v}\right) \\ &\quad = 1 - \frac{1\,\Phi_1(c, v)}{u+1} + \frac{1.2\,\Phi_2(c, v)}{(u+1)(u+2)} - \frac{1.2.3\,\Phi_3(c, v)}{(u+1)(u+2)(u+3)} + \ldots. \end{aligned}$$

La quantité $\Phi_n(c, v)$ se déduit d'ailleurs du polynome $C_n(v)$ en remplaçant partout v^ν par $\dbinom{c+\nu-1}{c} v^\nu$; les coefficients numériques de ses différents termes ont des expressions assez simples.

Stäckel (*Paul*). — Sur une catégorie de fonctions n fois périodiques de n variables réelles. (222-242).

L'auteur démontre le théorème suivant :

Soient

$$\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \quad \text{et} \quad \chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

des fonctions données des arguments réels $u_\varkappa$, définies pour les valeurs de ces arguments satisfaisant aux inégalités

$$a_\varkappa \leqq u_\varkappa \leqq A_\varkappa,$$

et jouissant des propriétés suivantes :

1. *Elles sont toutes uniformes, finies et continues.*

2. *Les fonctions $\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ sont constamment positives et ne s'annulent jamais.*

3. *Les fonctions $\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$ ne changent jamais de signe et elles ne peuvent pas s'annuler pour tous les points d'un intervalle, si petit soit-il.*

4. *Le déterminant*

$$D(u_1, u_2, \ldots, u_n) = |\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)| \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ne change jamais de signe et, considéré comme fonction d'une quelconque $u_\varkappa$ des variables, il ne s'annule pas pour tous les points d'un intervalle, si petit soit-il.

Si l'on pose alors

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \int_{a_\varkappa}^{u_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

réciproquement $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des fonctions uniformes, finies et continues des arguments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour toutes les valeurs de ces arguments; ces fonctions sont paires et n fois périodiques avec les systèmes de périodes

$$2\omega_{\varkappa 1}, \quad 2\omega_{\varkappa 2}, \quad \ldots, \quad 2\omega_{\varkappa n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

définies par les formules

$$\omega_{\varkappa\lambda} = \int_{a_\varkappa}^{A_\varkappa} \frac{\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)\, du_\varkappa}{\sqrt{(u_\varkappa - a_\varkappa)(A_\varkappa - u_\varkappa)\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)}}.$$

Ce théorème avait déjà été énoncé et démontré par Ahrens, mais avec la restriction essentielle que le déterminant $|\varphi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)|$ *ne devait jamais s'annuler*. Toujours avec cette même restriction, le théorème avait été démontré auparavant par Stäckel dans le cas particulier où les fonctions $\chi_{\varkappa\lambda}(u_\varkappa)$, qui ont le même premier indice $\varkappa$, sont toutes identiques entre elles; auparavant encore, avec les mêmes hypothèses restrictives, par Weierstrass pour $n = 1$ et Staude pour $n = 2$.

Netto (*E.*). — Sur la formation de groupes abstraits au moyen de deux éléments. (243-262).

L'auteur, dans cet article, s'occupe des groupes abstraits finis qui peuvent être engendrés par multiplications successives en partant de deux éléments a et b.

A chaque groupe de cette espèce correspondent quatre entiers α, β, k, m, les deux derniers étant premiers entre eux, tels que $a^{k\alpha}$ est la plus petite puissance de a égale à 1, et b^β la plus petite puissance de b égale à une puissance de a :

$$(1) \qquad a^{k\alpha} = 1 \qquad (\text{min.}),$$
$$(2) \qquad b^{\beta} = a^{m\alpha} \qquad (\text{min.}).$$

Les équations précédentes ne suffisent pas pour caractériser un groupe fini (sauf, bien entendu, si β ou α est égal à 1, dans quel cas on a un groupe cyclique). Une des plus simples relations qu'on peut imaginer pour essayer d'achever la détermination du groupe est une relation de la forme

$$(3) \qquad ba = a^{\gamma} b;$$

il faut et il suffit, pour qu'il existe un groupe satisfaisant aux relations (1), (2) et (3), qu'on ait

$$\gamma^{\beta} = 1 \qquad (\text{mod } k\alpha);$$

le groupe est alors d'ordre $k\alpha\beta$.

Considérons en particulier les groupes définis par les relations

$$a^{\alpha} = 1, \qquad b^{\beta} = 1 \qquad (\text{min.}),$$
$$ba = a^{2} b;$$

le nombre β doit satisfaire à la congruence

$$2^{\beta} \equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha),$$

dont toutes les racines sont des multiples de la plus petite d'entre elles, β_0. Dans ce cas, l'ordre de $a^g b^h$ est

$$\sigma = \frac{\alpha\beta}{(\alpha h, \beta)} \qquad \text{si} \qquad 2^h \equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha),$$
$$\sigma = \frac{\beta_0\beta}{(\beta_0 h, \beta)} \qquad \text{si} \qquad 2^h \not\equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha),$$

en désignant par le symbole (u, v) le plus grand commun diviseur de u et de v.

Si l'on remplace la relation (3) par la relation plus générale

$$ba = a^{\gamma} b^{\lambda},$$

les choses deviennent beaucoup plus compliquées. Dans le cas simple

$$ba = a^2 b^2,$$

on démontre que les deux substitutions a et b sont de même ordre, si ces ordres sont de même parité; sinon, ces ordres sont le double l'un de l'autre; on démontre aussi que $a^4 b$ et ab^4 sont de même ordre.

En particulier, les relations

$$a^4 = 1, \qquad b^4 = 1; \qquad ba = a^2 b^2$$

conduisent à un groupe déjà étudié; car, en posant

$$a_1 = b, \qquad b_1 = ba,$$

on a

$$a_1^4 = 1, \qquad b_1^5 = 1; \qquad b_1 a_1 = a_1 b_1^2.$$

Il en est de même des relations

$$a^5 = 1, \qquad b^5 = 1; \qquad ba = a^2 b^2.$$

Au contraire, les relations

$$a^3 = 1, \qquad b^3 = 1; \qquad ba = a^2 b^2;$$
$$a^3 = 1, \qquad b^6 = 1; \qquad ba = a^2 b^2$$

conduisent à deux groupes essentiellement nouveaux, d'ordres 12 et 24.

Le cas, un peu plus compliqué, des relations

$$a^4 = 1, \qquad b^4 = 1; \qquad ba = a^3 b^3$$

conduit à un groupe, mais *d'ordre infini;* on obtient, par exemple, ce groupe en prenant pour a et b les deux substitutions

$$a = |\, z \quad iz \,|, \qquad b = |\, z \quad iz + 1 - i \,| \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

susceptibles d'ailleurs d'une interprétation géométrique simple.

Ce qui précède met en évidence la grande variété des résultats qui peuvent se présenter, même avec les relations de définition les plus simples.

Schlesinger (*Ludwig*). — Contributions à la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes. (263-297).

La plupart des questions qui se posent dans la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre n peuvent être traitées d'une manière plus élégante et plus profonde en regardant l'équation différentielle donnée comme un cas particulier d'un système de n équations différentielles linéaires et homogènes du premier ordre. La théorie d'un tel système

$$(1) \qquad \frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(x)\, y_\lambda$$

peut se mettre sous une forme intuitive en introduisant la notion de *matrice intégrale :* c'est une matrice obtenue en considérant un système de n solutions fondamentales de (1), et formant la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice au moyen des n fonctions $y_{i\varkappa}$ qui constituent la $i^{\text{ième}}$ solution. En désignant cette matrice intégrale par $(y_{i\varkappa})$ et utilisant le calcul des matrices, on peut écrire le système (1) sous la forme

$$(2) \qquad \left(\frac{dy_{i\varkappa}}{dx}\right) = (y_{i\varkappa})\,(a_{i\varkappa}).$$

Si les $a_{i\varkappa}$ sont des fonctions de la variable réelle x, finies et continues dans un intervalle (p, q), on peut démontrer, par un procédé identique à celui de Cauchy-Lipschitz, l'existence d'une matrice intégrale continue, se réduisant,

pour $x = p$, à une matrice constante donnée $(y_{i\varkappa}^{(0)})$. On pourra alors écrire

$$(y_{i\varkappa}) = (y_{\varkappa}^{(0)}) \int_p^x (a_{i\varkappa}).$$

On peut considérer de même un système d'équations aux différentielles totales à deux variables indépendantes réelles ξ, η, soit

$$(3) \quad du_\varkappa = d\xi \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha_{\lambda\varkappa}(\xi, \eta) u_\lambda + d\eta \sum_{\lambda=1}^{m} \beta_{\lambda\varkappa}(\xi, \eta) u_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, m).$$

Ce système est complètement intégrable si l'on a la relation

$$\left(\frac{\partial \alpha_{i\varkappa}}{\partial \eta}\right) + (\beta_{i\varkappa})(\alpha_{i\varkappa}) = \left(\frac{\partial \beta_{i\varkappa}}{\partial \xi}\right) + (\alpha_{i\varkappa})(\beta_{i\varkappa}).$$

Si, de plus, les $\alpha_{i\varkappa}$ et $\beta_{i\varkappa}$ sont des fonctions finies et continues de ξ, η à l'intérieur et sur le contour d'un domaine simplement connexe S, le système (3) admet une matrice intégrale $(v_{i\varkappa})$, et une seule, définie dans le domaine S, et se réduisant pour un point donné (ξ_0, η_0) du domaine à une matrice constante donnée.

Ce qui précède permet de démontrer l'existence d'une matrice intégrale pour le système (1), lorsque les $a_{i\varkappa}$ sont des fonctions analytiques d'une variable complexe $x = \xi + \eta\sqrt{-1}$, et montre comment se fait la séparation des parties réelles et des parties imaginaires dans les éléments de cette matrice intégrale.

Supposons que les $a_{i\varkappa}$ soient des fonctions *uniformes* de x à l'intérieur d'un domaine simplement connexe T' et soient $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ les points singuliers (pôles ou points singuliers essentiels) des $a_{i\varkappa}$ à l'intérieur de T'. Ce domaine T' se transforme, par exclusion des points $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, en un domaine $(\rho + 1)$ fois connexe T et celui-ci en un domaine simplement connexe $\bar{T}$ si l'on joint les points $a_\varkappa$ à la frontière de T' par des coupures $l_\varkappa$.

En partant d'un point fixe x_0 de $\bar{T}$, on peut définir une matrice intégrale $(y_{i\varkappa})$ holomorphe à l'intérieur de $\bar{T}$ et se réduisant pour $x = x_0$ à la matrice unité. Si l'on tourne dans le sens positif autour du point a_ν, la matrice intégrale $(y_{i\varkappa})$ se reproduit, multipliée à gauche par une matrice constante $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$. Il se peut que cette matrice se réduise à la matrice unité et même que les $y_{i\varkappa}$ soient holomorphes au voisinage de a_ν; dans ce dernier cas, a_ν est dit un *point critique non essentiel* du système (1); sinon, il est dit *point critique essentiel*.

Appelons *matrice de Cauchy* une matrice $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$, solution d'un système pour lequel les $a_{i\varkappa}$ soient de la forme $\dfrac{A_{i\varkappa}}{x - a_\nu}$, où les $A_{i\varkappa}$ sont des constantes. Alors on peut toujours, et d'une infinité de manières, déterminer une matrice de Cauchy $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ qui, par rotation autour de a_ν, soit multipliée à gauche par $(c_{i\varkappa}^{(\nu)})$. Alors la matrice intégrale $(y_{i\varkappa})$ du système donné se met sous la forme

$$(y_{i\varkappa}) = (\mathfrak{y}_{i\varkappa}^{(\nu)})(p_{i\varkappa}^{(\nu)}),$$

où la matrice $(p_{i\varkappa}^{(\nu)})$ est *uniforme* au voisinage de a_ν.

Dans le cas particulier où la matrice intégrale *n'est pas indéterminée* pour $x = a_\nu$, on peut choisir la matrice $(\eta_{i\varkappa}^{(\nu)})$ de manière que les $p_{i\varkappa}^{(\nu)}$ soient *holomorphes* pour $x = a_\nu$. Si alors le déterminant $|p_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ ne s'annule pas pour $x = a_\nu$, le système différentiel (1) est dit de *forme normale*. Si le déterminant $|p_{i\varkappa}^{(\nu)}|$ s'annule pour $x = a_\nu$, on peut toujours effectuer une substitution de la forme

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda (x - a_\nu)^{\gamma_\lambda} g_{\lambda\varkappa},$$

de manière que le système différentiel des $z_\varkappa$ soit de forme normale. Dans cette formule les γ_λ sont des entiers non négatifs, et les $g_{\lambda\varkappa}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de puissances entières et non négatives de $x - a_\nu$ et dont le déterminant n'est pas nul pour $x = a_\nu$: la matrice $(g_{\lambda\varkappa})$ est dite une matrice *neutrale*.

Le système (1) est dit de forme *canonique* pour $x = a_\nu$ si les $a_{i\varkappa}$ admettent le point a_ν comme pôle simple; dans ce cas la matrice intégrale n'est pas indéterminée pour $x = a_\nu$. Il existe une forme encore plus générale du système (1) jouissant de cette propriété : cette forme générale correspond à la *forme de Fuchs* pour une équation différentielle linéaire d'ordre n.

Un système est dit *canonique* lorsque les $a_{i\varkappa}$ sont uniformes dans tout le plan et n'admettent, à distance finie ou infinie, d'autres points singuliers que des pôles simples; certains de ces points singuliers peuvent être des points critiques *non essentiels* du système; si l'on appelle *ordre* d'un de ces points a_ν le degré de multiplicité du zéro $x = a_\nu$ pour le déterminant $|y_{i\varkappa}|$, on a le théorème suivant :

La somme changée de signe des racines des équations fondamentales correspondant à tous les points critiques essentiels est égale au nombre des points critiques non essentiels, chacun d'eux étant compté avec son ordre.

Deux matrices $(y_{i\varkappa})$ et $(z_{i\varkappa})$ sont dites de même *espèce* si l'on a une relation de la forme

$$(z_{i\varkappa}) = (y_{i\varkappa})(r_{i\varkappa}),$$

où les $r_{i\varkappa}$ sont des fonctions *rationnelles* de x dont le déterminant n'est pas identiquement nul. Si, de plus, les systèmes différentiels dont $(y_{i\varkappa})$ et $(z_{i\varkappa})$ sont des matrices intégrales ont mêmes points critiques essentiels, les deux matrices sont dites appartenir à la même *classe*. L'auteur signale l'importance du problème qui consiste à déterminer un système différentiel *canonique* appartenant à la même classe qu'un système *fuchsien* donné (c'est-à-dire d'un système dont la matrice intégrale n'est jamais indéterminée).

L'article se termine par quelques remarques relatives aux systèmes *associés* d'un système donné.

Bauer (*Michael*). — Contribution à la théorie des équations irréductibles. (298-301).

L'auteur applique la théorie des idéaux à la démonstration du théorème suivant :

Soit

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

une équation dont les coefficients appartiennent à un domaine holoïde donné $[(A), x_1, x_2, \ldots, x_m)]$, *les lettres* x_i *désignant des indéterminées. Soit, de plus,*

$$n = \prod_{s=1}^{r} n_s,$$

où les entiers n_s *sont premiers entre eux deux à deux. Désignons par* P_1, $P_2, \ldots, P_r$ *différents nombres premiers appartenant au domaine holoïde, par* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *des nombres rationnels entiers positifs, et enfin par* $E\left(\frac{a}{b}\right)$ *le plus grand nombre rationnel entier contenu dans* $\frac{a}{b}$.

Cela étant, si les coefficients c_i *peuvent être mis sous la forme*

$$c_i = \prod_{s=1}^{r} P_s^{E\left(\frac{i\alpha_s - 1}{n_s}\right) + 1} C_i,$$

où les C_i *appartiennent au domaine holoïde, si, de plus, dans le sens de l'équivalence on a*

$$\left(C_n, \prod_{s=1}^{r} P_s\right) = 1, \qquad (\alpha_s, n_s) = 1,$$

l'équation donnée est irréductible.

Muth (P.). — Sur l'équivalence réelle des faisceaux de formes quadratiques réelles. (302-321).

Deux faisceaux $\lambda_1\psi + \lambda_2\varphi$ et $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$ de formes quadratiques réelles de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sont dits en *équivalence réelle* s'il existe une substitution linéaire *réelle* de déterminant non nul transformant respectivement φ en φ' et ψ en ψ'. Les deux faisceaux sont dits simplement *équivalents* lorsqu'il existe une substitution linéaire, *réelle ou imaginaire,* jouissant de la même propriété.

On sait que pour que deux faisceaux $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ et $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$, supposés *ordinaires* (c'est-à-dire tels que les discriminants $|\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi|$ et $|\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'|$ ne soient pas identiquement nuls), soient équivalents, il faut et il suffit que les *diviseurs élémentaires* de ces deux discriminants soient identiques. Cette condition n'est pas suffisante pour l'équivalence réelle. L'auteur arrive à des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence *réelle* de deux faisceaux ordinaires équivalents par la considération des formes normales réelles données par Weierstrass.

Si l'on suppose la forme φ *ordinaire* et si les diviseurs élémentaires du discriminant $|\lambda\varphi - \psi|$ sont

$$(\lambda - c_1)^{e_1}, \quad (\lambda - c_2)^{e_2}, \quad \ldots, \quad (\lambda - c_k)^{e_k};$$
$$(\lambda - c_{k+1})^{e_{k+1}}, \quad (\lambda - c_{k+2})^{e_{k+2}}, \quad \ldots, \quad (\lambda - c_l)^{e_l},$$

les k premiers étant réels, les $l-k$ derniers étant imaginaires (conjugués deux à deux), et si l'on pose, pour $\sigma > k$,

$$c_\sigma = m_\sigma + \sqrt{-1}\,m'_\sigma,$$

on peut, par une substitution linéaire réelle, transformer φ et ψ en

$$\left\{\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} \varepsilon_\sigma \sum_{i=0}^{i=e_\sigma-1} (X_{\sigma,i}X_{\sigma,e_\sigma-1-i}) + 2 \sum_{\sigma=k+1}^{\sigma=\frac{l-k}{2}+k} \left[\sum_{i=0}^{i=e_\sigma-1} (X_{\sigma,i}X_{\sigma,e_\sigma-1-i} - X'_{\sigma,i}X'_{\sigma,e_\sigma-1-i})\right],\\
\Psi &= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=k} \left[\varepsilon_\sigma c_\sigma \sum_{i=0}^{i=e_\sigma-1} (X_{\sigma,i}X_{\sigma,e_\sigma-1-i}) + \varepsilon_\sigma \sum_{i=0}^{i=e_\sigma-2} (X_{\sigma,i}X_{\sigma,e_\sigma-2-i})\right]\\
&\quad + 2 \sum_{\sigma=k+1}^{\sigma=\frac{l-k}{2}+k} \left[m_\sigma \sum_{i=0}^{i=e_\sigma-1} (X_{\sigma,i}X_{\sigma,e_\sigma-1-i} - X'_{\sigma,i}X'_{\sigma,e_\sigma-1-i})\right.\\
&\qquad \left. - 2m'_\sigma \sum_{i=0}^{i=e_\sigma-1} (X_{\sigma,i}X'_{\sigma,e_\sigma-1-i}) + \sum_{i=0}^{i=e_\sigma-2} (X_{\sigma,i}X_{\sigma,e_\sigma-2-i} - X'_{\sigma,i}X'_{\sigma,e_\sigma-2-i})\right].
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules les ε_σ sont égaux à ± 1, et les nouvelles variables sont $X_{\sigma,\mu}$, $X'_{\sigma,\mu}$.

Les parties de Φ et Ψ qui correspondent à des diviseurs élémentaires imaginaires ne dépendent que de ces diviseurs élémentaires; au contraire, les parties qui correspondent aux diviseurs élémentaires réels dépendent, outre ces diviseurs, des ε_σ. Désignons par $S(\varphi)$ la *signature* de la forme quadratique φ (c'est-à-dire la différence entre le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs) et par s_σ la somme des μ nombres ε_σ qui correspondent dans les formules (2) au diviseur élémentaire réel $(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma}$ supposé se présenter μ fois. Si l'on fait la réduction de Weierstrass pour les formes φ' et ψ' et si l'on désigne par s'_σ les sommes analogues à s_σ, on démontre facilement le théorème suivant :

Pour que les deux faisceaux équivalents de formes quadratiques reelles $\lambda\varphi - \psi$, $\lambda\varphi' - \psi'$ soient en équivalence réelle, il suffit que, en effectuant pour chacun d'eux une réduction de Weierstrass, on ait

(2) $$S(\varphi) = S(\varphi'),$$

(3) $$s_\sigma = s'_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, k).$$

La réduction d'un faisceau à sa forme normale (1) est possible de plusieurs manières : arrive-t-on dans tous les cas aux mêmes sommes s_σ? Autrement dit, les conditions (3) qui sont suffisantes pour l'équivalence réelle sont-elles aussi nécessaires? L'auteur le démontre par la considération des formes adjointes aux formes quadratiques $\lambda\varphi - \chi_1$, $\lambda\varphi - \chi_2$, $\ldots$, $\lambda\varphi - \chi_k$, en posant

$$\chi_1 = \psi - c_1\varphi, \qquad \chi_2 = \psi - c_2\varphi, \qquad \ldots, \qquad \chi_k = \psi - c_k\varphi.$$

Si les formes adjointes de $\lambda\varphi - \chi_1$ et $\lambda\varphi' - \chi'_1$ sont

$$\lambda^{n-1}\Phi_{n-1} - \lambda^{n-2}\Phi_{n-2} + \ldots \pm \Phi_0,$$
$$\lambda^{n-1}\Phi'_{n-1} - \lambda^{n-2}\Phi'_{n-2} + \ldots \pm \Phi'_0.$$

les équations

$$(4)\quad S(\Phi_0) = S(\Phi'_0), \qquad S(\Phi_1) = S(\Phi'_1), \qquad \ldots, \qquad S(\Phi_{n-1}) = S(\Phi'_{n-1})$$

donnent évidemment des conditions nécessaires d'équivalence réelle des deux faisceaux $\lambda\varphi - \psi$, $\lambda\varphi' - \psi'$. Si le diviseur élémentaire $\lambda - c_1$ entre avec plusieurs exposants distincts, h_1, on peut prendre h_1 équations (4) convenablement choisies, dont nous désignerons l'ensemble par C_1; de même, pour chacun des autres nombres réels distincts c_σ (en nombre supposé égal à m), on peut prendre des équations convenablement choisies $C_2, \ldots, C_m$, de telle sorte que les conditions

$$(5)\qquad S(\varphi) = S(\varphi'), \qquad C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_m$$

entraînent comme conséquence les conditions (2) et (3), et réciproquement. Par suite :

Les conditions (1) *et* (2) *sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence réelle des deux faisceaux* $\lambda\varphi - \psi$, $\lambda\varphi' - \psi'$ *supposés équivalents.*

Il résulte de là l'*invariance* des nombre s_σ, ce qui constitue une généralisation de la loi d'inertie. De plus, les conditions (5) sont plus faciles à exprimer que les conditions (3).

On peut toujours réduire d'une unité le nombre des conditions (5), de sorte que le nombre des conditions restantes est égal au nombre des diviseurs élémentaires réels *distincts* (soit par la base, soit par l'exposant).

Dans certains cas, on peut remplacer certaines des conditions $C_1, \ldots, C_m$ par des conditions plus simples. Par exemple, si les diviseurs élémentaires réels qui ont des bases égales ont tous des exposants égaux et si l'exposant de l'une au moins de ces bases, par exemple $\lambda - c_1$, est impair, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence réelle sont fournies par les équations

$$S(\varphi) = S(\varphi'), \qquad S(\psi - c_\sigma\varphi) = S(\psi' - c_\sigma\varphi') \qquad (\sigma = 2, 3, \ldots, m).$$

Si tous les exposants sont pairs, ces conditions sont fournies par les équations

$$S(\psi - c_\sigma\varphi) = S(\psi' - c_\sigma\varphi') \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m).$$

Ce qui précède suppose la forme φ ordinaire; mais, s'il n'en était pas ainsi, on rapporterait le faisceau $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ à deux de ses formes φ_1 et ψ_1, la forme φ_1 étant ordinaire.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXIX; 1905.

Ce Volume est consacré à la Mémoire de LEJEUNE-DIRICHLET (né le 13 février 1805).

Dedekind (*R.*). — Sur les formes trilinéaires binaires et la composition des formes quadratiques binaires. (3-34).

Dans ses *Disquisitiones Arithmeticæ* (art. 235), Gauss a étudié d'une manière générale la transformation, au moyen d'une substitution linéaire, d'une forme quadratique binaire en un produit de deux autres formes. La solution du problème général traité par Gauss peut être très simplifiée si l'on remarque qu'étant donnée une substitution bilinéaire, on peut lui en faire correspondre deux autres, ainsi que trois formes quadratiques, telles que chacune de ces formes soit transformée dans le produit des deux autres par la substitution bilinéaire correspondante.

1. L'auteur considère d'abord trois formes quadratiques binaires

$$F_1(x_1, y_1), \quad F_2(x_2, y_2), \quad F_3(x_3, y_3)$$

définies par les formules

$$\begin{aligned} F_r(x_r, y_r) &= A_r x_r^2 + B_r x_r y_r + C_r y_r^2 \\ &= (\beta_s x_r + \alpha_t y_r)(\beta_t x_r + \alpha_s y_r) - (\alpha_r x_r + \beta_0 y_r)(\alpha_0 x_r + \beta_r y_r), \end{aligned}$$

où r, s, t désigne une permutation quelconque des indices 1, 2, 3 et où α_0, α_1, α_2, α_3; β_0, β_1, β_2, β_3 désignent huit constantes arbitraires.

Des calculs élémentaires montrent que les trois formes F_1, F_2, F_3 ont même discriminant

$$D = B_1^2 - 4A_1C_1 = B_2^2 - 4A_2C_2 = B_3^2 - 4A_3C_3;$$

de plus, chacune d'elles se transforme dans le produit des deux autres par une substitution bilinéaire convenable; en posant

$$\begin{aligned} X_r &= \quad \beta_r x_s x_t + \alpha_s x_s y_t + \alpha_t y_s x_t + \beta_0 y_s y_t, \\ Y_r &= -\alpha_0 x_s x_t - \beta_t x_s y_t - \beta_s y_s x_t - \alpha_r y_s y_t, \end{aligned}$$

on obtient l'identité

$$F_r(X_r, Y_r) = F_s(x_s, y_s)\, F_t(x_t, y_t).$$

Les trois substitutions bilinéaires correspondant aux trois formes satisfont aux identités remarquables

$$y_1 X_1 - x_1 Y_1 = y_2 X_2 - x_2 Y_2 = y_3 X_3 - x_3 Y_3.$$

2. Soient maintenant

$$f_1(x_1, y_1), \quad f_2(x_2, y_2), \quad f_3(x_3, y_3)$$

trois formes quadratiques de discriminants différents de zéro et cherchons à tirer avec Gauss toutes les conclusions de l'hypothèse que la forme f_1 se transforme dans le produit des deux autres par une substitution linéaire convenable; soit

$$X_1 = \beta_1 x_2 x_3 + \alpha_2 x_2 y_3 - \alpha_3 y_2 x_3 + \beta_0 y_2 y_3.$$
$$Y_1 = - \alpha_0 x_2 x_3 - \beta_3 x_2 y_3 - \beta_2 y_2 x_3 - \alpha_1 y_2 y_3.$$

Si l'on forme alors, à l'aide des huit coefficients α et β, les trois formes F_1, F_2, F_3, comme il a été dit au paragraphe 1, il existe trois constantes différentes de zéro n_1, n_2, n_3 telles qu'on ait identiquement

$$F_1 = n_1 f_1, \qquad F_2 = n_2 f_2, \qquad F_3 = n_3 f_3.$$

L'auteur montre comment on peut de là déduire tous les résultats de Gauss.

3. On peut retrouver tout ce qui précède par une autre méthode, plus profonde, sans introduire explicitement dans le calcul les constantes α et β et en partant uniquement de la forme trilinéaire

$$x_1 Y_1 - y_1 X_1 = x_2 Y_2 - y_2 X_2 = x_3 Y_3 - y_3 X_3.$$

Dans cette seconde Partie de son Mémoire, l'auteur se sert de la différentiation totale, en lui attribuant une interprétation qui conduit à une notion analogue à celle de transformation infinitésimale chez Lie. Étant données n variables x_1, x_2, ..., x_n, on fait choix de n fonctions dérivables quelconques de ces variables qu'on désigne par les symboles

$$dx_1, \quad dx_2, \quad \ldots, \quad dx_n.$$

La formule

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n$$

définit alors une *operation* (l'opération d) appliquée à une fonction arbitraire des n variables données. Cette opération est aussi nommée un *vecteur*. On a le vecteur zéro, en prenant $dx_1 = \ldots = dx_n = 0$.

Après avoir défini le *produit* de deux vecteurs, les systèmes réductibles et irréductibles, l'auteur introduit le vecteur

$$(d_1, d_2) = d_1 d_2 - d_2 d_1 = - (d_2, d_1)$$

qui se déduit des deux vecteurs d_1 et d_2 de la même manière que la transformation infinitésimale *crochet* de deux transformations infinitésimales données.

4. Cela étant, l'auteur part d'une forme trilinéaire H de trois couples de variables indépendantes

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3)$$

et définit trois vecteurs d_1, d_2, d_3 par les formules

$$d_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial H}{\partial y_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_r} \frac{\partial H}{\partial x_r} \qquad (r = 1, 2, 3$$

qui donnent en particulier

$$d_r H = 0.$$

En introduisant les trois vecteurs e_1, e_2, e_3 indépendants de la forme H, par les formules

$$e_r\varphi = x_r \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} + y_r \frac{\partial\varphi}{\partial y_r},$$

et en calculant (d_r, d_s), on trouve

$$(d_r, d_s) = F_t(e_s - e_r),$$

où F_t désigne une forme quadratique de x_t, y_t :

$$F_t = \frac{\partial^2 H}{\partial x_r\, \partial y_s}\, \frac{\partial^2 H}{\partial y_r\, \partial x_s} - \frac{\partial^2 H}{\partial y_r\, \partial y_s}\, \frac{\partial^2 H}{\partial x_r\, \partial x_s}.$$

Les trois formes quadratiques F_1, F_2, F_3, qui ne sont autres que celles dont il est question au paragraphe 1, donnent naissance à une deuxième forme trilinéaire H', l'*adjointe* de H, par les formules

$$H' = d_1 F_1 = d_2 F_2 = d_3 F_3.$$

On a, de plus,

$$d_r H' = d_r^2 F_r = 2 F_s F_t = 2 F_r(d_r x_r, d_r y_r),$$

ce qui redonne le résultat fondamental du paragraphe 1; puis

$$H'^2 - 4 F_r F_s F_t = D_r H^2,$$

ce qui redonne l'égalité des discriminants D_r des trois formes F_r :

$$D = D_1 = D_2 = D_3.$$

5. En opérant sur la forme adjointe H' comme on a opéré sur la forme H, on définit trois nouveaux vecteurs :

$$d'_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\, \frac{\partial H'}{\partial y_r} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\, \frac{\partial H'}{\partial x_r},$$

d'où l'on déduit

$$d'_r H' = 0, \qquad d'_r H = - d_r H' = - 2 F_s F_t.$$

Les trois vecteurs d_r, d'_r, e_r forment un système réductible et l'on a l'identité

$$- H' d_r + H d'_r + 2 F_s F_t e_r = 0,$$

d'où l'on déduit en particulier

$$d'_1 F_1 = d'_2 F_2 = d'_3 F_3 = DH.$$

On a en outre

$$(d'_r, d'_s) = - D\, F_t(e_s - e_r) = - D(d_r, d_s).$$

La forme adjointe de H' est $- D^2 H$, c'est-à-dire la forme primitive H multipliée par $- D^2$.

Les formes H et H' forment la base d'un faisceau de formes trilinéaires

$$H'' = H p + H' q;$$

de chaque forme H'' de ce faisceau on peut déduire trois vecteurs d''_r de la même

manière qu'on a déduit les vecteurs d_r de la forme H. On a

$$d''_r \mathrm{H} = -2\mathrm{F}_s\mathrm{F}_t q, \qquad d''_r \mathrm{H}' = 2\mathrm{F}_s\mathrm{F}_t q, \qquad d''_r \mathrm{F}_r = \mathrm{H}'p + \mathrm{DH}q,$$
$$(d''_r, d''_s) = m(d_r, d_s) \qquad (m = p^2 - \mathrm{D}q^2).$$

Enfin la forme adjointe de H″ est

$$\mathrm{H}''' = m(\mathrm{H}'p + \mathrm{DH}q).$$

En introduisant encore trois nouveaux vecteurs δ_r définis par les formules

$$\delta_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\frac{\partial \mathrm{F}_r}{\partial y_r} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_r}\frac{\partial \mathrm{F}_r}{\partial x_r},$$

on a

$$\delta_r \mathrm{F}_r = 0, \qquad \delta_r \mathrm{H} = -d_r \mathrm{F}_r = -\mathrm{H}', \qquad \delta_r \mathrm{H}' = -d'_r \mathrm{F}_r = -\mathrm{DH}.$$

6. Chacune des deux formes trilinéaires

$$\mathrm{U} = \frac{1}{2}(\mathrm{H}' + \mathrm{H}\sqrt{\mathrm{D}}), \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{2}(\mathrm{H}' - \mathrm{H}\sqrt{\mathrm{D}}),$$

dont le produit est

$$\mathrm{UV} = \mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\mathrm{F}_3,$$

est un produit de trois facteurs linéaires. En posant

$$\lambda_r = x_r + \omega_r y_r, \qquad \mu_r = x_r + \omega'_r y_r,$$

on a

$$\mathrm{U} = \mathrm{L}\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \qquad \mathrm{V} = \mathrm{M}\mu_1\mu_2\mu_3, \qquad \mathrm{F}_r = \mathrm{A}_r\lambda_r\mu_r,$$

où L, M, A_1, A_2, A_3 sont des constantes liées par la relation

$$\mathrm{LM} = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3.$$

On a

$$d_r\mathrm{U} = d_r\mathrm{V} = \mathrm{F}_s\mathrm{F}_t = \mathrm{A}_r\, d_r\lambda_r\, d_r\mu_r,$$
$$\mathrm{A}_r d_r\lambda_r = \mathrm{M}\mu_s\mu_t, \qquad \mathrm{A}_r d_r\mu_r = \mathrm{L}\lambda_s\lambda_t;$$

ces dernières formules montrent comment les deux facteurs de la forme F_r sont transformés lorsque cette forme se change par la substitution linéaire d_r dans le produit $\mathrm{F}_s\mathrm{F}_t$.

7. Le discriminant D des trois formes F_1, F_2, F_3 est une fonction homogène du quatrième degré des huit coefficients α, β de la forme H. On a d'ailleurs, quel que soit l'indice i,

$$\alpha'_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\beta_i}, \qquad \beta'_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\alpha_i},$$

en désignant par α'_i, β'_i les coefficients de la forme adjointe H.

Cela permet de définir, par rapport aux 14 variables α_i, β_i, x_r, y_r, un vecteur δ par les formules

$$\delta\alpha_i = \alpha'_i, \qquad \delta\beta_i = \beta'_i, \qquad \delta x_r = \delta y_r = 0,$$

ou encore

$$\delta\varphi = \frac{1}{2}\sum^{(\alpha,\,\beta)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\beta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial\alpha}\right).$$

Ce nouveau vecteur satisfait aux relations

$$\partial H = H', \qquad \partial H' = \partial^2 H = DH, \qquad \partial F_r = 0, \qquad \partial D = 0,$$
$$\partial \alpha'_i = D\alpha_i, \qquad \partial \beta'_i = D\beta_i,$$
$$(\partial, d_r) = d_r, \qquad (\partial, d'_r) = D d_r, \qquad (\partial, e_r) = (\partial, \partial_r) = 0.$$

Weber (H.). — Sur les nombres premiers complexes qui appartiennent à une forme linéaire. (35-62).

On sait comment Dedekind a simplifié la démonstration du théorème de Dirichlet d'après lequel il existe une infinité de nombres premiers appartenant à une forme linéaire (progression arithmétique) donnée, en substituant à la considération du nombre des classes des formes quadratiques celle du nombre des classes des corps algébriques de la division du cercle. La démonstration du théorème généralisé par Dirichlet relatif aux nombres premiers complexes peut, elle aussi, se simplifier par la considération du nombre des classes des corps algébriques de la division *lemniscatique;* c'est ce que l'auteur expose dans le présent Mémoire; d'ailleurs, cette démonstration nouvelle se rattache à une théorie plus générale développée dans trois Mémoires des *Mathematische Annalen* (t. XLVIII, XLIX et L) et qui sont relatifs à la distribution des nombres premiers idéaux dans certains groupes de nombres.

I. L'auteur désigne par J le *corps de Gauss* obtenu par l'adjonction du nombre $i = \sqrt{-1}$ au corps des nombres rationnels. Les nombres entiers de J sont de la forme $x + yi$ où x et y désignent deux nombres entiers réels quelconques; la *norme* de $x + yi$ est $x^2 + y^2$. Deux nombres entiers de J sont dit *associés* si l'un d'eux est le produit de l'autre par l'une des qnatre unités ± 1, $\pm i$. Les nombres premiers du corps J sont : 1° les nombres premiers réels de la forme $4m + 3$; 2° les nombres imaginaires dont la norme est un nombre premier naturel de la forme $4m + 1$.

Si μ est un nombre entier du corps J, on peut partager l'ensemble des nombres entiers premiers avec μ en un certain nombre h de classes $A_1, A_2, \ldots, A_h$; deux nombres entiers de J appartiennent ou non à la même classe suivant que l'un d'eux est congru ou non à un associé de l'autre (mod μ). La classe principale A_1 est formée des nombres entiers congrus à l'une des unités.

Les h classes A forment un groupe abélien; on a

$$A_i A_k = A_l$$

si le produit de deux nombres entiers appartenant aux classes A_i et A_k appartient à la classe A_l. A ce groupe abélien sont attachés h *caractères*

$$\chi_1, \quad \chi_2, \quad \ldots, \quad \chi_h;$$

si χ_1 est le caractère *principal,* on a

$$\chi_1(A_i) = 1.$$

Le théorème à démontrer est le suivant :

Si α est un nombre entier complexe premier avec μ, il existe une infinité de nombres premiers de J de la forme $\mu\xi + \alpha$, où ξ parcourt l'ensemble des nombres entiers de J.

Après avoir recherché dans quel cas la forme $\mu\xi + \alpha$ peut représenter une infinité de nombres premiers *réels* de J, l'auteur s'occupe des nombres premiers imaginaires appartenant à cette forme.

Il considère pour cela, avec Dirichlet, h séries

$$Q_1(s), \quad Q_2(s), \quad \ldots, \quad Q_h(s)$$

correspondant chacune à un des h caractères du groupe des A. On a

$$Q_i(s) = \sum \frac{\chi_i(\alpha)}{[N(\alpha)]^s} = \prod \frac{1}{1 - \chi_i(\mathfrak{p})[N(\mathfrak{p})]^{-s}};$$

la somme Σ est étendue à tous les nombres entiers α premiers avec μ, mais en ne conservant cependant qu'un seul nombre de chaque groupe de quatre nombres associés; le produit Π est étendu à tous les nombres premiers $\mathfrak{p}$ du corps J qui n'entrent pas dans μ, avec la même restriction relative aux nombres premiers associés.

Les h séries $Q_i(s)$ sont uniformément convergentes pour $s > 1$; quand s tend vers 1, les séries

$$Q_2(s), \quad \ldots, \quad Q_h(s)$$

tendent vers des limites *finies;* quant à la série $Q_1(s)$, elle devient infinie, mais de manière qu'on ait

$$\lim (s-1)\, Q_1(s) = \frac{\pi h}{N(\mu)}.$$

On déduit facilement des expressions des $Q_i(s)$ en produits infinis la formule

$$\frac{1}{h}\sum^{i} \chi_i(A^{-1}) \log Q_i(s) = \sum \frac{1}{(N\mathfrak{p})^s} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{(N\mathfrak{p}^2)^s} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{(N\mathfrak{p}^3)^s} + \ldots,$$

la première somme du second membre étant étendue aux nombres premiers qui appartiennent à la classe A, la seconde aux nombres premiers dont le carré appartient à A, et ainsi de suite. Lorsque s tend vers 1, le second membre, d'où l'on a supprimé la première somme, tend vers une limite finie; quant à la première somme, elle peut se décomposer en deux : l'une relative aux nombres premiers $\mathfrak{p}$ réels, l'autre relative aux nombres premiers $\mathfrak{p}$ imaginaires; la première partie tend aussi vers une limite finie quand s tend vers 1. Si donc le premier membre augmente indéfiniment quand s tend vers 1, c'est qu'il existe une infinité de nombres premiers imaginaires appartenant à la classe A : c'est précisément le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

Tout revient donc à démontrer que le premier membre ne reste pas fini quand s tend vers 1; comme $Q_1(s)$ devient infini, et non $Q_2(s), \ldots, Q_h(s)$, il suffit de démontrer que les séries $Q_2(s), \ldots, Q_h(s)$ tendent vers des limites *différentes de zéro* quand s tend vers 1, ou encore que le produit

$$(s-1)\, Q_1(s)\, Q_2(s) \ldots Q_h(s)$$

tend vers une limite différente de zéro. Or, si l'on fait abstraction d'un facteur qui tend manifestement vers une limite différente de zéro, ce produit est égal à $(s-1)P^b$, où l'on a posé

$$P = \prod \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-s}},$$

le produit étant étendu à tous les nombres premiers imaginaires congrus à 1 (mod μ).

L'auteur ramène cette démonstration à celle de l'existence d'un corps K jouissant des propriétés suivantes :

1° Le corps K contient le corps J et le degré relatif n de K par rapport à J est inférieur ou égal à h.

2° Tout nombre premier imaginaire de J qui est congru à 1 (mod μ) est décomposable, dans le corps K, en facteurs premiers tous du premier degré (c'est-à-dire dont la norme, prise dans le corps K, est un nombre premier naturel).

3° Tout nombre premier réel de J et tout nombre premier imaginaire de J qui appartient par rapport à μ à un exposant supérieur à 1 sont décomposables, dans le corps K, en facteurs premiers tous de degré supérieur à 1.

4° Peuvent faire exception aux conditions 2° et 3° un nombre fini de nombres premiers du corps J.

Les hypothèses précédentes, jointes à un théorème relatif aux nombres premiers idéaux du premier groupe d'un corps quelconque, montrent que le produit $(s-1)P^n$ tend vers une limite finie et différente de zéro. Comme $(s-1)P^h$ tend vers une limite finie, il faut que $n \geqq h$; on a donc $n=h$ et le théorème est démontré. On voit de plus que le degré relatif du corps K par rapport au corps J est exactement h.

II. On arrive à un corps K satisfaisant aux conditions voulues en partant des fonctions lemniscatiques, c'est-à-dire des fonctions elliptiques pour lesquelles le rapport $\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$ des périodes est égal à $1+i$; le module k^2 est égal à -1. En posant

$$\sigma(u) = (sn\,2\mathrm{K}u)^4,$$

la fonction $\sigma(u)$ admet pour zéros et pour périodes les nombres entiers du corps J; de plus, elle prend la même valeur pour deux nombres ω et ω' tels que ω diffère de l'un des associés de ω' d'un nombre entier complexe.

Si ω est un nombre complexe fractionnaire irréductible de dénominateur μ, le nombre $\sigma(\omega)$ si μ est de norme impaire, le nombre $\frac{1}{\sigma(\omega)}$ si μ est de norme paire, est un nombre algébrique *entier*. Les h valeurs distinctes qu'on obtient en donnant au numérateur de ω toutes les valeurs possibles sont racines d'une équation algébrique entière de degré h, dont les coefficients appartiennent au corps J. Cette équation est une équation abélienne; ses h racines $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_h$ appartiennent donc à un corps abélien K_μ qui contient J et dont le degré relatif par rapport à J est un nombre $n \leqq h$.

On sait que pour qu'un nombre premier idéal $\mathfrak{p}$ d'un corps algébrique K soit du premier degré, c'est-à-dire pour que $\mathrm{N}_k(\mathfrak{p})$ soit égal à un nombre premier naturel p, il faut et il suffit que, pour chaque nombre entier ω du corps K, on ait la congruence

$$\omega^p \equiv \omega \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Cela étant, si q est un nombre premier réel du corps J, la congruence précédente n'est sûrement pas vérifiée pour $\omega = i$, et par suite q est décomposable, dans le corps K_μ, en facteurs premiers tous de degré supérieur à 1.

Soit maintenant ν un nombre premier imaginaire du corps J; l'auteur démontre la congruence

$$\sigma(\nu u) \equiv \sigma(u)^{\mathrm{N}(\nu)} \pmod{\nu}.$$

Soit $\mathfrak{p}$ un facteur premier du nombre ν supposé décomposé dans le corps K_μ et supposons que ce ne soit pas l'un des facteurs premiers (en nombre limité) qui entrent dans le discriminant de l'équation de degré h dont les racines sont σ_1, σ_2, ..., σ_h. Dans la dernière congruence écrite, donnons à u la valeur $\frac{\alpha_i}{\mu}$, α_i étant un entier de la classe A_i; alors νu est de la forme $\frac{\alpha_k}{\mu}$, α_k appartenant à une certaine classe A_k. Les indices i et k sont égaux ou non, suivant que ν appartient, par rapport à μ, à un exposant égal à 1 ou plus grand que 1. Dans tous les cas, on a, en désignant par Θ_i le nombre entier σ_i ou $\frac{1}{\sigma_i}$ (suivant la parité de μ),

$$\Theta_k \equiv \Theta_i^p \pmod{\mathfrak{p}} \qquad [p = N(\nu)].$$

Si ν appartient à un exposant plus grand que 1, on n'a pas

$$\Theta_i^p \equiv \Theta_i \pmod{\mathfrak{p}}$$

et le facteur premier $\mathfrak{p}$ n'est pas du premier degré. Si au contraire ν appartient à l'exposant 1, cette congruence est vérifiée et l'on en déduit facilement qu'elle est également vérifiée pour tout membre entier du corps K_μ, c'est-à-dire que $\mathfrak{p}$ est du premier degré.

Le corps K_μ jouit donc effectivement de toutes les propriétés voulues, et l'on voit de plus que son degré par rapport à J est h.

Hilbert (David). — Sur le principe de Dirichlet. (63 67).

Le principe de Dirichlet est celui par lequel cet illustre géomètre a cru démontrer l'existence d'une fonction potentielle $f(x, y)$ définie à l'intérieur et sur le contour d'une aire donnée et prenant sur le contour une succession donnée de valeurs. Il repose sur la considération de la fonction $f(x, y)$ qui rend minima l'intégrale

$$J(f) = \int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

étendue à cette aire. Ce principe n'est pas rigoureux, car l'existence du minimum de l'intégrale n'est pas certaine.

L'auteur pense qu'on peut modifier l'énoncé du principe de manière à le rendre rigoureux sans diminuer son caractère intuitif. Il le formule de la manière suivante :

Tout problème régulier du calcul des variations admet une solution, pourvu que des hypothèses suffisamment restrictives aient été faites sur la nature des conditions aux limites données et que le mot *solution* ait reçu un sens suffisamment précis.

Il indique l'application de ce principe à deux exemples, celui de la ligne la plus courte tracée sur une surface, entre deux points de cette surface, et celui de la fonction potentielle définie dans une aire par les valeurs données sur le contour. Dans les deux cas, la solution du problème ne dépend que d'une infinité dénombrable d'éléments (la ligne est connue lorsqu'on en connaît une infinité dénombrable de points; la fonction, lorsqu'on connaît ses valeurs pour les points de coordonnées rationnelles). On détermine successivement chacun de ces éléments par des considérations de limite.

Cette méthode est manifestement susceptible de s'étendre à des problèmes très généraux de la théorie des surfaces et de la Physique mathématique.

Hensel (K.). — Sur les invariants qui appartiennent à un corps algébrique. (68-85).

La théorie, développée dans deux Mémoires précédents du même Journal (t. CXXVII, p. 51-82, et t. CXXVIII, p. 1-32), des équations algébriques dans le domaine d'un nombre premier p permet de généraliser la théorie des nombres idéaux et celle des unités de Dirichlet et même de regarder ces deux théories comme des cas particuliers d'une même théorie plus générale. Dans le présent Mémoire l'auteur se contente de l'appliquer à la généralisation d'un théorème élémentaire qui se présente dans la théorie des unités de Dirichlet.

1. Si $f(x) = 0$ est une équation irréductible quelconque à coefficients entiers de degré n, $K(x)$ un des n corps conjugués qu'elle détermine et D le discriminant d'une base quelconque de ce corps, on sait que le discriminant de toute autre base ne diffère de D que par un facteur carré parfait. Par suite, si p est un nombre premier donné et si p^δ est la plus haute puissance de p qui entre dans D, la parité de δ est bien déterminée, et, de plus, quelle que soit la base du corps K, la partie primitive $D_0 = \dfrac{D'}{p}$ est toujours reste ou non-reste quadratique de p.

Au corps $K(x)$ sont donc attachés deux invariants numériques, le reste de la division de δ par 2 et la valeur de $\left(\dfrac{D_0}{p}\right)$.

La détermination de ces deux invariants a été faite par Stickelberger et Voronoï dans le cas particulier où p n'entre pas dans le discriminant du corps K; mais elle présente de très grandes difficultés dans le cas général si l'on ne fait appel qu'à la théorie classique des nombres idéaux. L'auteur en indique la solution complète.

Si d'abord $f(x)$ se décompose, dans le domaine de p, en h facteurs irréductibles, au discriminant de chacun desquels correspondent un exposant δ_i et une partie primitive $D_0^{(i)}$, on a

$$\delta \equiv \sum_{i=1}^{h} \delta_i \qquad (\text{mod}\, 2),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = \prod_{i=1}^{h} \left(\frac{D_0^{i}}{p}\right).$$

Si l'équation $f(x)$ est irréductible dans le domaine de p, elle admet n racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, développables suivant des séries de puissances entières ou fractionnaires de p. Si p n'entre pas dans le discriminant de l'équation, ces racines procèdent suivant les puissances entières de p. Sinon p est dit un *nombre de ramification* du corps $K(x)$; chaque racine est développable suivant les puissances entières d'un certain nombre π, qui est une racine $e^{\text{ième}}$ de p, où e désigne un diviseur de n. Les coefficients du développement sont des nombres entiers algébriques réduits (module p) d'un certain corps $K(\varepsilon)$ de degré $f = \dfrac{n}{e}$. Le nombre ε est une des f racines conjuguées d'une équation de degré f irréductible

dans le domaine de p,

(1) $$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^f - g_{f-1}\varepsilon^{f-1} + g_{f-2}\varepsilon^{f-2} - \ldots \pm g_0 = 0,$$

dont les coefficients sont des nombres entiers du corps rationnel $K(p, 1)$ et dont le premier membre est un des facteurs irréductibles de degré f de la fonction $\varepsilon^{p^f} - \varepsilon$. Les f racines

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{f-1}$$

de l'équation (1) sont égales aux puissances

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^p, \quad \varepsilon^{p^2}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{p^{f-1}};$$

l'équation (1) est donc abélienne.

Le nombre π est en général donné par une équation binome

$$\psi(\pi) = \pi^e + (-1)^e p\gamma_0 = 0,$$

où γ_0 est un nombre non divisible par p du corps $K(\varepsilon)$. Il y a exception lorsque e est divisible par p; dans ce cas π est donné par une équation

$$\psi(\pi) = \pi^e - p\gamma_{e-1}\pi^{e-1} + p\gamma_{e-2}\pi^{e-2} - \ldots + (-1)^e p\gamma_0 = 0,$$

où les γ_i sont des nombres entiers du corps $K(\varepsilon)$, γ_0 n'étant pas divisible par p.

Pour former un des discriminants du corps $K(x)$, on peut considérer l'équation qui admet pour racines les n valeurs de

$$\xi = \varepsilon + \pi$$

et l'on trouve

$$D(\xi) = D(\varepsilon)^{e^2} N_\varepsilon \left\{ (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi[\psi'(\pi)] \right\} + \ldots,$$

les termes non écrits contenant p avec un exposant supérieur à celui qui est relatif au terme écrit. On peut aussi former directement le discriminant de $K(x)$ en prenant pour base les n nombres

$$1, \quad \varepsilon, \quad \ldots, \quad \varepsilon^{f-1}, \quad \pi, \quad \pi\varepsilon, \quad \ldots, \quad \pi\varepsilon^{f-1}, \quad \ldots, \quad \pi^{e-1}, \quad \pi^{e-1}\varepsilon, \quad \ldots, \quad \pi^{e-1}\varepsilon^{f-1},$$

et l'on trouve

$$D[K(x)] = D(\varepsilon)^e N_\varepsilon \left\{ (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} N_\pi[\psi'(\pi)] \right\}.$$

Dans le cas général, si l'on ordonne

$$\psi'(\pi) = e\pi^{e-1} - (e-1)p\gamma_{e-1}\pi^{e-1} \ldots \mp p\gamma_1$$

suivant les puissances de π, on trouve

$$\psi'(\pi) = c_{\bar{e}-1}\pi^{\bar{e}-1} + c_{\bar{e}}\pi^{\bar{e}} + \ldots$$

et l'on a, lorsque e n'est pas divisible par p,

$$\bar{e} = e, \qquad c_{\bar{e}-1} = e.$$

Le calcul de $D[K(x)]$ donne alors

$$D[K(x)] = p^{f(\bar{e}-1)} D(\varepsilon)^e [N_\varepsilon(\bar{\gamma}_0) + \ldots],$$

où l'on a posé

$$\bar{\gamma}_0 = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} c_{e-1}^{e} \gamma_0^{e-1}.$$

On a donc

$$\delta = f(e-1),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = \left(\frac{D(\varepsilon)}{p}\right)^e \left[\frac{N_\varepsilon(\bar{\gamma}_0) + \ldots}{p}\right].$$

2. Si p n'est pas un nombre de ramification du corps $K(x)$, on a

$$e = 1, \qquad f = n, \qquad \delta = 0, \qquad D_0 = D(\varepsilon).$$

Or $\left(\frac{D_0}{p}\right)$ est égal à $+1$ et à -1 suivant que $\sqrt{D(\varepsilon)}$ est rationnel ou non dans le domaine de p, c'est-à-dire suivant qu'il conserve ou non sa valeur par une permutation circulaire des racines $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$; on a donc

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{n-1}.$$

Si $f(x)$ est décomposable en un produit de h facteurs irréductibles dans le domaine de p, on a

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{n-h}.$$

Ces formules s'appliquent même si p est égal à 2, à condition de poser

$$\left(\frac{D}{2}\right) = i^{\frac{D-1}{2}} = (-1)^{\frac{D-1}{4}}.$$

3. Supposons maintenant que p soit un nombre de ramifications du corps $K(x)$, l'ordre e de ramification n'étant pas divisible par p. En désignant par la notation $\left\{\frac{\gamma}{p}\right\}$ le plus petit reste (égal à $+1$ ou à -1) de la division de $\gamma^{\frac{p^f-1}{2}}$ par p, on a

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{e(f-1)} \left\{\frac{\bar{\gamma}_0}{p}\right\} = (-1)^{e(f-1)} \left\{\frac{(-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e \gamma_0^{e-1}}{p}\right\}.$$

On a alors :

I. e pair :

$$\delta \equiv f \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = \left\{\frac{(-1)^{\frac{e}{2}} \gamma_0}{p}\right\}.$$

II[a]. e impair, f pair :

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = -1.$$

II[b]. e impair, f impair :

$$\delta \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = \left(\frac{(-1)^{\frac{e-1}{2}} e}{p}\right).$$

Enfin le cas général se résout d'une manière analogue.

I[a]. e pair, $\bar{e}$ impair :

$$\delta \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{\frac{n(p-1)}{4}}.$$

I[b]. e pair, $\bar{e}$ pair :

$$\delta \equiv f \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{\frac{n(p-1)}{4}} \left\{\frac{\gamma_0}{p}\right\}.$$

II[a]. e impair, $\bar{e}$ impair :

$$\delta \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{f-1+\frac{(n-f)(p-1)}{4}} \left\{\frac{c_{\bar{e}-1}}{p}\right\}.$$

II[b]. e impair, $\bar{e}$ pair :

$$\delta \equiv f \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

$$\left(\frac{D_0}{p}\right) = (-1)^{f-1+\frac{(n-f)(p-1)}{4}} \left\{\frac{c_{\bar{e}-1}}{p}\right\} \left\{\frac{\gamma_0}{p}\right\}.$$

Mirimanoff (*D.*) et *Hensel* (*K.*). — Sur la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-h}$ et la loi de réciprocité. (86-87).

Dans une lettre à M. K. Hensel, M. D. Mirimanoff démontre la loi de réciprocité de Legendre comme conséquence de la relation $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-h}$ démontrée dans le n° 2 du Mémoire précédent. Dans une lettre à M. D. Mirimanoff, M. K. Hensel étend cette démonstration au théorème supplémentaire relatif au nombre premier 2.

Poincaré (*H.*). — Sur les invariants arithmétiques (89-150).

1. Ce Mémoire se rapporte à de nombreuses catégories de fonctions, les fonctions fuchsiennes, les fonctions abéliennes, les fonctions elliptiques et d'autres fonctions qui leur sont plus ou moins apparentées; elles jouissent de propriétés arithmétiques analogues aux séries infinies introduites par Lejeune-Dirichlet et qui ont servi à ce géomètre pour déterminer le nombre des classes des formes quadratiques d'un déterminant donné.

2. *Invariants des formes linéaires.* — Une forme linéaire

$$ax + by,$$

où a et b sont dans un rapport imaginaire, possède des *invariants* arithmétiques : ce sont des fonctions uniformes des deux coefficients qui ne changent pas quand on remplace la forme linéaire par sa transformée par une substitution linéaire quelconque à *coefficients entiers*. L'exemple le plus simple est fourni par la série suivante, absolument convergente pour $k > 2$,

$$\Phi_k = \sum \frac{1}{(am+bn)^k},$$

où m et n peuvent prendre tous les systèmes de valeurs entières possibles, à l'exception du système $m = 0$, $n = 0$. Si l'on considère les fonctions elliptiques de Weierstrass obtenues en prenant

$$2\omega = a, \qquad 2\omega' = b,$$

on a

$$\Phi_4 = \frac{g_2}{3.4.5}, \qquad \Phi_6 = \frac{g_3}{4.5.7}, \qquad \Phi_8 = \frac{g_2^2}{400.3.7}, \qquad \cdots$$

Plus généralement, toute fonction uniforme $\varphi(a, b)$ satisfaisant à la relation

$$\varphi(a, b) = \varphi(\alpha a - \beta b, \gamma a + \delta b),$$

où α, β, γ, δ sont des entiers quelconques, tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

est un invariant arithmétique; c'est une fonction uniforme de g_2 et g_3.

Si $\varphi(a, b)$ est une fonction homogène de degré $-k$, la fonction $\varphi(z, 1)$ est une fonction thêtafuchsienne correspondant au groupe fuchsien particulier qui engendre les fonctions modulaires. On a en effet

$$\varphi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, 1\right) = (\gamma z + \delta)^k \varphi(z, 1).$$

On sait que certaines fonctions thêtafuchsiennes peuvent être représentées par des séries thêtafuchsiennes de la forme

$$\Theta(z) = \Sigma(\gamma z + \delta)^{-2k} \mathrm{H}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, 1\right),$$

où $\mathrm{H}(x, y)$ désigne une fonction rationnelle homogène d'ordre $-2k$ satisfaisant à certaines conditions.

La fonction thêtafuchsienne $\Phi_k(z, 1)$ *n'est pas* représentable par une série thêtafuchsiennne. Cependant, si l'on considère la série thêtafuchsienne engendrée par la fonction rationnelle

$$\mathrm{H}(x, y) = \frac{1}{(x - \xi y)^{2k}},$$

où le nombre imaginaire ξ tend vers zéro, par exemple de manière que sa partie imaginaire soit positive, on trouve, comme partie principale, à un facteur près ne dépendant pas de z, la série

$$\sum \frac{1}{(\alpha z - \beta)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma z + \delta}{\alpha z - \beta}},$$

qui conduit à l'invariant arithmétique nouveau

$$\sum \frac{1}{(\alpha a - \beta b)^{2k}} e^{2i\pi\frac{\gamma a - \delta b}{\alpha a - \beta b}}.$$

On peut de même, en partant d'une fonction $\mathrm{H}(x, y)$ un peu plus compliquée et par des passages à la limite, arriver à l'invariant

$$\sum \frac{1}{(\alpha a + \beta b)^{2k}},$$

où α et β sont premiers entre eux et qui ne diffère de Φ_{2k} que par le facteur constant $\sum \frac{1}{m^{2k}}$.

Ainsi donc l'invariant Φ_{2k}, s'il n'est pas représentable par une série thêtafuchsienne, peut néanmoins être regardé comme une dégénérescence d'une telle série.

3. *Relations avec les fonctions fuchsiennes.* — On sait qu'à tout groupe fuchsien de genre zéro, on peut faire correspondre une fonction fuchsienne particulière $x(z)$, telle que toute fonction thêtafuchsienne de z soit de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^h X,$$

X désignant une fonction rationnelle de x. Dans le cas particulier du groupe modulaire on peut prendre

$$x = f\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}.$$

Outre les séries thêtafuchsiennes l'auteur, dans son Mémoire fondamental des *Acta mathematica* (t. I), a considéré des fonctions $\Lambda(z)$ définies dans le cas particulier qui nous intéresse par la formule

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{x^\lambda (x-1)^{\lambda_1}}{F(x)} R(x);$$

dans cette formule $R(x)$ est une fonction rationnelle où le dénominateur est de degré au moins égal au numérateur et ne contient aucun des facteurs x et $x-1$; $F(x)$ est un polynome de degré p; les entiers λ, λ_1 et p sont de plus les valeurs à une unité près par excès des fractions $\frac{h}{2}$, $\frac{2h}{3}$, $\frac{h}{6}$, exception faite pour

$$h = 6n + 5,$$

auquel cas on a

$$p = n + 2.$$

Les fonctions thêtafuchsiennes de première espèce, c'est-à-dire qui restent toujours finies, sont de la forme

$$\Theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{h+1} \frac{F(x)}{x^\lambda (x-1)^{\lambda_1}},$$

où $F(x)$ est un polynome de degré $p-2$, les entiers λ, λ_1 et p ayant les mêmes significations que plus haut.

Si l'on donne à h une valeur fixée une fois pour toutes, on voit qu'il existe entre les résidus de $\Lambda(z)$ exactement autant de relations linéaires qu'il y a de fonctions thêtafuchsiennes indépendantes de première espèce, à savoir $p-1$.

La dérivée $\frac{d^{2h+1}\Lambda}{dz^{2h+1}}$ est une fonction thêtafuchsienne, mais la réciproque n'est pas vraie. Si l'on intègre $2h+1$ fois par rapport à z la fonction $\Theta(z)$, on obtient une fonction $M(z)$ en général non uniforme, et jouissant de la propriété

suivante :

$$M\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=(\gamma z+\delta)^{-2h}M(z)+(\gamma z+\delta)^{-2h}P(z),$$

où $P(z)$ est un polynome entier en z de degré $2h$.

Il y a là une analogie remarquable avec la théorie des fonctions abéliennes; les fonctions Θ jouent le rôle des expressions algébriques à intégrer, les fonctions M jouent le rôle des intégrales abéliennes, les polynomes P le rôle des périodes. D'ailleurs, on retrouverait les intégrales abéliennes elles-mêmes si l'on prenait $h=0$ et si l'on remplaçait le groupe modulaire par certains groupes fuchsiens convenablement choisis.

Si h est >0, on distingue parmi les fonctions $M(z)$:

1° Les intégrales de première espèce, qui ne deviennent jamais infinies : il y en a $p-1$ indépendantes;

2° Les intégrales de deuxième espèce qui deviennent infinies, mais n'ont d'autres singularités que des pôles; il y en a également $p-1$ indépendantes, c'est-à-dire dont une combinaison linéaire ne se réduit pas à une fonction $A(z)$ plus une intégrale de première espèce.

Quant aux périodes P, le nombre de leurs coefficients arbitraires est $2p-2$, double de celui des intégrales de première espèce.

On pourrait encore pousser plus loin l'analogie avec la théorie des intégrales abéliennes.

On peut des résultats précédents conclure la condition nécessaire et suffisante pour l'identité de deux fonctions thètafuchsiennes; c'est :

1° Que les infinis soient les mêmes avec les mêmes résidus;

2° Que les périodes soient les mêmes.

4. *Invariants des formes quadratiques définies.* — Si l'on considère deux formes linéaires simultanées $ax+by$ et $a'x+b'y$, toute fonction uniforme des quatre coefficients a, b, a', b' qui reste invariante quand les deux formes subissent une *même* substitution linéaire à coefficients entiers est un invariant arithmétique. Si elle est symétrique, ce sera un invariant de la forme quadratique $(ax+by)(a'x+b'y)$. En particulier, les fonctions uniformes de $z=\frac{a}{b}$ et $z'=\frac{a'}{b'}$ telles qu'on ait

$$F\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{\alpha' z'+\beta'}{\gamma' z'+\delta'}\right)=F(z, z'),$$

sont la généralisation des fonctions fuchsiennes. Considérons une fonction rationnelle $H(a, b, a', b')$ homogène de degré $-4m$ par rapport aux quatre variables a, b, a', b'; la série

$$\Theta(a, b, a', b')=\Sigma H(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b, \alpha a'+\beta b', \gamma a'+\delta d'),$$

si elle est convergente, est un invariant arithmétique. La fonction $\Theta(a,b,a',b')$ admet pour points singuliers essentiels tous les points satisfaisant à l'équation

$$Q[z_0(a-z'_0 b), a-z_0 b, z_0(a'-z'_0 b'), a'-z'_0 b']=0,$$

où $Q(a, b, a', b')$ désigne le dénominateur de la fonction rationnelle H, et où z_0 et z'_0 sont deux nombres *réels* quelconques. En général, les points singuliers essentiels forment des espaces lacunaires.

Si la fonction Θ est un invariant de la forme quadratique

$$(ax + by)(a'x - b'y),$$

l'équation qui donne les points singuliers essentiels se décompose, et l'on obtient simplement les points par lesquels l'un des rapports $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a'}{b'}$ est réel. Dans ce cas, la série Θ représente quatre fonctions différentes suivant les signes des parties imaginaires de $\frac{a}{b}$ et de $\frac{a'}{b'}$. En général, il n'existe, entre quatre fonctions Θ correspondant à quatre fonctions rationnelles H pour lesquelles m a la même valeur, aucune relation rationnelle homogène identique, comme on aurait pu s'y attendre en généralisant un théorème relatif aux séries thêtafuchsiennes.

On peut rattacher ces invariants à certaines fonctions apparentées aux fonctions elliptiques. Considérons la fonction

$$F_{pq}(x, x') = \sum \frac{1}{(x - ma - nb)^p (x' - ma' - nb')^q},$$

où p et q sont deux entiers positifs dont la somme est supérieure à 2. Si $q = 1$, on a

$$x' \frac{\partial F_{p1}}{\partial x} + a' \frac{\partial F_{p1}}{\partial a} + b' \frac{\partial F_{p1}}{\partial b} = \sum \frac{-p}{(x - ma - nb)^{p+1}},$$

et le second membre est une fonction elliptique. Plus généralement,

$$\frac{\partial F_{p,q-1}}{\partial x'} = (1 - q) F_{pq}.$$

Le produit

$$F_{pq}(x, x')\, \sigma^p(x, a, b)\, \sigma^q(x', a', b'),$$

où $\sigma(x, a, b)$ est la fonction de Weierstrass ayant pour périodes a et b, reste fini pour toutes les valeurs des variables (sauf si l'un des rapports $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ devient réel).

Enfin, quand les rapports $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ sont imaginaires conjugués, on peut donner dans l'invariant

$$\sum \frac{1}{(ma - nb)^s (ma' - nb')^s}$$

à l'exposant s des valeurs réelles entières, comme l'a fait Dirichlet, ce qui est impossible si les rapports $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ sont quelconques.

5. *Relations avec les fonctions abeliennes.* — En changeant les notations et désignant par

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

une forme quadratique définie, l'invariant précédent de Lejeune-Dirichlet s'écrit

$$J(s) = \sum \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s};$$

mais on pourrait envisager aussi bien la série plus générale

$$\sum \varphi(am^2 + 2bmn + cn^2).$$

et en particulier

$$F(q) = \Sigma q^{am^2-2bmn-cn^2}.$$

Cet invariant, considéré d'ailleurs par Dirichlet lui-même, aurait pu lui servir tout aussi bien que $J(s)$; on a du reste

$$\Gamma(s)\,J(s) = \int_0^\infty z^{s-1}[F(e^{-z})-1]\,dz.$$

L'invariant $F(q)$ se retrouve en faisant $x=y=0$ dans la fonction abélienne

$$\Theta(x,y) = \Sigma e^{(mx-ny)i} q^{am^2-2bmn+cn^2}.$$

De même que Lejeune-Dirichlet considère la manière dont se comporte $J(s)$, lorsque s tend vers 1, l'auteur cherche comment se comporte $F(q)$, lorsque q tend vers 1. Si l'on pose $q=e^{-t}$, il montre, par des considérations ingénieuses tirées de la théorie de la propagation de la chaleur, que la fonction Θ a pour valeur principale

$$\Theta = \frac{2\pi}{Et}\Sigma e^{-P},$$

où

$$P = \frac{1}{E^2 t}[a(y-2k'\pi)^2 - 2b(y-2k'\pi)(x-2k\pi) + c(x-2k\pi)^2],$$

$$E = 2\sqrt{ac-b^2};$$

par conséquent, en faisant

$$x=y=0,$$

on a sensiblement, pour t très petit,

$$F(q) = \frac{2\pi}{Et}.$$

L'auteur montre comment ce résultat permettrait de retrouver de nombreux théorèmes relatifs aux formes quadratiques. Il part, par exemple, de la formule due à Dirichlet,

$$\Sigma\Sigma q^{P} = 2\sum\left(\frac{n}{p}\right)q^{nn'},$$

où P désigne une forme quadratique à indéterminées entières. Dans le premier membre, la sommation est étendue, d'une part, à toutes les formes proprement primitives de déterminant

$$-p\,(p \text{ premier} = 4\nu - 3),$$

non équivalentes, d'autre part, à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées qui ne rendent pas la forme P égale à un entier divisible par 2 ou par p. Dans le second membre, la sommation s'étend à tous les entiers n et n impairs et premiers à p. En faisant tendre q vers 1, on arrive à la formule de Lejeune-Dirichlet,

$$h = \frac{2\sqrt{p}}{\pi}\sum\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n},$$

où h désigne le nombre des classes. On retrouve d'une manière analogue l'autre

formule de Lejeune-Dirichlet,

$$h = A - B,$$

A désignant le nombre des restes quadratiques et B celui des non-restes compris entre o et $\frac{p}{2}$.

6. *Invariants des formes quadratiques indéfinies.* — On ne peut pas, dans le cas des formes quadratiques indéfinies, construire des invariants arithmétiques qui soient des fonctions *continues* des coefficients de la forme. Néanmoins, pour un déterminant entier déterminé D, on peut construire encore des invariants arithmétiques.

Si $t + u\sqrt{D}$ est la plus petite solution de l'équation de Pell,

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

la forme quadratique $am^2 + 2bmn + cn^2 = F(m, n)$ admet la substitution linéaire

$$m' = (t - bu)m - cun, \qquad n' = aum + (t + bu)n.$$

Si l'on regarde m et n comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, les différents couples de valeurs entières de m et de n forment les sommets d'un *réseau* de parallélogrammes; les points (m', n') sont aussi les sommets de ce même réseau et la droite joignant l'origine au point (m', n') est la transformée homographique de la droite joignant l'origine au point (m, n). Les droites définies par l'équation $am^2 + 2bmn + cn^2 = 0$ partagent le plan en quatre régions Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, et deux droites transformées sont situées dans la même région. Soit ω_0 l'angle limité par une demi-droite quelconque OA_0 et sa transformée par la transformation homographique.

La série

$$\Sigma[F(m, n)],$$

étendue à tous les points du réseau intérieurs à ω_0, représente un invariant, dans le cas où elle converge, φ désignant une fonction uniforme; on suppose essentiellement que les coefficients de $F(m, n)$ sont entiers. Dans ce cas, d'ailleurs, la somme de la série est indépendante de l'angle ω_0 choisi.

On peut obtenir certaines de ces séries en partant des expressions (non convergentes)

$$H(x, y; \lambda, \mu) = \Sigma \varepsilon_{mn} q^{am^2 + 2bmn + cn^2} x^m y^n,$$

où l'on a

$$\varepsilon_{mn} = +1 \quad \text{si} \quad \lambda m + \mu n \geq 0,$$
$$\varepsilon_{mn} = -1 \quad \text{si} \quad \lambda m + \mu n < 0.$$

La série

$$\Theta(x, y) = H(x, y; 0, 1) - H(x, y; au, t + bu)$$

est convergente et représente l'un des invariants définis plus haut.

Les séries H sont liées aux fonctions elliptiques. On a, en effet, dans le cas où les entiers α, β, λ, μ sont liés par la relation

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 1,$$

l'identité

$$H(x, y; \lambda, \mu) - x^\alpha y^\beta q^{a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2} H(x q^{2(a\alpha + b\beta)}, y q^{2(b\alpha + c\beta)}; \lambda, \mu)$$
$$= \Sigma q^{am^2 + 2bmn + cn^2} x^m y^n,$$

la série du second membre étant étendue à toutes les valeurs entières telles que $\lambda m + \mu n = 0$. Or, cette série n'est autre, à un facteur près de la forme $x^{m_0} y^{n_0}$, qu'une série thêta-elliptique par rapport à la variable $\log \frac{x^\mu}{y^\lambda}$.

Plus généralement, si $\lambda\alpha + \mu\beta$ est quelconque, λ et μ étant toujours entiers et premiers entre eux, la même différence s'exprimera encore au moyen des fonctions thêta-elliptiques.

Il résulte de ce qui précède que, en revenant à l'invariant

$$\Theta(x, y) = \mathrm{H}(x, y; 0, 1) - \mathrm{H}(x, y; au, t + bu),$$

la différence

$$x q^a \Theta(x q^{2b}, y q^{2c}) - \Theta(x, y),$$

ainsi que la différence

$$y q^c \Theta(x q^{2b}, y q^{2c}) - \Theta(x, y),$$

s'expriment par les séries thêta-elliptiques. Si

$$a = c = 1, \qquad b > 0,$$

on retrouve les fonctions thêta-elliptiques ordinaires.

L'auteur arrive à une fonction arithmétique intéressante en donnant, dans $\Theta(x, y)$, aux variables x et y des valeurs égales à des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, p étant un nombre premier donné, c'est-à-dire en posant

$$x = e^{\frac{2i\pi}{p}\xi} = z^\xi, \qquad y = e^{\frac{2i\pi}{p}\eta} = z^\eta,$$

où

$$z = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Mais, pour arriver à des résultats intéressants, il faut supposer, non plus que

$$t + u\sqrt{\mathrm{D}}$$

est la plus petite solution de l'équation de Pell,

$$x^2 - \mathrm{D}y^2 = 1,$$

mais la plus petite solution telle qu'on ait

$$t \equiv 1, \qquad u \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

La fonction $\Theta(x, y)$ est, dans des cas étendus, non identiquement nulle. Si l'on fait subir à m et n une transformation linéaire, en posant

$$m = \alpha m' + \beta n', \qquad n = \gamma m' + \delta n',$$
$$am^2 + 2bmn + cn^2 = a' m'^2 + 2b' m' n' + c' n'^2,$$
$$\xi m + \eta n = \xi' m' + \eta' n',$$

la fonction

$$\Theta(x, y) = \Theta(a, b, c; \xi, \eta)$$

se change en une fonction

$$\Theta(a', b', c'; \xi', \eta').$$

Ces deux fonctions sont égales si l'on a

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p);$$

autrement dit, $\Theta(x, y)$ est un invariant pour le sous-groupe (Kongruenzgruppe) du groupe de transformations linéaires à coefficients entiers défini par les congruences précédentes.

Si l'on désigne par $F(q)$ l'invariant

$$F(q) = \Sigma q^{am^2 - 2bmn + cn^2},$$

la somme étant étendue à tous les entiers (m, n) correspondant à des points situés dans l'angle ω_0 défini par

$$n \geqq 0, \qquad aum + (t + bu)n < 0 \qquad (au < 0),$$

on a entre $F(q)$ et $\Theta(x, y)$ la relation suivante :

$$2 i \pi\, F(q) = \int_0^\infty \Theta(e^{-iauz}, e^{i(t+bu)z}) \frac{dz}{z}.$$

Klein (*F.*). — Sur la résolution des équations générales du cinquième et du sixième degré (extrait d'une lettre à M. K. Hensel). (151-174).

Dans cet article, l'auteur développe une théorie de la résolution de l'équation générale du sixième degré, dont il avait esquissé les grandes lignes dans une Note publiée six ans auparavant dans les *Rendiconti della Accademia dei Lincei*, t. VIII. Cette théorie est la généralisation de la théorie aujourd'hui classique de la résolution de l'équation générale du cinquième degré développée dans les *Vorlesungen über das Ikosaeder*. L'auteur commence par rappeler cette théorie dans ses traits essentiels en insistant sur certains côtés qui ne semblent pas avoir été remarqués comme ils le méritaient.

L'équation icosaédrique est une équation du soixantième degré dépendant d'un paramètre X, et est de la forme

$$\frac{H^3(x)}{1728 f^5(x)} = X:$$

c'est une généralisation de l'équation binome; ses 60 racines se déduisent de l'une d'entre elles par les 60 substitutions linéaires du groupe de l'icosaèdre. Ce groupe est isomorphe holoédrique au groupe des substitutions paires de cinq lettres. Cette propriété permet de ramener la résolution d'une équation du cinquième degré, à celle d'une équation icosaédrique; l'inconnue x de cette équation est une certaine fonction algébrique des cinq racines $z_1, z_2, \ldots, z_5$ de l'équation du cinquième degré et le paramètre X est une fonction rationnelle des coefficients de cette équation et de la racine carrée de son discriminant.

Quant à l'expression de x au moyen des z, il est remarquable qu'il est impossible de prendre pour x une fonction *rationnelle* des z, des coefficients de l'équation du cinquième degré et de la racine carrée de son discriminant; il est nécessaire d'introduire au moins une irrationnelle nouvelle, *accessoire;* cela tient au fond, comme le montre l'auteur, à ce que, si l'on cherche à passer du groupe

des substitutions linéaires de l'icosaèdre à un groupe de substitutions linéaires et homogènes à deux variables qui lui soit isomorphe, il est nécessaire de prendre *au moins* 120 substitutions.

Il se trouve alors qu'on peut prendre pour x une fonction rationnelle de $z_1, z_2, \ldots, z_5$, des coefficients de l'équation du cinquième degré, de la racine carrée de son discriminant, *et de la racine carrée d'une certaine expression formée rationnellement au moyen des coefficients de l'équation et de la racine carrée de son discriminant.*

On arrive à trouver x, par exemple, par le procédé suivant :

On remarque que, lorsque x_1, x_2 sont soumis aux 120 substitutions linéaires et homogènes du groupe de l'icosaèdre, les coefficients A_0, A_1, A_2 de la forme quadratique

$$A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$$

sont soumis à un groupe de 60 substitutions linéaires ternaires, isomorphe au groupe des substitutions paires de cinq lettres. D'autre part, il est possible de former trois fonctions rationnelles des racines $z_1, z_2, \ldots, z_5$ qui soient soumises exactement aux mêmes substitutions linéaires que les A quand on effectue sur les z les 60 substitutions paires. En mettant à la place des A ces trois fonctions rationnelles des z, on obtient une équation

$$A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

invariante quand on effectue simultanément sur x_1 et x_2, d'une part, sur les z, d'autre part, les substitutions respectivement correspondantes du groupe homogène de l'icosaèdre et du groupe des substitutions paires de cinq lettres. En même temps que cette équation, restent invariantes ses racines; en particulier la racine

$$x = \frac{x_1}{x_2} = \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{A_1}.$$

L'irrationalité accessoire est ici

$$\sqrt{A_0^2 + A_1 A_2},$$

et elle ne peut être évitée, de quelque manière qu'on procède.

Une généralisation de cette méthode consistera à ramener la résolution d'une équation donnée à celle d'un système de p équations à p inconnues de la forme

$$F_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = X_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_p(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = X_p,$$

les F étant des fonctions bien déterminées de leurs arguments, les X des paramètres et les différentes solutions du système se déduisant de l'une d'entre elles par les substitutions d'un groupe linéaire (dont les F sont, d'ailleurs, des invariants absolus). Dans chaque cas, on cherchera à donner à p la moindre valeur possible. Le groupe de substitutions linéaires considéré devra être isomorphe au groupe de l'équation à résoudre.

Dans le cas de l'équation générale du sixième degré, l'auteur avait développé une méthode de résolution fondée sur la considération d'un groupe de substitutions linéaires à trois variables, ou encore d'un groupe de substitutions linéaires homo-

gènes quaternaires. Mais la découverte, en 1889, d'un groupe de substitutions linéaires à deux variables, le groupe de Valentiner, formé de 360 substitutions et isomorphe au groupe des 360 substitutions paires de six lettres, permet d'indiquer une méthode plus simple. Comme on ne peut pas trouver un groupe de substitutions linéaires et homogènes ternaires isomorphe au groupe de Valentiner et qui ait moins de $3.360 = 1080$ substitutions, ici encore les deux inconnues ξ_1, ξ_2 ne pourront pas être des fonctions rationnelles des six racines $z_1, \ldots, z_6$, des coefficients de l'équation du sixième degré et de la racine carrée de leur déterminant. Il sera nécessaire d'introduire des irrationnelles accessoires, que l'expérience montre être des racines carrées et des racines cubiques.

La méthode, calquée sur celle qui a été exposée dans le cas du cinquième degré, est essentiellement la suivante :

On remarque que, lorsque x_1, x_2, x_3 sont soumis aux 1080 substitutions du groupe de Valentiner homogène, les coefficients de la forme ternaire

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + \ldots$$

subissent 360 substitutions linéaires, qui correspondent d'une façon univoque aux 360 substitutions paires de six lettres. D'autre part, il est possible de former dix fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \ldots, z_6$ qui, par chacune des substitutions paires effectuées sur les z, subissent exactement la même substitution linéaire que les a_{ijk}. En remplaçant les a_{ijk} par ces dix fonctions rationnelles des z, on obtient une équation

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2x_2 + \ldots = 0$$

qui est *invariante* lorsqu'on effectue simultanément les substitutions paires sur les z et les substitutions correspondantes du groupe de Valentiner sur les x. Si l'on considère maintenant cette équation comme représentant une cubique en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, les coordonnées non homogènes d'un des points d'inflexion de cette cubique sont également *invariantes*. Ces coordonnées sont des fonctions rationnelles des z et des racines carrées et cubiques, qui s'introduisent dans la recherche des points d'inflexion d'une cubique. Ces racines carrées et cubiques, qui sont les irrationnelles accessoires, portent d'ailleurs sur des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation du sixième degré et de la racine carrée de son discriminant.

Le groupe de Valentiner admet trois invariants absolus F, H, Φ, respectivement de degrés 6, 12 et 30 par rapport à x_1, x_2, x_3. Les équations auxquelles se ramène la résolution de l'équation du sixième degré sont alors de la forme

$$\frac{\Phi}{F^5} = v, \qquad \frac{H}{F^2} = w,$$

où v et w sont deux paramètres qui se calculent rationnellement au moyen des coefficients de l'équation du sixième degré et des autres irrationalités introduites. Une fois les valeurs de $\frac{x_1}{x_3}$ et $\frac{x_2}{x_3}$ calculées, il ne reste plus qu'à exprimer $z_1, z_2, \ldots, z_6$ au moyen de ces quantités.

Quant à la résolution transcendante du système des deux équations en $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, M. Lachtin l'a ramenée en principe à l'intégration d'un système de trois équations aux dérivées partielles simultanées linéaires du deuxième ordre, à une fonction inconnue de deux variables ; M. Gordan a déterminé complètement les coefficients des équations de ce système.

Frobenius (*G.*). — Sur la théorie des équations linéaires. (175-180).

Soit

$$a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \ldots + a_{\alpha n}x_n = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

un système de r équations linéaires et homogènes indépendantes, et soit

$$x_1 = b_{\alpha 1}, \qquad x_2 = b_{\alpha 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n = b_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s = n - r)$$

un système *complet* de solutions de ces équations. Alors les équations

$$b_{\alpha 1}x_1 + b_{\alpha 2}x_2 + \ldots + b_{\alpha n}x_n = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s)$$

sont également indépendantes.

Les deux matrices

(R) $\qquad a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r;\ \beta = 1, \ldots, n),$

(S) $\qquad b_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, s;\ \beta = 1, \ldots, n)$

sont dites *adjointes;* elles ont toutes les deux n colonnes et ont respectivement r et s lignes, avec

$$r + s = n.$$

Partageons les deux matrices R et S en matrices partielles en séparant les r' premières colonnes des s' dernières

$$(r' + s' = n),$$

d'après le schéma

$$R = A \mid B,$$
$$S = C \mid D.$$

L'auteur énonce et démontre le théorème suivant :

Si ρ *et* σ *sont les* rangs *des matrices* A *et* D, *on a les égalités*

$$\rho - \sigma = r - s' = r' - s.$$

Mertens (*F.*). — Démonstration du théorème, que chaque classe de formes quadratiques binaires primitives à coefficients entiers du genre principal peut s'obtenir par duplication. (181-186).

Ce théorème est démontré par Gauss à l'aide des formes quadratiques ternaires; l'auteur en donne une démonstration qui ne fait appel qu'à la théorie des formes binaires.

Hurwitz (*A.*). — Sur une représentation par des séries infinies du nombre des classes des formes quadratiques binaires. (187-213).

1, 2, 3. *Intégrales doubles projectives.* — Si, dans une intégrale double

$$J = \int\int_G f(u, v)\, du\, dv$$

étendue à une certaine aire G du plan des u, v, on introduit les coordonnées homogènes en posant

$$u = \frac{x}{z}, \qquad v = \frac{y}{z},$$

on obtient

$$J = \int\int_G f(x, y, z)(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy),$$

où la fonction $f(x, y, z)$ homogène de degré -3 est égale à

$$\frac{1}{z^3} f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Si l'on effectue sur les coordonnées une transformation homographique, l'intégrale double ne change pas de valeur et est égale à la nouvelle intégrale

$$\int\int F(X, Y, Z)(X\,dY\,dZ + Y\,dZ\,dX + Z\,dX\,dY),$$

à la condition de poser

$$F(X, Y, Z) = \Delta f(\alpha X + \beta Y + \gamma Z, \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z),$$

où Δ est le déterminant de la substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}$$

qui définit le changement de coordonnées.

En particulier, l'intégrale double projective

$$J = \int\int \frac{d\Lambda}{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3} \qquad (d\Lambda = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$$

est égale à la mesure de l'aire G du plan des (u, v) qui correspond à l'aire F du plan des (x, y, z) par la transformation

$$u = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{\alpha x + \beta y + \gamma z}, \qquad v = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z}{\alpha x + \beta y + \gamma z},$$

les coefficients α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 étant choisis sous l'unique condition que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

soit égal à 1. L'intégrale J est appelée *la mesure de l'aire* F *par rapport à la forme linéaire*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Si l'on prend pour aire F l'aire intérieure à la conique

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

on trouve

$$J = \frac{\pi D}{\sqrt{\Phi(\alpha, \beta, \gamma)^3}},$$

D étant le discriminant de $F(x, y, z)$ et $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ la forme adjointe

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \alpha \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \beta \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Si F est le triangle ayant pour sommet les trois points

$$P_0(x_0, y_0, z_0), \qquad P_1(x_1, y_1, z_1), \qquad P_2(x_2, y_2, z_2),$$

la mesure de l'aire de ce triangle par rapport à la forme linéaire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z$$

est

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \frac{1}{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2)}.$$

4. *Représentation du nombre des classes par une série infinie.* — Soient r, s deux entiers premiers entre eux ; le point

$$x = r^2, \qquad y = rs, \qquad z = s^2$$

est situé sur la conique

$$xz - y^2 = 0.$$

On appelle *corde élémentaire* de cette conique la corde qui joint deux points (r, s), (r_1, s_1) tels qu'on ait

$$rs_1 - sr_1 = \pm 1.$$

Un triangle inscrit à la conique et dont les trois côtés sont des cordes élémentaires est dit *triangle élémentaire*. On obtient tous les triangles élémentaires en considérant chaque solution de l'équation

$$rs_1 - sr_1 = 1$$

et en prenant les trois points

$$(r, s), \qquad (r_1, s_1), \qquad (r + r_1, s + s_1);$$

chaque triangle élémentaire est ainsi obtenu six fois.

Tous les triangles élémentaires remplissent, sans former de lacune et sans empiéter les uns sur les autres, l'aire totale intérieure à la conique

$$xz - y^2 = 0.$$

Par suite, l'aire de la conique est la somme des aires des triangles élémentaires, ces aires étant toutes prises par rapport à une forme linéaire quelconque

$$\alpha x + \beta y + \gamma z,$$

où l'on supposera

$$4\alpha\gamma - \beta^2 > 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \gamma > 0.$$

On obtient ainsi la formule

$$\sum \frac{1}{(\alpha r^2 + \beta rs + \gamma s^2)(\alpha r_1^2 + \beta r_1 s_1 + \gamma s_1^2)[\alpha(r + r_1)^2 + \beta(r + r_1)(s + s_1) + \gamma(s + s_1)^2]}$$
$$= \frac{24\pi}{(\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2})^3}.$$

Cette formule peut être interprétée de la manière suivante :

Si l'on pose

$$\alpha = a, \qquad \beta = 2b, \qquad \gamma = c, \qquad D = ac - b^2,$$

chaque terme du premier membre est de la forme

$$\frac{1}{a'c'(a' + 2b' + c')},$$

en désignant par $a'u^2 + 2b'uv + c'v^2$ la forme quadratique qui résulte de la forme $au^2 + 2buv + cv^2$ par la substitution $\begin{pmatrix} r & s \\ r_1 & s_1 \end{pmatrix}$ de déterminant 1. Toutes ces formes constituent une classe de formes quadratiques définies positives de déterminant D et chaque forme entre $2k$ fois, k ayant les valeurs suivantes :

2 si la classe contient une forme $(a, 0, a)$;

3 si la classe contient une forme $(a, \frac{1}{2}a, a)$;

1 dans les autres cas.

La formule s'écrit donc

$$\frac{3\pi}{2D\sqrt{D}} \frac{1}{k} = \sum_{a,b,c} \frac{1}{ac(a + 2b + c)},$$

la somme du second membre étant étendue à toutes les formes de la classe.

On en déduit la formule

$$\frac{3\pi}{2D\sqrt{D}} h = \sum_{a,b,c} \frac{1}{ac(a + 2b + c)},$$

où la somme du second membre est maintenant étendue à toutes les formes de déterminant $D(a > 0, c > 0)$, et où h désigne le nombre des classes. Il faut néanmoins convenir de compter une demi-fois les classes pour lesquelles $k = 2$, un tiers de fois celles pour lesquelles $k = 3$.

5. *Autres représentations du nombre des classes.* — On peut trouver pour représenter h des séries plus rapidement convergentes que celle qui vient d'être indiquée. Soit comme tout à l'heure $F(x, y, z)$ une forme quadratique de x, y, z, de déterminant D positif; c'est le premier membre de l'équation d'une conique, et les points intérieurs à cette conique sont donnés par

$$F(x, y, z) > 0.$$

L'intégrale double

$$J_\mu = \iint_{(F)} \frac{[F(x, y, z)]^\mu}{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^{2\mu+3}} d\Lambda,$$

où μ désigne un nombre réel plus grand que -1, a pour valeur

$$\frac{\pi D^{\mu+1}}{\mu+1}\,\frac{1}{\Phi^{\mu}(\alpha,\beta,\gamma)\sqrt{\Phi^{3}(\alpha,\beta,\gamma)}}.$$

Cette même intégrale étendue au triangle de sommets (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), lorsque μ est un nombre entier non négatif, peut être regardée comme le produit de deux facteurs. Si l'on pose

$$l^{(0)} = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0, \qquad l^{(1)} = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \qquad l^{(2)} = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2,$$

$$x = t_0 \frac{x_0}{l^{(0)}} + t_1 \frac{x_1}{l^{(1)}} + t_2 \frac{x_2}{l^{(2)}},$$

$$y = t_0 \frac{y_0}{l^{(0)}} + t_1 \frac{y_1}{l^{(1)}} + t_2 \frac{y_2}{l^{(2)}},$$

$$z = t_0 \frac{z_0}{l^{(0)}} + t_1 \frac{z_1}{l^{(1)}} + t_2 \frac{z_2}{l^{(2)}},$$

le premier facteur est égal à

$$\pm \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \frac{1}{l^{(0)}\, l^{(1)}\, l^{(2)}},$$

et le second facteur s'obtient en développant $[F(x, y, z)]^{\mu}$ suivant les puissances de t_0, t_1, t_2 et remplaçant, dans chaque terme du développement, le produit

$$t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2} \quad \text{par} \quad \frac{l_0!\, l_1!\, l_2!}{(l_0 + l_1 + l_2 + 2)!}.$$

Si l'on convient de désigner par la notation $[G(t_0, t_1, t_2)]$ ce que devient la fonction rationnelle entière G de t_0, t_1, t_2 quand on remplace chaque terme

$$t_0^{l_0} t_1^{l_1} t_2^{l_2} \quad \text{par} \quad \frac{l_0!\, l_1!\, l_2!}{(l_0 + l_1 + l_2 + 2)!},$$

et si l'on suppose que la conique

$$F(x, y, z) = 0$$

se réduise à la conique $xz - y^2$, l'intégrale J_μ, étendue au triangle élémentaire défini par une solution de l'équation

$$rs_1 - sr_1 = 1,$$

est égale à

$$\frac{1}{l^{(0)}\, l^{(1)}\, l^{(2)}} \left[\left(\frac{t_0 t_1}{l^{(0)} l^{(1)}} + \frac{t_1 t_2}{l^{(1)} l^{(2)}} + \frac{t_2 t_0}{l^{(2)} l^{(0)}} \right)^{\mu} \right],$$

où l'on a posé

$$l^{(0)} = \alpha r^2 + \beta rs + \gamma s^2, \qquad l^{(1)} = \alpha r_1^2 + \beta r_1 s_1 + \gamma s_1^2,$$
$$l^{(2)} = \alpha (r + r_1)^2 + \beta (r + r_1)(s + s_1) + \gamma (s + s_1)^2.$$

De là on déduit, par le même raisonnement qu'au n° 4, la formule

$$h = \frac{\mu + 1}{\pi} (\tfrac{1}{4} D)^{\mu+1} \sqrt{D} \sum \frac{1}{abc} \left[\left(\frac{t_0 t_1}{ab} + \frac{t_1 t_2}{bc} + \frac{t_2 t_0}{ca} \right)^{\mu} \right],$$

où

$$a = A, \qquad b = A + 2B + C, \qquad c = C,$$

et où la sommation est étendue à tous les systèmes de nombres entiers A, B, C satisfaisant aux conditions

$$A > 0, \qquad C > 0, \qquad AC - B^2 = D.$$

En sommant par rapport aux entiers a, b, c, c'est-à-dire par rapport à tous les systèmes d'entiers positifs satisfaisant à la condition

$$2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2 = 4D,$$

et en convenant de poser

$$\{\rho, \sigma, \tau\} = \sum \frac{1}{a^{\rho+1} b^{\sigma+1} c^{\tau+1}},$$

la formule précédente se change dans la suivante :

$$h = \frac{1}{3\pi} \frac{(\mu+1)!}{(2\mu+2)!} (4D)^{\mu-1} \sqrt{D} \times \sum_{\mu_0, \mu_1, \mu_2} \frac{(\mu-\mu_0)!\,(\mu-\mu_1)!\,(\mu-\mu_2)!}{\mu_0!\,\mu_1!\,\mu_2!} \{\mu-\mu_0, \mu-\mu_1, \mu-\mu_2\}.$$

Wirtinger (*W.*). — Sur une série de Dirichlet. (214-219).

En désignant par lx la détermination du log de x dont le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et π, la série

$$\Phi(x, s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (lx + 2k\pi i)^{-s}$$

définit, lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1, une fonction uniforme de x dans le plan muni d'une coupure joignant le point 0 au point 1. Lorsque $|x|$ est supérieur à 1, cette fonction est développable en une série procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$,

$$\Phi(x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{1}^{\infty} x^{-\nu} \nu^{s-1};$$

cette dernière formule prouve que, pour $|x| > 1$, $\Phi(x, s)$ peut être regardée comme une fonction *entière* de la variable complexe s. On peut définir aussi cette fonction pour toutes les valeurs de x du plan muni de la coupure (0, 1). On a, en effet,

$$\Phi(x, s) = \Phi(a, s) + s \int_x^a \Phi(x, s+1) \frac{dx}{x},$$

et chacun des termes du second membre est une fonction holomorphe de s dans le demi-plan ponr lequel la partie réelle de s est positive. On pourra ainsi de proche en proche définir $\Phi(x, s)$ dans tout le plan de la variable s et obtenir de cette manière une fonction entière par rapport à s, et uniforme par rapport à x dans le plan de la variable x muni de la coupure (0, 1).

De même la série

$$\Phi_1(x, s) = \Sigma'(lx + 2k\pi i)^{-s},$$

où la somme du second membre est étendue à toutes les valeurs entières de k, excepté o, définit, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, une fonction uniforme de x dans le plan muni de la coupure (o, $-\infty$); considérée comme fonction de s, c'est une fonction qui peut être prolongée dans tout le plan et est entière; on a d'ailleurs

$$\Phi(x, s) = (lx)^{-s} + \Phi_1(x, s).$$

Cette fonction est reliée à la fonction $\zeta(s)$ par les deux relations

$$\Phi_1(1, s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\frac{\pi s}{2}\,\zeta(s),$$

$$\Phi_1(1, s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\,\zeta(1-s),$$

d'où résulte l'équation bien connue de Riemann. On peut en déduire la formule

$$\Phi_1(1, s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\,\zeta(1-s) - \frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{(lx)^{-s}\,dx}{1-x},$$

où l'intégrale est étendue à un contour fermé partant de o, tournant dans le sens direct autour de 1 et revenant à o.

Dans tout l'article on donne à u^{-s} la valeur $e^{-s\,lu}$.

Minkowski (*Hermann*). — Le domaine de discontinuité pour l'équivalence arithmétique. (220-274).

Ce Mémoire s'occupe du problème suivant :

On considère toutes les formes quadratiques à n variables et l'on convient d'appeler *équivalentes* deux formes telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire à coefficients entiers, de déterminant égal à 1. Trouver dans la multiplicité A, à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions, des $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients a_{hk} des formes, un domaine B tel que chaque classe de formes quadratiques positives soit représentée par un point de B et aussi, dans le cas où ce point est intérieur à B, par un seul.

§ 1, 2, 3. Étant données deux formes quadratiques positives

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \qquad g = \Sigma b_{hk} y_h y_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on dit que la forme f est plus *haute* que la forme g, ou la forme g plus *basse* que la forme f, si, pour un indice l compris entre 1 et n, on a

$$a_{11} = b_{11}, \quad a_{22} = b_{22}, \quad \ldots, \quad a_{l-1,l-1} = b_{l-1,l-1}, \quad a_{ll} > b_{ll}.$$

Dans chaque classe il existe une forme g telle qu'il n'y en ait pas dans la classe de plus basse que g. Cette forme g est appelée *la plus basse forme* de la classe. Parmi toutes les formes les plus basses possibles, il y en a une et une seule pour laquelle on a

$$b_{12} \geq 0, \quad b_{23} \geq 0, \quad \ldots, \quad b_{n-1,n} \geq 0$$

§ 4. L'auteur appelle forme quadratique *réduite* une forme $\Sigma a_{hk} x_h x_k$ satisfaisant aux inégalités

$$(1) \qquad a_{12} \geq 0, \qquad a_{23} \geq 0, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1,n} \geq 0.$$

et telle de plus que, pour chaque valeur de l et chaque système d'entiers $s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots, s_n^{(l)}$, premiers entre eux dans leur ensemble, on ait

$$(2) \qquad f(s_1^{(l)}, s_2^{(l)}, \ldots, s_n^{(l)}) \geq a_{ll}.$$

Si l'on considère en particulier des formes positives, on voit que dans chaque classe il y a une forme réduite au moins, à savoir la forme la plus basse de la classe. Si aucune des inégalités (1) et (2) ne se réduit à une égalité, la forme réduite ne peut se transformer en une autre forme réduite que par la substitution identique ou la substitution

$$x'_i = - x_i.$$

On appelle *espace réduit* le lieu B des points a_{hk} qui satisfont aux inégalités (1) et (2).

§ 5. Les inégalités (2) sont en nombre infini; l'auteur montre qu'on peut en conserver seulement un nombre fini qui entraîne toutes les autres comme conséquence. Dans la démonstration de ce théorème, l'auteur introduit n constantes

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{3}{4}, \qquad \lambda_3, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n$$

qui vont en décroissant et qui jouissent de la propriété que, pour chaque valeur de m et pour toute forme réduite, on a

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \geq \lambda_m a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}.$$

Il résulte, du fait que les inégalités (1) et celles des inégalités (2) qu'on conserve sont en nombre fini, la conséquence que l'espace réduit B est une pyramide convexe ayant pour sommet le point $f = 0$ et limitée par un nombre fini de plans.

§ 6, 7. Si l'on prend sur les différentes *arêtes* de l'espace réduit un point, ces points représentent un certain nombre de formes déterminées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$. Toute forme réduite peut (d'une ou d'une infinité de manières) être représentée par l'expression

$$f = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots + c_r \varphi_r,$$

où les c sont des constantes positives ou nulles, et réciproquement.

§ 8. L'auteur appelle *surface du déterminant* la surface définie par l'équation $D(f) = 1$, où D désigne le déterminant de la forme quadratique f. Si, en un point de cette surface correspondant à une forme positive, on construit le plan tangent, la surface est, dans tout le domaine des formes positives, du même côté que l'origine par rapport à ce plan tangent.

§ 9. Si l'on désigne par $M(f)$ le minimum de la valeur de f, lorsqu'on donne aux variables des valeurs entières non toutes nulles, ce minimum est un invariant de la classe de f, et l'on a

$$D(f) \geqq \lambda_n [M(f)]^n.$$

Par suite, le rapport $\dfrac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ ne dépasse pas une limite fixe qui ne dépend que de n. Que peut-on savoir de cette limite?

Sa connaissance est liée à celle des formes *extrêmes :* ce sont les formes pour lesquelles le rapport $\dfrac{M(f)}{\sqrt[n]{D(f)}}$ n'augmente pas si l'on fait varier infiniment peu les coefficients de la forme. Ces formes extrêmes jouissent d'une propriété géométrique remarquable. Imaginons, en effet, qu'on mette la forme quadratique positive f sous la forme

$$f = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2,$$

et regardons $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions. Aux valeurs entières des x correspondent les sommets d'un réseau de parallélépipèdes dont chacun a pour volume $\sqrt{D(f)}$. Les sphères ayant ces sommets pour centres et pour rayon commun

$$\frac{1}{2}\sqrt{M(f)}$$

ne se pénètrent pas et sont tout au plus tangentes. Il résulte de là, en particulier, que si γ_n est le volume d'une sphère de rayon 1 dans l'espace à n dimensions, on a

$$\gamma_n \left[\frac{1}{2}\sqrt{M(f)}\right]^n \leqq \sqrt{D(f)};$$

mais il en résulte, en outre, en laissant $M(f)$ fixe et faisant varier les coefficients de f, qu'*on a une forme extrême lorsque le rapport de l'espace rempli par les sphères à l'espace total passe par un maximum.*

§ 10, 11. L'auteur s'occupe alors de la détermination des formes extrêmes, qui est très simplifiée par la propriété de ces formes d'être représentées, une fois ramenées à une forme réduite, par des points situés sur les *arêtes* de l'espace réduit B. Dans les cas $n = 2, 3$, il y a une seule classe de formes extrêmes, celle qui contient la forme

$$2\Sigma x_i^2 + 2\Sigma x_h x_k;$$

dans le cas $n = 4$, il y a, en outre, une deuxième classe de formes extrêmes, à savoir

$$2\Sigma x_i^2 + 2(x_1 + x_2 + x_3)x_4.$$

Le cas de $n = 5$ a été traité par Korkine et Zolotareff, et le cas de $n = 6$ par l'auteur lui-même (même Journal, t. CI).

§ 12, 13. L'auteur s'occupe ensuite de la détermination du volume de l'espace réduit jusqu'à la surface

$$D(f) = D;$$

ce volume est fini et égal à $v_n D^{\frac{n+1}{2}}$, v_n désignant le volume qui correspond à $D = 1$. Pour arriver à la détermination de v_n, l'auteur se sert d'une analyse analogue à celle dont s'est servi Dirichlet pour obtenir le nombre des classes dans la théorie des formes binaires. Il considère d'abord l'expression

$$\Phi(f) = \sigma[D(f)]^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{n}} \sum \frac{1}{[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^{\frac{n}{2}+\sigma}},$$

où la somme est étendue à tous les systèmes de nombres entiers premiers entre eux $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui satisfont aux inégalités

$$\varepsilon \leqq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < G;$$

ε, σ, G sont des constantes telles que

$$\sigma < \frac{1}{2}, \qquad G > 1, \qquad \varepsilon \leqq 1.$$

A l'aide de cette fonction $\Phi(f)$ des $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients a_{hk}, il forme l'intégrale multiple

$$J(\delta) = \int\int\cdots\int \Phi(f)\, da_{11}\, da_{12} \ldots da_{nn},$$

étendue à toutes les formes quadratiques positives réduites satisfaisant aux conditions

$$D(f) \leqq D, \qquad a_{11} \geqq \delta,$$

D et δ étant deux nombres donnés, le second inférieur ou égal à ε.

Cela étant, si l'on fait varier ε, σ et G, de manière à avoir

$$\lim \varepsilon = 0, \qquad \lim \frac{\sigma}{\varepsilon^{\frac{n}{2}}} = 0, \qquad \lim G^{-\sigma} = 0,$$

l'intégrale $J(\delta)$ tend vers une limite égale à

$$\frac{n}{2}\,\frac{\gamma_n}{S_n}\, v_n D^{\frac{n-1}{2}},$$

γ_n désignant le volume de la sphère de rayon 1 dans l'espace à n dimensions et S_n la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

§ 14. Ce théorème permet d'établir une formule de récurrence pour le calcul de v_n, à savoir

$$\frac{n}{2}\,\frac{\gamma_n}{S_n}\, v_n = \frac{n}{n-1}\, v_{n-1},$$

formule qui conduit finalement à la valeur suivante de v_n,

$$v_n = \frac{2}{n-1}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^{2+3+\ldots+n}}\, S_2 S_3 \ldots S_n.$$

2nde Partie

§ 15. La formule précédente permet de démontrer que dans l'espace à n dimensions il existe des distributions de sphères égales entre elles, n'empiétant pas les unes sur les autres, ayant leurs centres aux sommets d'un réseau de parallélépipèdes et telles que l'espace occupé par les sphères soit avec l'espace total dans un rapport supérieur à $\frac{1}{2^{n-1}} S_n$. Pour les distributions qui correspondent aux formes extrêmes

$$f = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

ce rapport est

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n+1}\, \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)},$$

sensiblement inférieur au précédent, dès que n est un peu grand.

§ 16. Le volume v_n est susceptible d'une interprétation *arithmétique*. Considérons, en effet, les formes positives à coefficients *entiers* et soit $H(D)$ le nombre (fini) des *classes* de formes de déterminant D. On a la formule remarquable

$$v_n = \lim \frac{H(1) + H(2) + \ldots + H(D)}{D^{\frac{n+1}{2}}}.$$

D'une manière plus précise, le nombre total

$$H(1) + \ldots + H(D)$$

des classes de formes de déterminant inférieur ou égal à D est compris, si n est égal à 2, entre les deux limites

$$v_2 D^{\frac{3}{2}} \pm \omega_2 D \log D;$$

si n est supérieur à 2, entre les deux limites

$$v_n D^{\frac{n+1}{2}} \pm \omega_n D^{\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}},$$

où ω_n désigne un nombre positif ne dépendant que de n.

Picard (*Émile*). — Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. (275-286).

I. L'auteur part d'une surface de degré m

(1) $$f(x, y, z) = 0,$$

placée arbitrairement par rapport aux axes et n'ayant qu'une ligne double avec points triples, le genre d'une section plane arbitraire de la surface étant désigné par p. Soit

$$\int \frac{Q(x, y, z)\, dx}{f_z'}$$

une intégrale abélienne arbitraire de seconde espèce de la courbe entre x et z, définie par l'équation (1), où Q est un polynome en x, y, z, s'annulant sur la courbe double de la surface. Les périodes de cette intégrale, regardées comme fonctions de y, satisfont à une équation différentielle linéaire E d'ordre $2p$. La condition nécessaire et suffisante pour que la surface ait une connexion linéaire égale à $r+1$ (c'est-à-dire possède r intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce) est que l'équation E admette, comme solutions, r polynomes en y linéairement indépendants, qui sont des périodes distinctes de (2).

Après avoir rappelé ces résultats, l'auteur considère la forme bilinéaire que laisse invariante le groupe de l'équation E; cette forme est à coefficients entiers et de déterminant égal à 1; elle est la somme de deux formes bilinéaires, l'une à $2r$ variables, l'autre à $2(2p-r)$; il en résulte que *r est pair*.

L'auteur tire de là cette autre conséquence que le nombre r_0 des intégrales de différentielles totales de première espèce est inférieur ou égal à $\frac{r}{2}$. En effet, M. Castelnuovo a démontré la formule

$$r_0 = \frac{r}{2}.$$

II. M. Enriques a considéré, dans un Mémoire classique, les adjointes d'ordre supérieur ou égal à $m-3$; l'ensemble des adjointes d'ordre $h \geqq m-3$ découpe sur un plan arbitraire un système linéaire de courbes qui font évidemment partie des adjointes d'ordre h de la section plane de la surface donnée; mais il se peut que ce système linéaire ne forme pas l'ensemble des adjointes et qu'il y ait un défaut ω_h; on a certainement, à partir d'une certaine valeur l,

$$\omega_h = 0;$$

de plus, la somme

$$\sum_{m-3}^{l-1} \omega_h$$

représente la différence $p_g - p_n$ entre le genre géométrique p_g et le genre numérique p_n de la surface.

Ces résultats rappelés, l'auteur considère les $p - \omega_{m-3}$ intégrales distinctes de première espèce

$$\int \frac{Q_h(x, y, z)}{f_z}\,dx,$$

où Q_h, polynome de degré $m-3$, correspond à une adjointe de la surface. Ces intégrales ont, au plus, $2p-r$ périodes distinctes; or, comme d'après un lemme que l'auteur démontre au préalable ce nombre doit être au moins double du nombre des intégrales, on a

$$r \geqq 2\omega_{m-3}.$$

Cette inégalité, rapprochée de l'égalité

$$r = 2(p_g - p_n),$$

due à M. Castelnuovo, montre que ω_{m-3} est égal à $p_g - p_n$ et que, par suite, *tous les défauts ω_{m-2}, ω_{m-1}, ... sont nuls.*

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur les solutions de certaines équations différentielles linéaires considérées comme fonction des points singuliers. (287-294).

Après avoir rappelé les résultats fondamentaux de ses recherches précédentes sur les systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \left(\sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu} \right) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

où les σ substitutions fondamentales $A_1, \ldots, A_\sigma$ du groupe de monodromie sont *données*, et où la matrice intégrale $(y_{i\varkappa})$ est regardée comme une fonction, non seulement de x, mais encore des σ points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$; l'auteur examine le cas où les substitutions fondamentales sont indépendantes des $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$. Dans ce cas-là, les coefficients $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$, considérés comme fonctions des $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ satisfont à certaines relations, nécessaires et suffisantes, que l'auteur établit.

Steinitz (*E.*). — Sur l'attraction des hyperboloïdes. (295-316).

On connaît les deux théorèmes classiques de Chasles sur l'attraction des ellipsoïdes. Si l'espace compris entre deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques est imaginé rempli d'une matière homogène, les points placés à l'intérieur du plus petit ellipsoïde et supposés attirés suivant la loi de Newton ne subissent aucune attraction. De plus, dans le cas où les deux ellipsoïdes sont infiniment voisins, les surfaces de niveau, dans l'espace extérieur aux deux ellipsoïdes, sont les ellipsoïdes homofocaux. L'auteur se propose d'étendre ces théorèmes à toutes les surfaces du second degré.

Si l'on considère un segment de droite AB recouvert d'une masse homogène de densité k, les surfaces de niveau sont les ellipsoïdes de révolution de foyers A et B ; si le point B s'éloigne à l'infini, les surfaces de niveau deviennent des paraboloïdes de révolution de foyer A et d'axe AB ; enfin, si le point B part de l'infini dans l'autre sens pour revenir à distance finie, c'est-à-dire si les deux segments infinis limités par A et B sont recouverts, le premier d'une masse homogène de densité k, le second d'une masse homogène de densité $-k$, les surfaces de niveau sont les hyperboloïdes de révolution de foyers A et B.

Cela suggère une première généralisation des théorèmes de Chasles. Imaginons deux hyperboloïdes à deux nappes homothétiques et concentriques, et supposons, pour fixer les idées, que leur axe transverse commun soit horizontal et orienté de gauche à droite. Si l'on imagine l'espace compris entre les deux nappes de droite rempli d'une masse matérielle homogène de densité k, l'espace compris entre les deux nappes de gauche d'une masse matérielle homogène de densité $-k$, l'auteur démontre, de la même manière que pour le premier théorème de Chasles, que tout point situé dans une des deux régions latérales, c'est-à-dire à droite des nappes de droite ou à gauche des nappes de gauche, ne subit ni attraction ni répulsion. Il imagine ensuite que les deux hyperboloïdes se rapprochent indéfiniment, ce qui revient à considérer un seul hyperboloïde dont la surface serait recouverte d'une masse de densité proportionnelle en chaque point à la distance du centre au plan tangent en ce point, positive sur la nappe de droite, négative sur la nappe de gauche. Alors, en se servant du théorème

d'Ivory, l'auteur démontre que les surfaces de niveau, entre les deux nappes, sont les hyperboloïdes à deux nappes homofocaux à l'hyperboloïde considéré.

On peut retrouver ces résultats et les généraliser de la manière suivante. Considérons une famille de surfaces du second degré à centre, de même espèce (ellipsoïdes ou hyperboloïdes à une nappe ou hyperboloïdes à deux nappes; dans ce dernier cas, nous ne considérerons qu'une des deux nappes). Soit

$$\frac{x^2}{\alpha+t}+\frac{y^2}{\beta+t}+\frac{z^2}{\gamma+t}=1$$

l'équation générale de ces surfaces. Imaginons que l'une d'entre elles, par exemple la surface F_0 correspondant à $t=0$, soit recouverte d'une masse matérielle dont la densité soit, en chaque point, proportionnelle à la distance du centre au plan tangent en ce point. Si l'on établit entre les points de F_0 et ceux de F_t une correspondance par les formules

$$x'=x\sqrt{\frac{\alpha-t}{\alpha}},\qquad y'=y\sqrt{\frac{\beta-t}{\beta}},\qquad z'=z\sqrt{\frac{\gamma+t}{\gamma}},$$

on imaginera la surface F_t également recouverte d'une masse matérielle de manière que les masses qui recouvrent deux portions correspondantes de F_0 et de F_t soient égales. Dans ces conditions, deux surfaces F_a et F_b déterminent dans l'espace trois régions : une région moyenne et deux régions latérales.

Le potentiel du système $F_a - F_b$ *est constant dans chacune des régions latérales; dans la région moyenne, au contraire, les surfaces de niveau sont les surfaces homofocales aux surfaces* F_a *et* F_b.

Dans le cas des hyperboloïdes à deux nappes, le théorème est vrai, même si F_a et F_b sont deux nappes d'espèce différente; lorsque ce sont les deux nappes d'un même hyperboloïde, on retrouve le premier théorème.

Dans le cas des ellipsoïdes, en faisant augmenter b indéfiniment, on retrouve les théorèmes de Chasles.

Les démonstrations des théorèmes énoncés ont exigé l'emploi d'intégrales définies étendues à l'infini; l'auteur, dans les derniers numéros de son article, démontre que ces intégrales ont un sens.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK; Tome CXXX; 1905.

Jung (*Heinrich*). — Certaines fonctions thêta spéciales de quatre variables. (1-25).

Ce Mémoire se rattache à un Mémoire précédent du même auteur publié dans le même Journal (t. CXXVI, p. 1-51), lequel généralisait lui-même certains résultats obtenus par F. Schottky dans un important Mémoire sur les fonctions caractéristiques des aires symétriques planes (même Journal, t CVI, p. 199-268).

Considérons un corps algébrique de genre 2

$$K[p, \sqrt{(p-e_1)\dots(p-e_6)}] = K(p, q)$$

et adjoignons à ce corps la racine carrée z d'une fonction rationnelle $H(p, q)$; l'auteur suppose cette fonction d'ordre 10, admettant un pôle donné π_0 d'ordre 10, six zéros donnés $\pi_1, \dots, \pi_6$ d'ordre 1 et deux autres zéros ρ_1, ρ_2 du second ordre. Le corps algébrique ainsi obtenu

$$K(\sqrt{H}) = K(z)$$

est de genre 6. Il admet six intégrales de première espèce indépendantes : deux $t^{(1)}$ et $t^{(2)}$, qui sont des intégrales de première espèce du corps $K(p, q)$ de genre 2, et quatre qui sont de la forme

$$\int \frac{R(p, q)\,dp}{z}.$$

Les fonctions thêta de deux variables qui appartiennent au corps $K(p, q)$ sont désignées par la notation $\vartheta(v \mid T)$ ou ϑ. Les fonctions qu'on en déduit en doublant les périodes sont désignées par ψ. Quant aux fonctions thêta de six variables qui appartiennent au corps $K(z)$, certaines d'entre elles peuvent être représentées par des sommes de produits d'une fonction ψ par une fonction thêta de quatre variables, désignée par la lettre φ.

Ce sont ces fonctions thêta de quatre variables qu'étudie l'auteur; il suppose que dans ces fonctions φ on remplace les quatre arguments par les quatre intégrales de première espèce de la forme

$$\int \frac{R(p, q)\,dp}{z}$$

supposées prises entre deux points π et π' de la surface de Riemann du corps $K(z)$; il désigne par $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ et $t'^{(1)}$, $t'^{(2)}$ les valeurs de $t^{(1)}$ et $t^{(2)}$ correspondant à ces deux points π et π'.

Les fonctions φ, paires et impaires, sont au nombre de $4^4 = 256$. Chacune admet une caractéristique

$$\begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3, & \nu_4 \end{pmatrix}$$

où les μ et les ν sont égaux à 0 ou $\frac{1}{2}$. L'auteur décompose cette caractéristique en deux parties :

$$k_1 = \begin{pmatrix} \mu_1, & \mu_2 \\ \nu_1, & \nu_2 \end{pmatrix}, \qquad k_2 = \begin{pmatrix} \mu_3, & \mu_4 \\ \nu_3, & \nu_4 \end{pmatrix}.$$

Parmi les caractéristiques k, il y en a six impaires auxquelles l'auteur donne les indices 1, 2, ..., 6 et dix paires auxquelles il donne les indices 123, 124, ..., 456; les caractéristiques d'indices 123 et 456 par exemple sont égales.

Les caractéristiques k_1 sont de la forme $\omega_\alpha \pi_\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) en posant

$$\omega_0 = \pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\omega_3 = \omega_1 \omega_2, \qquad \pi_3 = \pi_1 \pi_2.$$

Cela étant, les 64 fonctions φ sont déterminées par leurs caractéristiques, lesquelles sont de la forme

$$\omega_\alpha \pi_\beta 1, \quad \ldots, \quad \omega_\alpha \pi_\beta 6; \quad \omega_\alpha \pi_\beta 123, \quad \ldots, \quad \omega_\alpha \pi_\beta 156;$$

chacune d'elles appartient à l'une des périodes ω_α. Parmi ces 256 fonctions, 120 sont impaires et 136 sont paires.

L'auteur exprime ces fonctions φ au moyen des fonctions ψ et de certains éléments simples $L(t, t')$ définis par la formule

$$L(t, t') = L[t^{(1)}, t'^{(1)}, t^{(2)}, t'^{(2)}] = \frac{a\,\vartheta[t^{(1)} - t'^{(1)}, t^{(2)} - t'^{(2)}]}{\sqrt{p - e_\alpha}\sqrt{p - e_\alpha}};$$

ϑ est l'une des fonctions thêta impaires qui appartiennent au corps $K(p, q)$; α est l'un des indices 1, 2, ..., 6, convenablement choisi; a est une constante qu'on peut choisir de manière que L soit indépendant du choix de la fonction impaire ϑ.

Bornons-nous à indiquer les résultats relatifs aux fonctions φ qui appartiennent à la période 0.

a. Les fonctions impaires sont de la forme $\varphi_{\pi_\lambda \alpha}$, où λ prend les valeurs 0, 1, 2, 3 et α les valeurs 1, 2, ..., 6. On a

$$\varphi_{\pi_\lambda \alpha} = C_\alpha \sqrt{L(t - t_\alpha)\, L(t' - t_\alpha)}\, \psi_{\pi\alpha}(t - t' - s_\alpha),$$

où s_α désigne la somme des valeurs de l'intégrale t, $t^{(1)}$ et $t^{(2)}$ pour les trois points π_α, ρ_1, ρ_2, cette intégrale étant prise à partir de π_0. Quant à C_α c'est une constante.

b. Les fonctions paires sont données par la formule

$$\varphi_{\pi_\lambda \alpha\beta\gamma} = \frac{C_{\alpha\beta\gamma} E}{L(t - t')} \left[\sqrt{L_{\alpha\beta\gamma} L'_{\delta\varepsilon\zeta}}\, \psi_{\pi_\lambda}(t - t' + s_{\alpha\beta\gamma}) + \sqrt{L'_{\alpha\beta\gamma} L_{\delta\varepsilon\zeta}}\, \psi_{\pi_\lambda}(t - t' - s_{\alpha\beta\gamma})\right]$$

où $s_{\alpha\beta\gamma}$ désigne la somme des valeurs de t pour les cinq points π_α, π_β, π_γ, ρ_1, ρ_2. Quant à $C_{\alpha\beta\gamma}$, c'est une constante; E est un facteur transcendant et l'on a posé

$$L_{\alpha\beta\gamma} = L(t - t_\alpha)\, L(t - t_\beta)\, L(t - t_\gamma),$$
$$L'_{\alpha\beta\gamma} = L(t' - t_\alpha)\, L(t' - t_\beta)\, L(t' - t_\gamma).$$

c. Les zéros des fonctions paires sont désignés par $c_{\pi_\lambda \alpha\beta\gamma}$ et sont donnés par la formule

$$c_{\pi_\lambda \alpha\beta\gamma} = 2k\, C_{\alpha\beta\gamma}\, \psi_{\pi_\lambda}(s_{\alpha\beta\gamma}),$$

où l'on a posé

$$k = \lim_{t=t'} \frac{E \sqrt{L_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}}}{L(t - t')}.$$

d. Enfin les constantes C_α, $C_{\alpha\beta\gamma}$ sont données par les formules suivantes,

$$C_\alpha^4 = \frac{h_0^2\, \Pi(\alpha\beta)_0}{(\alpha\beta)_0(\alpha\gamma)_0(\alpha\delta)_0(\alpha\varepsilon)_0(\alpha\zeta)_0},$$

$$C_{\alpha\beta\gamma}^4 = h_0^2 (\alpha\beta)_0 (\alpha\gamma)_0 (\beta\gamma)_0 (\delta\varepsilon)_0 (\delta\zeta)_0 (\varepsilon\zeta)_0,$$

où h_0 est une constante indépendante des indices α, β, γ et où l'on a posé

$$(\alpha\beta)_0 = \mathrm{L}(t_\alpha - t_\beta).$$

En général, les fonctions thêta de quatre variables dépendent de 10 modules; mais ici il n'y en a que neuf, à savoir les six zéros $\pi_1, \ldots, \pi_6$ de $\mathrm{H}(p, q)$ et les trois modules des fonctions thêta de deux variables (désignées par la lettre ψ). Il en résulte qu'il doit y avoir une équation entre les zéros des fonctions φ, équation qui n'existe pas dans le cas général. L'auteur indique comment on pourrait former cette équation en partant de l'hypothèse que les arguments, étant remplacés par des intégrales de première espèce, ne sont pas absolument indépendants.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires rattachée au problème de Riemann (troisième Mémoire). (26-46).

Ce Mémoire est la suite de deux Mémoires précédents (même Journal, t. CXXIII, p. 138-173; t. CXXIV, p. 292-319). L'objet général de ces Mémoires est l'étude de ce que l'auteur appelle le *problème de Riemann*, qu'on peut formuler de la manière suivante :

Étant donnés, dans le plan de la variable complexe x, σ points a_1, a_2, ..., a_σ qu'on suppose joints au point ∞ par σ coupures; étant données d'autre part σ matrices d'ordre n, A_1, A_2, ..., A_σ, auxquelles on adjoint la matrice

$$\mathrm{A}_{\sigma+1} = \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_2^{-1}\ldots\mathrm{A}_\sigma^{-1};$$

trouver n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uniformes au voisinage de tout point x différent de $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ (et n'admettant comme points singuliers, en dehors de ces $\sigma+1$ points, que des pôles), non indéterminées au voisinage de $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ et subissant, lorsque x tourne dans le sens direct autour de $a_\varkappa$, la substitution $\mathrm{A}_\varkappa$.

Tous les systèmes de fonctions satisfaisant à ces conditions, les points a_1, a_2, ..., a_σ et les substitutions $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\sigma$ étant supposés fixés, sont dits appartenir à la même *espèce* (Art). Le système de fonctions est dit appartenir à la *classe principale* de cette espèce si les fonctions y_i n'admettent aucun point singulier autre que $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$.

L'auteur, dans son premier Mémoire, avait démontré l'existence des systèmes de fonctions d'une espèce donnée dans le cas où les racines des équations fondamentales relatives aux substitutions $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{\sigma+1}$ sont toutes de module égal à l'unité. Il s'était appuyé sur la théorie des fonctions zêtafuchsiennes de Poincaré.

Dans ce nouveau Mémoire l'auteur ne fait aucune hypothèse sur les substitutions $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{\sigma+1}$ et donne une démonstration toute différente de la première et s'appliquant à ce cas plus général. Il appelle *matrice de l'espèce* donnée une matrice $(y_{i\varkappa})$ dont la $\varkappa^{\text{ième}}$ colonne est formée d'un système de n fonctions de l'espèce donnée, le déterminant $(y_{i\varkappa})$ n'étant pas identiquement nul. Si $\omega_1^{(\varkappa)}, \omega_2^{(\varkappa)}, \ldots, \omega_n^{(\varkappa)}$ sont les racines de l'équation fondamentale relative

à A_γ, et si l'on pose

$$r_1^\varkappa = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \omega_1^\varkappa, \quad \ldots, \quad r_n^\varkappa = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log \omega_n^\varkappa,$$

les quantités $r_i^{\varkappa}$ ne sont définies qu'à des entiers près. Choisissons ces quantités d'une manière déterminée, sous la seule condition, toujours possible à réaliser,

$$\sum_{\lambda=1}^{\sigma+1} \sum_{\varkappa=1}^{n} r_\varkappa^\lambda = 0.$$

Il est alors possible de trouver une matrice $(z_{i\varkappa})$ de l'espèce donnée et de la classe principale, telle que, pour chaque système de fonctions servant à former cette matrice, les exposants correspondant aux points singuliers a_λ soient $r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \ldots, r_n^{(\lambda)}$, le déterminant $|z_{i\varkappa}|$ ne s'annulant pour aucun point différent de $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$. Cette matrice est déterminée, sauf qu'on peut encore la multiplier à droite par une matrice constante quelconque de déterminant différent de zéro; on achèvera de la déterminer en ajoutant la condition que pour $x = x_0$ elle se réduit à la matrice unité. Cette matrice satisfait à un système d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(1) \qquad \frac{dz_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}}{x - a_\nu},$$

où les coefficients $A_{\lambda\varkappa}^{(\nu)}$ sont constants.

Lorsque, dans l'équation différentielle (1), on se donne $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, ainsi que les *formes canoniques* $(a_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ des matrices $(A_{i\varkappa}^{(\lambda)})$ pour chacun des $\sigma + 1$ points singuliers $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$ en posant

$$-(A_{i\varkappa}^{(\sigma+1)}) = (A_{i\varkappa}^{(1)}) + \ldots + (A_{i\varkappa}^{(\sigma)}),$$

les coefficients $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ dépendent encore de constantes arbitraires $b_1, \ldots$ dont le nombre N est au plus égal à $n^2\sigma - (\sigma+1)n + 1$. Les substitutions $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma, A_{\sigma+1}$ que subissent les matrices intégrales de (1) pour chaque point singulier sont déterminées *quant à leurs formes canoniques*, mais dépendent encore de N constantes arbitraires $\beta_1, \ldots$. Les β sont des fonctions transcendantes entières des b; mais, de plus, à deux systèmes différents de valeurs des b correspondent deux systèmes différents de valeurs des β.

Cela étant, la démonstration de la possibilité du problème de Riemann revient, les points $a_1, \ldots, a_\sigma$ et les substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ étant donnés, à la démonstration de l'existence de coefficients $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ tels que les substitutions correspondant à l'équation différentielle correspondante (1) soient précisément les substitutions données $A_1, \ldots, A_\sigma, A_{\sigma+1}$. L'auteur donne cette démonstration dans le cas particulier où les diviseurs élémentaires de ces $\sigma + 1$ substitutions sont tous simples et distincts. Dans ce cas, les formes canoniques des $\sigma + 1$ matrices inconnues $(A_{i\varkappa}^{\lambda})$ sont faciles à déterminer (une fois fixées les déterminations des quantités $r_\varkappa^{(\lambda)}$ satisfaisant à la relation $\Sigma r_\varkappa^{(\lambda)} = 0$); elles ne dépendent que des formes canoniques des matrices $A_1, \ldots, A_{\sigma+1}$. Les quantités $A_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ dépendent

alors de N constantes arbitraires; l'auteur montre, en s'appuyant sur la *méthode de continuité* de Poincaré, qu'on peut disposer de ces constantes de manière que les substitutions relatives aux $\sigma + 1$ points singuliers soient précisément les substitutions données.

Cette démonstration a l'inconvénient de ne donner aucun moyen pour le calcul effectif des quantités $A_{i\alpha}^{(k)}$; les séries zètafuchsiennes de Poincaré permettaient ce calcul, mais dans le cas seulement où les substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$, $A_{\sigma+1}$ satisfont aux conditions de convergence de ces séries zètafuchsiennes.

Ce que l'auteur a précédemment démontré sur la manière dont les fonctions y_i dépendent de $a_1, \ldots, a_\sigma$ s'étend au cas général traité dans le présent Mémoire.

Lerch (M.). — Quelques développements en séries de la fonction gamma incomplète. (47-65).

Il s'agit de la fonction

$$Q(a, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \qquad (\omega > 0).$$

On obtient d'abord un certain nombre de développements en partant du développement de la fonction

$$e^{-\frac{\omega}{1-z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) z^\nu,$$

développement convergent pour $|z| < 1$, où l'on a posé

$$\Psi_\nu(\omega) = e^{-\omega} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{\nu-1}{\alpha-1} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!}.$$

On a, quel que soit ν,

$$|\Psi_\nu(\omega)| < e^{-\frac{1}{2}\omega}.$$

On obtient ainsi les formules

$$\omega^{a} Q(-a, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu)},$$

$$\omega^{a} Q(1-a, \omega) = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \Phi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu)},$$

valables lorsque la partie réelle de a est plus grande que 1; puis la formule

$$\frac{Q(a, \omega)}{\Gamma(a)} = e^{-\omega} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \binom{\nu-a}{\nu},$$

valable quand la partie réelle de a est positive.

On arrive à un autre genre de séries en partant de la fonction de la variable réelle ξ,

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+itn+it\xi)}{(c+itn+it\xi)\, \omega^{c+itn+it\xi}},$$

où ω est réel et positif, ainsi que t; c est un nombre réel et positif tel que la partie réelle de $a+c$ soit positive. On obtient

$$Q(a, 1) = \frac{t}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a-c-nti)}{c-nti} - \frac{\Gamma(a)}{e^{\frac{2c\pi}{t}}-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a-c+n)}-1\right)} - \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mc\pi}{t}}\, Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right);$$

la dernière série du second membre, en faisant par exemple

$$c = t = 1,$$

est inférieure à 10^{-230} et peut par suite être négligée. En faisant tendre c vers zéro, on arrive à la nouvelle formule

$$Q(a, 1) = \frac{1}{2}\Gamma(a) + \frac{t}{2\pi}\Gamma'(a) + \frac{t}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+nti)-\Gamma(a-nti)}{ni}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+n)}-1\right)} - \sum_{m=1}^{\infty} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right).$$

On obtient enfin un dernier genre de séries qui se rattachent à la série

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+x+n)u}}{(\omega+x+n)^s},$$

où u est réel et positif. On arrive ainsi à la formule

$$Q(1-s, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{-s}{m} P(m+1, u)\, S(s-m),$$

où l'on a posé

$$S(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^a u^a},$$

$$P(m+1, u) = \int_0^u e^{-x} x^m\, dx;$$

pour $u = 1$ on retrouve une formule due à Hermite. On obtient également la formule analogue

$$Q(1-s, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-s}{m}\mathfrak{p}(m+1, u)\, S_1(s-m),$$

où l'on a posé

$$S_1(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^a u^a},$$

$$\mathfrak{p}(m+1, u) = \int_0^u e^x x^m\, dx = (-1)^m m!\, e^u\left[\sum_{\nu=0}^{m}\frac{(-u)^\nu}{\nu!} - e^{-u}\right];$$

pour $u = 1$ on retrouve une formule due à Mellin.

On obtient enfin un développement semi-convergent par la formule suivante :

$$\frac{1}{u}Q(1-s, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-z}}{(mu+z)^s} - \frac{e^{-z}}{2z^s} - \frac{e^{-z}}{z^s} \sum_{\nu=1,2,\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} G(z, s)_\nu,$$

où l'on a posé

$$G(z, s)_\nu = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{s(s+1)\ldots(s+\alpha-1)}{z^\alpha};$$

l'erreur commise dans le calcul de la dernière série du second membre est inférieure au premier terme négligé. Le nombre s est supposé réel et positif. La première série du second membre est liée à des séries étudiées par Malmsten, Lipschitz et l'auteur.

Schur (*J.*). — Sur la théorie des matrices échangeables. (66-76).

Un système de matrices linéairement indépendantes de degré n définit un *groupe,* au sens de Frobenius, lorsque les produits de deux quelconques d'entre elles se déduisent linéairement des matrices données. Le groupe est dit *commutatif* lorsque les matrices sont échangeables entre elles. L'*ordre* du groupe est le nombre des matrices linéairement indépendantes.

L'auteur démontre les théorèmes suivants :

I. *L'ordre d'un groupe commutatif de matrices de degré n est au plus égal à* $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, *en désignant par* $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ *la partie entière de* $\frac{n^2}{4}$.

II. *Si un groupe commutatif* G *de matrices de degré* $n > 3$ *est d'ordre* $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, *il peut être défini par la matrice unité et* $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ *matrices telles que tous leurs produits mutuels soient nuls.*

III. *D'une manière plus précise, si n est pair et égal à* $2m$, *on peut toujours supposer, en transformant au besoin le groupe par une matrice* P *de déterminant différent de zéro, que le groupe* G *d'ordre* $\left[\frac{n^2}{4}\right] = m^2$, *qui, avec la matrice unité, définit le groupe* G, *est formé de toutes les matrices* $(a_{\varkappa\lambda})$ *dont les m premières lignes et les m dernières colonnes sont formées d'éléments tous nuls.*

Si n est impair et égal à $2m+1$, *on peut supposer que le groupe* G *est formé soit de toutes les matrices* $(a_{\varkappa\lambda})$ *dont les m premières lignes et les* $m+1$ *dernières colonnes sont formées d'éléments tous nuls, soit de toutes les matrices* $(a_{\varkappa\lambda})$ *dont les* $m+1$ *premières lignes et les m dernières colonnes sont formées d'éléments tous nuls.*

Dans le cas $n = 3$, *il faut ajouter le cas où le groupe* G *serait formé de toutes les matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Wallenberg (Georg). — Sur la théorie des équations différentielles de Riccati du second ordre. (77-88).

L'auteur appelle *équation différentielle de Riccati du second ordre* toute équation différentielle dont l'intégrale générale est une fraction linéaire par rapport aux deux constantes d'intégration. Sa forme générale est

$$(\mathrm{B}) \qquad (y + a_0)y'' - 2y'^2 + (b_0 + b_1 y)y' + d_0 + d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^3 = 0.$$

Ces équations ont fait l'objet de recherches antérieures de Vessiot et de l'auteur lui-même.

I. Si l'on connaît trois intégrales particulières y_1, y_2, y_3 de l'équation (B), l'intégrale générale est donnée par deux quadratures.

Si l'on connaît quatre intégrales particulières y_1, y_2, y_3, y_4, l'intégrale générale s'obtient sans quadrature.

Si l'on connaît cinq intégrales particulières y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, l'intégrale générale est donnée par la relation

$$\begin{vmatrix} c_1(y - y_1) & c_2(y - y_2) & y - y_3 \\ \gamma_1(y_4 - y_1) & \gamma_2(y_4 - y_2) & y_4 - y_3 \\ y_5 - y_1 & y_5 - y_2 & y_5 - y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, γ_1 et γ_2 des constantes numériques.

II. Si l'on connaît une intégrale particulière $y = \eta$ de l'équation différentielle (B), le premier membre de (B) prend, par multiplication avec le facteur $\lambda(y - \eta)$, où λ ne dépend que de z, la forme

$$\mathrm{R}_3^2 \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_3}\right) = 0,$$

ce qui fournit une intégrale première $\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_3} = c_1$, où R_1 et R_3 désignent les premiers membres de deux équations de Riccati du premier ordre admettant l'intégrale commune $y = \eta$.

Réciproquement, pour que l'équation

$$\alpha_2 \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_3} \equiv \alpha_2 \frac{y' + \alpha_{10} + \alpha_{11} y + \alpha_{12} y^2}{y' + \alpha_{30} + \alpha_{31} y + \alpha_{32} y^2} = c_1$$

définisse une intégrale première de l'équation (B), il faut et il suffit :

1° Que les équations $\mathrm{R}_1 = 0$, $\mathrm{R}_3 = 0$ admettent une intégrale commune, racine de l'équation

$$\alpha_{30} - \alpha_{10} + (\alpha_{31} - \alpha_{11})y + (\alpha_{32} - \alpha_{12})y^2 = 0;$$

2° Qu'on ait

$$\alpha_2 = e^{\int \sqrt{\Delta_2}\, dz},$$

où Δ_2 est le discriminant de l'équation du second degré précédente.

Enfin l'auteur indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que les

deux équations

$$\alpha_2 \frac{R_1}{R_3} = c_1, \qquad \alpha_1 \frac{R_2}{R_3} = c_2$$

définissent deux intégrales premières indépendantes de l'équation (B).

L'auteur examine ensuite deux cas particuliers :

$$\alpha_2 = 1,$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{32} = 0.$$

Stäckel (*Paul*). — Sur les lignes géodésiques d'une classe de surfaces dont le ds^2 est du type de Liouville. (89-112).

On sait que les lignes géodésiques des surfaces dont le ds^2 peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

peuvent être obtenues par des quadratures. Elles sont données par les formules

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{U - \alpha}} - \int \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t - \tau,$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{U - \alpha}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \beta,$$

où α, β, τ sont des constantes, et t est l'arc de la courbe.

L'auteur se propose d'étudier, pour des fonctions U et V satisfaisant à certaines conditions, la forme non de la courbe géodésique elle-même, mais de son image G sur le plan des (u, v) lorsqu'on fait la représentation conforme de la surface sur ce plan.

Il cherche pour cela à appliquer un théorème de Staude, généralisé par l'auteur lui-même (même Journal, t. CXXVIII, p. 222-242). Ce théorème permet, étant données les équations

$$x = \int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)h(v)}},$$
$$y = \int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)g(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)k(v)}},$$

d'exprimer u et v en fonctions continues et doublement périodiques de x et y, lorsque les fonctions φ, ψ, χ, ω, f, g, h, k satisfont à certaines conditions dans les intervalles (a, A) et (b, B). Les deux couples de périodes s'obtiennent en prenant les doubles des valeurs de x et y pour $u = A$, $v = b$ d'une part, pour $u = a$, $v = B$ d'autre part.

Pour que ce théorème puisse s'appliquer à l'étude du problème que se propose l'auteur, il est nécessaire de faire des restrictions importantes sur les fonctions U et V et aussi sur le domaine du plan des (u, v) dans lequel on veut étudier les courbes G.

On peut par exemple supposer que la courbe

$$U(u) - V(v) = 0$$

est ce que l'auteur appelle une *ovale,* c'est-à-dire est une courbe fermée coupée, par toute parallèle à l'un des deux axes qui la rencontrent, en deux points et deux points seulement. Si α désigne alors une constante assujettie à rester dans un intervalle déterminé, à cette constante correspond un rectangle R_α inscrit dans l'ovale dont les sommets ont pour coordonnées (a, b), (a, B), (A, b), (A, B), où a et A sont les deux racines de l'équation

$$U(u) - \alpha = 0$$

et b et B sont les deux racines de l'équation

$$V(v) - \alpha = 0.$$

Cela étant, si l'on se donne un point (u_0, v_0) intérieur à l'ovale, ainsi qu'une droite Δ de coefficient angulaire p_0 passant par ce point, il existe une ligne G passant par (u_0, v_0) et admettant pour tangente en ce point la droite Δ; à cette ligne G correspondent une constante α et un rectangle R_α inscrit dans l'ovale. La ligne G reste tout entière intérieure au rectangle; mais sa forme est différente suivant la nature du rapport q des périodes

$$\omega_1 = 2\int_a^A \frac{du}{\sqrt{U - \alpha}}, \qquad \omega_2 = 2\int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Si q est rationnel, la ligne G est fermée; au contraire, si q est irrationnel, la courbe G passe une infinité de fois aussi près qu'on veut de tout point du rectangle.

Si on laisse fixe le point (u_0, v_0) et qu'on fasse varier p_0, le rapport q est une fonction continue du nombre

$$\alpha = \frac{V(v_0) + U(u_0)p_0^2}{1 + p_0^2},$$

à moins qu'il ne se réduise à une constante. Dans ce dernier cas, toutes les lignes G passant par (u_0, v_0) sont de même nature; sinon, il y en a une infinité qui sont fermées et une infinité qui remplissent tout le rectangle.

Knoblauch (J.). — La connexion des formules fondamentales de la théorie des surfaces. (113-143).

I. Il existe entre les formules fondamentales de la théorie des surfaces, celles de Gauss, de Weingarten, de Rodrigues, par exemple, des liens étroits qui sont souvent méconnus. Un des moyens les plus simples de rendre évidente l'unité de toute la géométrie différentielle est de fonder les formules fondamentales de la théorie des surfaces sur la théorie d'un système simultané de deux formes différentielles quadratiques ou, plus généralement, d'une forme quadratique et d'une forme bilinéaire. Même dans les parties de la théorie des surfaces où une seule forme différentielle entre en jeu, comme dans l'étude de la déformation, l'introduction d'une nouvelle forme auxiliaire peut souvent rendre des services. L'auteur se propose d'étudier, de ce point de vue, les formules de Gauss et de Weingarten, ainsi que les trois formules fondamentales qui s'en déduisent.

II. Considérons, en même temps que la forme différentielle quadratique A qui

donne le ds^2 de la surface, une forme linéaire $\mathfrak{M}_0 = m_1\,du_1 + m_2\,du_2$. On peut mettre simultanément les deux formes quadratiques A et $\mathrm{A} = \mathfrak{M}_0^2$ sous la forme

$$\mathrm{A} = \mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2,$$
$$\mathrm{A} = l_2\,\mathfrak{M}_2^2.$$

L'invariant l_2 se réduit, si $\mathfrak{M}_0$ est la différentielle $d\varphi$ d'une fonction de u_1, u_2, au paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami de la fonction φ.

Soit maintenant $\mathfrak{p}_0$ une forme différentielle linéaire quelconque; on peut toujours l'exprimer linéairement en fonction des formes $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{p}_0 = \pi_1\,\mathfrak{M}_1 + \pi_2\,\mathfrak{M}_2 = p_1\,du_1 + p_2\,du_2;$$

si $\mathfrak{p}_0 = d\varphi$, l'auteur désigne π_1 et π_2 par les notations $\mathfrak{S}_1\varphi$, $\mathfrak{S}_2\varphi$.

Le covariant bilinéaire de $\mathfrak{p}_0$

$$\overline{\mathfrak{p}} = \delta(p_1\,du_1 + p_2\,du_2) - d(p_1\,\delta u_1 + p_2\,\delta u_2)$$

peut de même s'exprimer au moyen de $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ et des formes $\overline{\mathfrak{M}}_1$, $\overline{\mathfrak{M}}_2$ qui s'en déduisent en changeant d en δ; soit

$$\overline{\mathfrak{p}} = \sum_{\alpha,\beta} \overline{\pi}_{\alpha\beta}\,\mathfrak{M}_\alpha\,\overline{\mathfrak{M}}_\beta.$$

On trouve

$$\overline{\pi}_{\alpha\beta} = \mathfrak{S}_\beta\pi_\alpha - \mathfrak{S}_\alpha\pi_\beta + \sum_\rho \overline{\mu}_{\rho,\alpha\beta}\,\pi_\rho,$$

où les quantités $\overline{\mu}_{\rho,\alpha\beta}$ sont les coefficients analogues aux $\overline{\pi}_{\alpha\beta}$, qui s'introduisent dans le calcul du covariant bilinéaire de la forme $\mathfrak{M}_\rho$.

Si l'on pose pour abréger

$$\overline{\mu}_{1,12} = -g_1, \qquad \overline{\mu}_{2,21} = -g_2,$$

on a, pour une fonction φ quelconque, la relation

$$\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_1\varphi - \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\varphi = g_1\mathfrak{S}_1\varphi - g_2\mathfrak{S}_2\varphi.$$

II. L'équation $\mathfrak{M}_0 = 0$ ou $\mathfrak{M}_2 = 0$ définit sur la surface une courbe c (et même une infinité), l'équation $\mathfrak{M}_1 = 0$ une courbe c' orthogonale à c. Alors $\mathfrak{S}_1\varphi$ ou $\Theta\varphi$ n'est pas autre chose que l'accroissement infiniment petit de la fonction φ relatif à un déplacement le long de la courbe c, divisé par l'élément d'arc de cette courbe; $\Theta\varphi$ joue un rôle analogue relativement à c'. L'auteur introduit les neuf quantités

$$\mathrm{A} = \Theta x, \qquad \mathrm{B} = \Theta y, \qquad \mathrm{C} = \Theta z,$$
$$\mathrm{A}' = \Theta' x, \qquad \mathrm{B}' = \Theta' y, \qquad \mathrm{C}' = \Theta' z$$

et les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale à la surface.

Les formules de Gauss

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_1} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_2} = \mathrm{LX},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\,\partial u_2} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_1} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_2} = \mathrm{MX},$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_1} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial u_2} = \mathrm{NX}$$

peuvent être modifiées en introduisant les quantités ΘA, $\Theta A'$, $\Theta' A$, $\Theta' A'$. Considérons les deux formes différentielles bilinéaires

$$\Phi = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_{\nu} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} \right) du_i \, \delta u_k,$$

$$B = L\, du_1 \, \delta u_1 + M(du_1 \, \delta u_2 + du_2 \, \delta u_1) + N\, du_2 \, \delta u_2 ;$$

$\varphi = x$, ces deux formes ne diffèrent que par le facteur

$$X = \sqrt{1 - \Delta^1 x},$$

où $\Delta^1 x$ est le paramètre différentiel du premier ordre de x. L'auteur considère plus généralement le covariant de Christoffel de la forme $\mathfrak{p}_0$

$$\mathfrak{p} = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial u_k} - \sum_{\nu} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix} \right\} p_\nu \right) du_i \, \delta u_k ;$$

ce covariant se réduit à Φ si $\mathfrak{p}_0 = d\varphi$. On peut mettre $\mathfrak{p}$ sous la forme

$$\mathfrak{p} = \sum_{\alpha, \beta} \pi_{\alpha\beta} \mathfrak{M}_\alpha \overline{\mathfrak{M}}_\beta$$

et le calcul donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} = {} & (\mathfrak{S}_1 \pi_1 - g_1 \pi_2) \mathfrak{M}_1 \overline{\mathfrak{M}}_1 + (\mathfrak{S}_2 \pi_1 + g_2 \pi_2) \mathfrak{M}_1 \overline{\mathfrak{M}}_2 \\ & + (\mathfrak{S}_1 \pi_2 + g_1 \pi_1) \mathfrak{M}_2 \overline{\mathfrak{M}}_1 + (\mathfrak{S}_2 \pi_2 - g_2 \pi_1) \mathfrak{M}_2 \overline{\mathfrak{M}}_2 . \end{aligned}$$

De même B se met sous la forme

$$B = n \mathfrak{M}_1 \overline{\mathfrak{M}}_1 + t(\mathfrak{M}_1 \overline{\mathfrak{M}}_2 + \mathfrak{M}_2 \overline{\mathfrak{M}}_1) + n' \mathfrak{M}_2 \overline{\mathfrak{M}}_2 .$$

On déduit de là, en faisant $\mathfrak{p}_0 = dx$, les formules

$$\begin{aligned} \Theta A &= g_1 A' + n X, & \Theta' A &= - g_2 A' + t X, \\ \Theta A' &= - g_1 A + t X, & \Theta' A' &= g_2 A + n X. \end{aligned}$$

III. En calculant dX par des méthodes analogues à celles des numéros précédents, on trouve les formules de Weingarten

$$\Theta X = - n A - t A', \qquad \Theta' X = - t A - n' A'.$$

IV. En écrivant les conditions d'intégrabilité des formules de Gauss-Weingarten, on obtient trois nouvelles équations fondamentales. L'auteur y arrive en introduisant la forme quadratique

$$\Gamma = \sum c_{ik} \, du_i \, du_k = \Phi - \sqrt{1 - \Delta^1 \varphi}\, B$$

et le covariant de Weingarten

$$W_a(\Gamma) = \sum_i \frac{c_{i12} - c_{i21}}{T} du_i$$

où l'on a posé

$$T = \sqrt{EG - F^2},$$

$$c_{ikl} - c_{ilk} = \frac{\partial c_{ik}}{\partial u_l} - \sum_{\nu} c_{\nu k} \left\{ \begin{matrix} il \\ \nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial c_{il}}{\partial u_k} + \sum_{\nu} c_{\nu l} \left\{ \begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix} \right\}.$$

Si l'on exprime $W_a(\Gamma)$ en fonction linéaire de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, les coefficients seront évidemment nuls. On arrive ainsi à trois équations

$$\Theta' n - \Theta t + 2tg_2 - (n - n')g_1 = 0,$$
$$\Theta n' - \Theta' t + 2tg_1 - (n' - n)g_2 = 0,$$
$$nn' - t^2 = \Theta' g_1 + \Theta g_2 - g_1^2 - g_2^2.$$

Le second membre de la troisième équation dépend en apparence de la forme linéaire $\mathfrak{M}_0$, mais en réalité il n'en dépend pas : c'est la courbure totale de la surface.

Wiernsberger (*Paul*). — Sur les polygones réguliers et les radicaux carrés superposés. (144-152).

Les côtés des polygones réguliers de rayon 1, admettant un nombre de côtés qui est une puissance de 2, s'expriment par des radicaux carrés superposés portant sur le nombre 2 et séparés par les signes + ou —. Si le nombre des côtés n'est pas une puissance de 2, on obtient une expression formée d'une infinité de radicaux carrés superposés, les signes + et — se succédant périodiquement, au moins à partir d'un certain rang. Ce qui précède conduit l'auteur à de nouveaux développements infinis convergents pour le sinus et le cosinus.

Si x est un nombre réel compris entre 0 et 1, il peut toujours être développé suivant une série de la forme

$$x = \frac{1}{2} + \eta_1 \frac{1}{2^2} + \eta_2 \frac{1}{2^3} + \ldots + \eta_{k-1} \frac{1}{2^k} + \ldots,$$

où les η_h sont égaux à ± 1. En posant alors

$$\eta_h = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_h,$$

on a

$$\sin \frac{\pi}{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_h \sqrt{2 + \ldots}}},$$
$$\cos \frac{\pi}{2} x = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \varepsilon_1 \sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_h \sqrt{2 + \ldots}}}.$$

Stahl (*Hermann*). — Les fonctions abéliennes de trois variables. (153-196).

L'objet de ce Mémoire est d'exposer d'une manière élémentaire les recherches de Schottky sur les fonctions abéliennes de trois variables. Alors que Riemann et Weber partent de la courbe générale du quatrième degré de genre 3 et arrivent à la solution du problème de l'inversion par les fonctions thêta, Schottky part des relations entre les fonctions thêta et en déduit les équations différentielles algébriques du problème de l'inversion : il est ainsi conduit, non à une

courbe du quatrième degré, mais à une courbe du sixième degré à sept points doubles. L'auteur, dans son exposition, commence par traiter le problème algébrique, puis passe au problème transcendant de l'inversion.

I. Si l'on désigne par (α), (β), (γ), (δ), $(\varkappa)$, (λ), (μ) un système fondamental de sept caractéristiques impaires, satisfaisant à la relation

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varkappa\lambda\mu) \equiv 0,$$

on peut, par composition, en déduire les 21 autres caractéristiques impaires sous la forme $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, ..., $(\lambda\mu)$, et les 35 caractéristiques paires autres que (0) sous la forme $(\alpha\beta\gamma)$, ..., $(\varkappa\lambda\mu)$.

A chacune des sept caractéristiques fondamentales (α) on fait correspondre un point $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$. On a ainsi sept points qui dépendent, en choisissant convenablement le triangle de référence, de $3p-3=6$ arbitraires qui sont les modules de Riemann. A ces points l'auteur fait correspondre certaines constantes $f_{\alpha\beta\gamma}$, g_α qui sont respectivement, au signe près, le déterminant des coordonnées des points (α), (β), (γ) et le déterminant des carrés et des doubles produits des coordonnées des six points autres que (α).

L'auteur introduit ensuite 21 fonctions $F_{\alpha\beta}$ du premier degré en x, y, z, dont chacune s'annule pour deux des sept points fondamentaux, et 21 fonctions $G_{\alpha\beta}$ du second degré, dont chacune s'annule pour cinq des sept points fondamentaux. Il s'introduit de même 28 fonctions H du troisième degré : d'abord 21 fonctions

$$H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}$$

qui, égalées à zéro, représentent des cubiques passant par les sept points fondamentaux et admettant pour points doubles les deux points d'intersection $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ de la droite $F_{\alpha\beta} = 0$ et de la conique $G_{\alpha\beta} = 0$; ensuite sept fonctions H_α qui, égalées à zéro, représentent des cubiques passant par les sept points fondamentaux et admettant pour point double le point (α). Il existe entre ces différentes fonctions de nombreuses relations entières dont les coefficients dépendent des constantes $f_{\alpha\beta\gamma}$, g_α, et que l'auteur établit.

La considération des fonctions H_α conduit à trois nouvelles fonctions X, Y, Z, du troisième degré, qui satisfont à la relation

$$xX + yY + zZ = 0$$

et telles qu'on ait

$$H_\alpha = a_\alpha X + b_\alpha Y + c_\alpha Z,$$

$$H_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} X + b_{\alpha\beta} Y + c_{\alpha\beta} Z,$$

les constantes $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ dépendant des autres constantes introduites.

Le déterminant fonctionnel de X, Y, Z fournit une fonction L du sixième degré qui, égalée à zéro, représente une courbe du sixième degré jouissant des propriétés suivantes :

a. Elle admet les sept points fondamentaux comme points doubles;

b. Au point (α) ses deux branches touchent les deux branches de courbe de la cubique $H_\alpha = 0$;

c. Elle passe par les 21 couples de points $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$.

C'est cette courbe $L = 0$, de genre 3, qui va servir pour édifier la théorie des fonctions abéliennes de trois variables. Si l'on regarde le point (x, y, z) comme appartenant à cette courbe, il existe entre les fonctions algébriques $F_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$,

H_α, $H_{\alpha\beta}$ de nouvelles relations. L'auteur introduit une fonction R du septième degré

$$R = \frac{H_x H_\lambda G_{x\lambda}}{F_{x\lambda}}$$

indépendante des indices α, β, ..., μ; on a en particulier

$$R^3 = H_\alpha H_\beta H_\gamma \ldots H_\mu.$$

L'équation $L = 0$ entraîne entre X, Y, Z une relation algébrique entière du quatrième degré

$$M(X, Y, Z) = 0.$$

On a ainsi deux courbes qui admettent l'une dans l'autre une transformation birationnelle. L'équation $M = 0$ peut s'écrire de bien des manières sous une forme irrationnelle simple, le premier membre de la nouvelle équation étant une somme de trois radicaux carrés portant sur le produit de deux fonctions H, c'est-à-dire de deux fonctions du premier degré en X, Y, Z. Il en résulte que dans le plan (X, Y, Z) les droites $H_\alpha = 0$, $H_{\alpha\beta} = 0$ représentent les 28 tangentes doubles de la courbe $M = 0$.

L'intégrale de première espèce la plus générale attachée à la courbe $L = 0$ ou à la courbe $M = 0$ est de la forme

$$v = \int \frac{H(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)}{R},$$

en désignant par H une adjointe quelconque à $L = 0$, du troisième degré en x, y, z (ou une fonction du premier degré en X, Y, Z).

L'auteur introduit maintenant de nouvelles fonctions entières dépendant non plus seulement des coordonnées (x, y, z) d'un point arbitraire, mais encore des coordonnées (ξ, η, ζ) d'un autre point arbitraire. En désignant par une grande lettre accentuée ce que devient une fonction quand on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ, il pose

$$P = \xi X + \eta Y - \zeta Z, \qquad P' = xX' + yY' + zZ',$$
$$Q = x\frac{\partial P'}{\partial \xi} + y\frac{\partial P'}{\partial \eta} + z\frac{\partial P'}{\partial \zeta} = -\left(\xi\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial P}{\partial y} + \zeta\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Si l'on prend le point (ξ, η, ζ) sur la courbe $L = 0$, on a

$$Q = P'S' = P'\left(x\frac{\partial \log X'}{\partial \xi} + y\frac{\partial \log Y'}{\partial \eta} + z\frac{\partial \log Z'}{\partial \zeta}\right).$$

La courbe $L = 0$ a en commun avec :

$P = 0$, 18 points : le point ξ, les sept points doubles (α), ..., (μ) et trois autres points ε_1, ε_2, ε_3;
$P' = 0$, 6 points : ξ, ζ_1, ζ_2, ..., ζ_5;
$S' = 0$, 6 points : ε_1, ε_2, ε_3; ξ_1^0, ξ_2^0, ξ_3^0;
$Q = 0$, 12 points : ξ, ε_1, ε_2, ε_3; ζ_1, ..., ζ_5; ξ_1^0, ξ_2^0, ξ_3^0.

Enfin l'auteur introduit 35 fonctions $\Psi_{x\lambda\mu}$ définies par les formules

$$\Psi_{x\lambda\mu} = R'P'H_x H_\lambda H_\mu - RPH'_x H'_\beta H'_\mu + \gamma RR'\psi_x\psi_\lambda\psi_\mu,$$

γ étant un certain coefficient numérique

$$\left(\frac{1}{\gamma} = g_\alpha g_\beta \cdots g_\mu\right),$$

et ψ_x étant le déterminant

$$| x \quad \xi \quad a_x |.$$

Si (ξ, η, ζ) est toujours un point de la courbe $L = 0$, la courbe $\Psi_{\chi\lambda\mu} = 0$ est du dixième degré et a en commun, avec $L = 0$, 60 points, à savoir 24 en (α), (β), (γ), (δ); 24 en (χ), (λ), (μ); puis les points ξ, ε_1, ε_2, ε_3, ζ_1, ..., ζ_5; enfin trois autres points $\xi_1^{\chi\lambda\mu}$, $\xi_2^{\chi\lambda\mu}$, $\xi_3^{\chi\lambda\mu}$.

II. L'auteur remplace dans les fonctions thêta les trois variables par les valeurs des trois intégrales normales de première espèce prises entre les points ξ et x; il désigne par la notation $\vartheta((u))$ la fonction de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ qu'on obtient ainsi.

Chacune des 64 fonctions thêta a pour indice l'un des symboles

$$[\alpha], \quad \ldots, \quad [\mu], \quad [\alpha\beta], \quad \ldots, \quad [\lambda\mu], \quad [\alpha\beta\gamma], \quad \ldots, \quad [\chi\lambda\mu] \quad \text{et} \quad [0].$$

On fait correspondre aux sept fonctions impaires de caractéristiques $[\alpha]$, $[\beta]$ ou $[\mu]$ les sept fonctions

$$\sqrt{H_\alpha}, \quad \sqrt{H_\beta}, \quad \ldots, \quad \sqrt{H_\mu};$$

par suite la fonction $\vartheta_\alpha((u))$, considérée comme fonction de x, s'annule pour les trois points

$$\xi, \quad p_\alpha, \quad q_\alpha \qquad [p_\alpha = q_\alpha = (\alpha)].$$

La fonction $\vartheta_0(u)$ admet pour zéros les points ξ_1^0, ξ_2^0, ξ_3^0; la fonction $\vartheta_{\chi\lambda}(u)$ les trois points ξ, $p_{\chi\lambda}$, $q_{\chi\lambda}$, et enfin la fonction $\vartheta_{\chi\lambda\mu}$ les trois points $\xi_1^{\chi\lambda\mu}$, $\xi_2^{\chi\lambda\mu}$, $\xi_3^{\chi\lambda\mu}$.

Les quotients des fonctions thêta s'expriment algébriquement d'une manière très simple; on a en effet les formules

$$\frac{\vartheta_m((u))}{\vartheta_0((u))} = \frac{2 l_m}{c_0} \frac{P.P'}{Q} \frac{\sqrt{H_m H'_m}}{\sqrt{RR'}} \qquad (m = \alpha, \ldots, \mu, \alpha\beta, \ldots, \lambda\mu),$$

$$\frac{\vartheta_{\chi\lambda\mu}((u))}{\vartheta_0((u))} = \frac{c_{\chi\lambda\mu}}{c_0} \frac{\Psi_{\chi\lambda\mu}}{Q.\sqrt{RR'}\sqrt{H_\chi H_\lambda H_\mu H'_\chi H'_\lambda H'_\mu}}.$$

Les constantes c_0 et $c_{\chi\lambda\mu}$ sont les valeurs que prennent les fonctions ϑ_0 et $\vartheta_{\chi\lambda\mu}$ pour

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

Quant aux constantes l_m, elles sont définies par les formules

$$[d\vartheta_m((u))]_{x=\xi} = -\frac{X'\,d\xi' + Y'\,d\eta' + Z'\,d\zeta'}{R'}\, l_m H'_m.$$

Les quotients des fonctions thêta sont ainsi représentés, si l'on suppose que les arguments sont remplacés par les trois intégrales normales de première espèce prises entre ξ et x. Si l'on suppose au contraire que chaque argument U_h

est remplacé par une somme de quatre termes dont chacun est la $h^{\text{ième}}$ intégrale normale de première espèce prise entre un point fixe a_i et un point variable x_i ($i = 0, 1, 2, 3$), on obtient d'autres représentations. A part un facteur E qui est le même pour toutes les fonctions thêta, on obtient des fonctions algébriques de x_0, x_1, x_2, x_3 exprimées à l'aide des fonctions H, F, R et de certaines constantes Γ_0, Γ_m, $\Gamma_{\varkappa\lambda\mu}$; on a en particulier, au signe près,

$$\frac{\Gamma_{\varkappa\lambda\mu}}{\Gamma_0} = \frac{c_{\varkappa\lambda\mu}}{c_0}.$$

L'auteur établit ensuite un certain nombre des relations entre les fonctions thêta pour arriver à la détermination des quantités c_0, $c_{\varkappa\lambda\mu}$, $l_\varkappa$, $l_{\varkappa\lambda}$ au moyen des modules ($a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$).

Ces expressions sont indiquées complètement et dépendent de deux facteurs de proportionnalité r et ρ.

Fueter (*Rudolf*). — La théorie des rayons de nombres. (197-237).

On connaît le théorème, désigné quelquefois sous le nom de *rêve de jeunesse* (Jugendtraum), de Kronecker :

Toute équation algébrique qui, dans le domaine de rationalité d'un corps quadratique imaginaire, admet un groupe abélien, peut être résolue au moyen de racines de l'unité et de racines des équations de la multiplication complexe.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, à la démonstration duquel le présent article apporte une contribution et qui peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un corps de Galois k, il existe un système de fonctions fournissant les racines de toutes les équations abéliennes dans le domaine de rationalité k, lorsqu'on donne à l'argument de chacune de ces fonctions des valeurs appartenant à un domaine bien déterminé, correspondant à la fonction considérée et appartenant à k.

La théorie des fonctions, l'Algèbre et la théorie des nombres ont toutes les trois un rôle à jouer dans la démonstration de ce théorème. Dans le présent Mémoire, l'auteur se place uniquement au point de vue de la théorie des nombres. La première Partie seule du Mémoire est d'ailleurs publiée dans ce Volume.

Chapitre premier : *Simplification.* — L'auteur démontre d'abord que toute équation algébrique qui possède un groupe abélien dans un corps de Galois k de degré m considéré comme domaine de rationalité peut être ramenée à un système d'équations dont chacun jouit des propriétés suivantes :

a. Ses coefficients sont des nombres rationnels;

b. Son degré est la puissance d'un nombre premier;

c. Son groupe est cyclique en k.

Chapitre II : *Le rayon de nombres.* — On appelle *rayon de nombres* (Zahlstrahl) un système de nombres tels que le produit et le quotient de deux nombres quelconques du système appartiennent encore au système.

Considérons en particulier le cas où tous les nombres du rayon appartiennent à un corps algébrique donné. On appelle alors *idéal du rayon* l'ensemble des nombres du rayon qui appartiennent à un idéal du corps; l'idéal est dit *principal* s'il peut s'obtenir en multipliant tous les nombres entiers du rayon par un nombre entier déterminé appartenant au rayon.

Après avoir défini le produit de deux idéaux du rayon, l'auteur appelle *équivalents* deux idéaux tels que leur quotient soit un idéal principal du rayon. Tous les idéaux équivalents entre eux forment une *classe* d'idéaux du rayon.

Un *rayon de congruence* (Kongruenzstrahl) est formé par l'ensemble des nombres du corps congrus à l'unité suivant un module donné. Ce module s'appelle le *guide* (*Führer*) du rayon. Le nombre des classes d'un tel rayon est fini et égal à un multiple du nombre des classes du corps.

Les rayons de congruence jouent un grand rôle dans les théories exposées dans la suite du Mémoire.

Chapitre III : *Les nombres premiers du discriminant relatif.* — Dans ce Chapitre, l'auteur étudie la décomposition dans le corps K, supposé cyclique par rapport à k, des nombres premiers idéaux de k, et spécialement de ceux qui entrent dans le discriminant de K pris par rapport à k. Le degré n de K est supposé un nombre premier l ou une puissance l^r d'un nombre premier. Les idéaux premiers de k qui sont premiers avec l et qui appartiennent au discriminant relatif de K satisfont à des congruences remarquables.

Soit $\mathfrak{p}$ un de ces idéaux premiers de k; il est, dans K, une puissance d'un idéal premier $\mathfrak{P}$, et l'exposant n_2 de cette puissance est un diviseur de n. Si la norme de $\mathfrak{p}$ est p^f, p étant un nombre premier naturel, l'auteur démontre la congruence fondamentale

$$p^f - 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ n_2).$$

L'auteur démontre un théorème encore plus précis. Dans le corps k l'idéal premier $\mathfrak{p}$ admet un groupe de décomposition (Zerlegungsgruppe) qu'on peut obtenir en composant le groupe d'inertie (Trägheitsgruppe) de $\mathfrak{p}$ avec les puissances d'une substitution z de degré f. Soit de plus S la substitution qui engendre le groupe cyclique de K par rapport à k; on a alors une relation de la forme

$$z\mathrm{S} = \mathrm{S}^x z,$$

x étant un nombre rationnel entier. Soit n' le plus grand commun diviseur de $x - 1$ et de n, a un diviseur de f tel que $x^a - 1$ soit premier avec l, ou a égal à 1. On a les congruences

$$\left.\begin{aligned} 1 + p^a + p^{2a} + \ldots + p^{f-a} &\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, n'') \\ p - 1 &\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, n'\ ) \end{aligned}\right\} \ (n' n'' = n_2).$$

L'auteur étudie aussi le cas où $\mathfrak{p}$ est un diviseur de l.

Dans le cas particulier où k est un corps imaginaire quadratique, le théorème général est exprimé par la congruence

$$p - \left(\frac{d}{p}\right) \equiv 0 \qquad (n_2),$$

où d désigne le discriminant du corps quadratique et $\left(\frac{d}{p}\right)$ le symbole de Legendre.

Dans la démonstration du théorème général, le rayon de congruence admettant pour guide $\mathfrak{p}'$ joue un rôle important. On appelle *rayon des classes* (*Klassenstrahl*) le rayon de congruence dont le guide est formé par tous les idéaux premiers qui entrent dans le discriminant relatif. D'une manière générale, le plus grand rayon de congruence possible admettant un guide donné s'appelle *étoile de nombres* (*Zahlstern*).

Chapitre IV : *Le rayon des classes et l'étoile.* — L'auteur démontre un théorème qui donne la raison de la dénomination *rayon des classes* employée pour le rayon dont le guide est le produit des idéaux premiers du discriminant relatif.

Si l'on forme dans le corps k le rayon dont le guide f contient tous les idéaux premiers différents de k qui entrent dans le discriminant relatif de K, il y a dans ce rayon exactement n classes, dont le groupe abélien est isomorphe au groupe cyclique de K par rapport à k.

Si de plus on forme dans le corps K le rayon correspondant dont le guide contient les différents idéaux premiers de K qui entrent dans le discriminant relatif de K, les n classes de k dont il est question plus haut deviennent, dans le rayon de K, des classes *principales*.

Jolles (*St.*). — Nouvelles démonstrations de quelques théorèmes de la théorie des complexes linéaires. (238-242).

On sait qu'un réseau de complexes linéaires détermine dans l'espace une transformation par polaires réciproques, la surface du second degré directrice étant le lieu des axes des complexes linéaires dégénérescents du réseau donné. On sait aussi que le réseau en involution avec le réseau donné, c'est-à-dire formé des complexes linéaires en involution avec tous les complexes linéaires du réseau donné, détermine la même quadrique, les axes des complexes dégénérescents de ce nouveau réseau constituant l'autre famille de génératrices de la quadrique.

L'auteur démontre ces théorèmes en partant de la remarque qu'une congruence rectiligne linéaire détermine une involution des droites de l'espace. Les droites de la congruence et deux droites conjuguées de cette involution appartiennent à un même complexe linéaire. De là l'auteur arrive aux théorèmes connus sur deux complexes linéaires en involution et sur les complexes en involution d'un faisceau de complexes linéaires, pour arriver enfin aux théorèmes énoncés plus haut sur les réseaux de complexes linéaires.

Picard (*E.*). — De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée. (243-258).

L'auteur a démontré en 1893 (*Journ. de Math.*, 4e série, t. IX) le théorème suivant :

Étant donnée une surface de Riemann à m feuillets, il existe une intégrale et une seule de l'équation

$$\Delta u = ke^u \qquad (k > 0)$$

jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue sur la

surface, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ *et aux m points à l'infini sur chaque feuillet. On suppose qu'on ait dans le voisinage de* O_i

$$u = \beta_i \log r_i + \nu_i,$$

ν_i *étant continu en* O_i *et* r_i *designant la distance de* (x, y) *à* O_i. *Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang h, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion; en l'appelant alors* O'_h, *on aura*

$$u = \alpha_h \log r'_h + V_h,$$

V_h *étant continu en* O'_h, *et* r'_h *désignant la distance du transformé de* (x, y) *à* O'_h.

Les constantes α *et* β *sont données, et l'on suppose que*

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_h > \;\; 2 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

Dans le présent article l'auteur expose une démonstration, simplifiée et complétée, du théorème précédent, telle qu'il l'a donnée dans son cours du semestre d'été 1900. Il se borne d'ailleurs au cas $m = 1$, la surface de Riemann se réduisant au plan simple.

I. Si β est supérieur à -2, l'équation

$$\Delta u = e^u$$

admet des intégrales continues autour d'un point donné O et au point O lui-même et de la forme

$$u = \beta \log r + \nu;$$

on le voit facilement par la méthode des approximations successives; au point O les dérivées $\frac{\partial \nu}{\partial x}$ et $\frac{\partial \nu}{\partial y}$ sont de la forme $r^{\beta+1}M$, où M reste fini pour le point O. Pour le point à l'infini les résultats sont les mêmes si α est supérieur à 2.

II. L'application du théorème de Green donne entre α et les β l'inégalité nécessaire

$$\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n < 0,$$

en supposant

$$\alpha > 2, \qquad \beta_i > -2.$$

III. Il ne peut y avoir deux intégrales jouissant des propriétés indiquées; l'auteur le démontre encore en se servant du théorème de Green.

IV et V. Après avoir établi deux lemmes, l'auteur arrive à la démonstration de l'existence de la solution. Il se sert du procédé alterné de Schwarz. En désignant par C et C′ deux cercles concentriques de rayons R et R′ $(R > R')$ contenant à leur intérieur les n points $O_1, O_2, \ldots, O_n$, supposés différents de leur centre, l'auteur considère l'intégrale u_1 de l'équation donnée prenant sur C une valeur constante H et ayant les singularités données en $O_1, O_2, \ldots, O_n$, puis l'intégrale ν_1 continue en dehors de C′, sauf à l'infini où elle a la singularité voulue et prenant sur C′ les mêmes valeurs que u_1. Si $\frac{1}{R}$ est assez petit et si H

est suffisamment petit en valeur relative, on a, sur C, $r_1 > u_1$: c'est là un des points importants de la démonstration.

En continuant l'application du procédé alterné, on arrive immédiatement au résultat cherché.

Kœnigsberger (*Léo*). — Sur le théorème d'Eisenstein relatif au caractère des coefficients des développements en série des fonctions algébriques. (259-269).

L'auteur développe des théorèmes généraux dont les théorèmes, énoncés par Eisenstein dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin de l'année 1852, ne sont que des cas particuliers.

Il considère l'équation algébrique entière en y

$$f(x,y) = \varphi_0(x)y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \ldots + \varphi_n(x) = 0,$$

les coefficients étant holomorphes au voisinage d'une valeur ξ de la variable x

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \ldots,\\
\varphi_1(x) &= b_0 + b_1(x-\xi) + b_2(x-\xi)^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_n(x) &= n_0 + n_1(x-\xi) + n_2(x-\xi)^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Cela étant, il considère, au voisinage de $x = \xi$, une des branches de la fonction y de x définie par l'équation donnée. Elle est représentée par un développement de la forme

$$\begin{aligned}
y = \eta + \eta_1'(x-\xi)^{\frac{1}{r}} + \frac{\eta_2'}{2!}(x-\xi)^{\frac{2}{r}} + \ldots\\
+ \frac{\eta_\rho'}{\rho!}(x-\xi)^{\frac{\rho}{r}} + \gamma_{\rho+1}\frac{(x-\xi)^{\frac{\rho+1}{r}}}{\lambda'} + \gamma_{\rho+2}'\frac{(x-\xi)^{\frac{\rho+2}{r}}}{\lambda'^3} + \ldots;
\end{aligned}$$

dans le second membre η est racine d'une équation algébrique entière dont les coefficients sont entiers par rapport à ξ et aux coefficients des séries φ; η_1' est racine d'une équation algébrique entière dont les coefficients sont entiers par rapport aux quantités précédentes et η; η_2' est racine d'une équation algébrique entière dont les coefficients sont entiers par rapport aux mêmes quantités, η et η_1'; et ainsi de suite; enfin λ', $\gamma_{\rho+1}'$, $\gamma_{\rho+2}'$, ... sont des quantités entières par rapport aux coefficients des φ et aux quantités η, η_1', ..., η_ρ'.

Jolles (*Stanislaus*). — Sur la théorie synthétique des cubiques gauches k^3 et de la congruence C_3^3 de leurs droites d'osculation. Cubiques gauches et surfaces réglées biquadratiques autoconjuguées par rapport à k^3. (270-280).

On sait qu'une cubique gauche k^3 détermine une corrélation Σ dans l'espace; à un point correspond le plan, passant par ce point, déterminé par les points de contact des trois plans osculateurs à k^3 menés par le point donné; le point est dit *le foyer du plan*. A toute bisécante de k^3 correspond la droite d'inter-

section des plans osculateurs à k^3 aux deux points d'intersection de la bisécante et de k^3; l'auteur nomme *biplanaire* une telle droite d'intersection et distingue les sécantes et les biplanaires proprement dites, qui correspondent à deux points réels de k^3 et les sécantes et biplanaires improprement dites qui correspondent à deux points imaginaires conjugués de k^3.

Cremona a démontré que, si le point P est le foyer du plan π dans la corrélation Σ, la polaire harmonique de P par rapport au triangle formé par les points d'intersection de π et de k^3 coïncide avec la biplanaire de k^3 située dans π. De plus, il a démontré, avec Joachimsthal, qu'une bisécante proprement dite ne peut rencontrer qu'une biplanaire improprement dite. L'auteur donne de ces deux théorèmes des démonstrations purement synthétiques.

L'auteur utilise la congruence de troisième ordre et de troisième classe des *droites d'osculation* de la cubique; ce sont les droites menées par un point de k^3 et situées dans le plan osculateur à k^3 en ce point. Ces droites se correspondent deux par deux de manière que leurs points et les plans qui les contiennent soient conjugués par rapport à la cubique; les droites qui joignent deux points conjugués sont des bisécantes et les droites d'intersection de deux plans conjugués des biplanaires.

A toute bisécante P_1P_2 de k^3 correspond une surface réglée du deuxième ordre R_2 formée des bisécantes de k^3 qui joignent deux points de k^3 conjugués harmoniques par rapport aux deux points d'intersection de la bisécante P_1P_2 avec la cubique. Les droites d'osculation de k^3 qui rencontrent P_1P_2 engendrent une surface réglée du quatrième ordre, R^4, admettant pour points triples tous les points de P_1P_2 et pour plans tangents triples les plans passant par la biplanaire conjuguée de P_1P_2. Cette surface réglée est autoconjuguée par rapport à k^3. Les génératrices de cette surface réglée coupent chacune R_2 en deux points, l'un appartenant à k^3, et l'autre appartenant à une certaine cubique k_0^3; les points de k_0^3 sont deux à deux conjugués par rapport à k^3 et réciproquement. La surface R^4 est également autoconjuguée par rapport à k_0^3.

Steinitz (*Ernst*). — Sur un polyèdre remarquable à un seul côté. (281-307).

L'auteur considère un octaèdre régulier de centre O et dont les sommets sont X_+, X_-; Y_+, Y_-; Z_+, Z_-. Les droites X_+X_-, Y_+Y_-, Z_+Z_- sont les diagonales qui se coupent en O. Il prend les quatre faces *positives*, c'est-à-dire pour lesquelles le produit des signes correspondant aux trois sommets est positif, soit

$$\alpha = X_+Y_-Z_-, \qquad \beta = X_-Y_+Z_-, \qquad \gamma = X_-Y_-Z_+, \qquad \delta = X_+Y_+Z_+,$$

et aussi les quatre carrés

$$\xi = Y_-Z_-Y_+Z_+, \qquad \eta = Z_-X_-Z_+X_+, \qquad \zeta = X_-Y_-X_+Y_+.$$

Ces sept polygones forment les faces d'un heptaèdre remarquable, *qui n'a qu'un côté*. L'auteur se propose d'étudier les différentes représentations possibles de la surface de cet heptaèdre sur la surface indéfinie d'un plan, de manière qu'à un point de cette surface corresponde un point et un seul du plan, sauf pour les points des diagonales (autres que les sommets) auxquels correspondront deux points du plan et pour le point O auquel correspondront trois points du plan (suivant qu'il est regardé comme appartenant à l'une ou à

l'autre des trois faces ξ, η, ζ). Cette représentation doit de plus être continue (au sens de l'*Analysis situs*).

Une première représentation s'obtient, si l'on se place au point de vue de la Géométrie projective, en considérant les sept régions dans lesquelles le plan est partagé par les côtés prolongés d'un quadrilatère complet. Si l'on désigne par a, b, c, d ces quatre côtés et si l'on pose, pour leurs points d'intersection,

$$(a, d) = X_-, \qquad (b, c) = X_+,$$
$$(b, d) = Y_-, \qquad (c, a) = Y_+,$$
$$(c, d) = Z_-, \qquad (a, b) = Z_+,$$

le plan est partagé en quatre triangles et sept quadrilatères qui portent respectivement les mêmes désignations que les sept faces de l'heptaèdre. Plus généralement, tout heptaèdre homographique à l'heptaèdre donné sera représentable de cette manière sur le plan et réciproquement un heptaèdre, ne se réduisant pas à une figure plane et ayant toutes ses faces convexes, est représentable sur le plan ainsi divisé; il résulte de l'heptaèdre donné par une transformation homographique.

Dans la représentation qui vient d'être indiquée d'un heptaèdre à un seul côté sur un plan, il reste des éléments arbitraires, car chaque face de l'heptaèdre est représentée, *seulement dans son ensemble,* sur un des sept polygones de subdivision du plan. On peut, *d'une manière et d'une seule,* achever la détermination de la représentation de manière que les points de chaque face de l'heptaèdre correspondent aux points du polygone correspondant du plan par une transformation homographique, et que de plus les points de chaque arête correspondent aux points du segment corrrespondant du plan par une seule et même transformation homographique, que l'arête soit considérée comme appartenant à l'une ou à l'autre des faces auxquelles elle appartient. D'ailleurs une représentation de l'heptaèdre sur un plan jouissant des propriétés précédentes ne peut s'obtenir qu'en divisant le plan par les côtés indéfinis d'un quadrilatère complet.

A l'heptaèdre primitif on peut faire correspondre un *cubo-octaèdre* à 14 faces jouissant de la propriété suivante : à chaque face de l'heptaèdre correspondent deux faces du cubo-octaèdre qui lui sont congruentes, chacune d'elles se rapportant *à un des côtés* de la face de l'heptaèdre, de telle sorte qu'à tout déplacement continu sur la surface de l'heptaèdre ramenant au point de départ, *et sur le même côté de la face initiale*, correspond sur le cubo-octaèdre un déplacement continu ramenant au point de départ. L'auteur indique la manière la plus générale de faire correspondre à un heptaèdre, considéré comme surface double, un polyèdre à 14 faces respectivement congruentes aux faces correspondantes de l'heptaèdre.

Enfin l'auteur recherche s'il est possible de trouver un heptaèdre à un seul côté représentable sur un plan *avec congruence des faces correspondantes.* Dans le cas de la Géométrie euclidienne, il suffit de prendre pour l'un des côtés du quadrilatère complet la droite de l'infini, le seul triangle restant à distance finie ayant ses angles aigus; dans ce cas les sommets X_+, Y_+, Z_+ de l'heptaèdre sont seuls à distance finie, les autres étant rejetés à l'infini; l'heptaèdre est encore caractérisé par la condition que le tétraèdre formé par les faces *négatives* de l'octaèdre qui lui donne naissance ait une de ses faces à l'infini et que les trois autres soient rectangulaires deux à deux. Dans le cas de la Géo-

métrie elliptique, on a un résultat analogue; le tétraèdre dont il vient d'être parlé doit être tel que deux quelconques de ses sommets soient à une distance égale à $\frac{\pi}{2}$, en supposant que π soit la longueur de la droite complète.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO (¹).

Torino, C. Clausen; in-8°.

Tome XXXVI, 1900-1901.

Panetti (M.) [T 2 *a*]. — Sur le calcul des vibrations transversales d'une poutre élastique ébranlée. (6-26).

Severi (F.) [N_4 2 *i*]. — Sur les coniques touchant et rencontrant une ou plusieurs courbes gauches. (74-93).

Pieri (M.) [N]. — Sur les principes qui régissent la géométrie des droites. (335-350).

L'auteur fait ici pour la géométrie des rayons ce qu'il a fait ailleurs (*voir* ces *Atti*, t. XXX, XXXI et XXXII; *Rivista di Matematica*, t. VI, et *Mémoires de Turin*, 2ᵉ série, t. XLVIII) pour la géométrie projective ordinaire. Il établit les notions et les propriétés fondamentales par lesquelles on peut développer cette géométrie sans d'autre secours. Les notions élémentaires sont celles de *rayon* et d'*incidence* entre rayons. Les postulata sont au nombre de seize, dont onze tout particulièrement propres à cette géométrie et cinq sont les postulata segmentaires qui portent les numéros XIV-XVIII dans le Mémoire : *I principi della Geometria di Posizione ecc* (*Mém. de Turin*, 2ᵉ série, t. XLVIII, 1898).

Fano (G.) [N_2 1 *g*]. — Sur certaines congruences particulières de droites du troisième ordre. (366-380).

Ovidio (E. d') [V 9]. — Commémoration de Ch. Hermite. (419-424).

Palatini (F.) et *Giambelli (Z.)* [N_4 2 réf. Q_2]. — Produit de deux conditions caractéristiques relatives aux plans d'un hyperespace. (459-480).

Severini (C.) [D 1]. — Sur la représentation analytique des fonctions réelles d'une variable réelle. (480-488).

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXX_2, p. 168.

Garbasso (*A.*) [T 7 *d*]. — Sur la valeur maximum T_{me} de Maxwell. (489-499).

Scorza (*G.*) [M_1 2]. — Addition à la Note sur les correspondances (p, p) dans les courbes de genre p. (610-615).

Extrait d'une lettre à M. C. Segre.

Dans sa Note sur les correspondances (p, p) existant sur les courbes de genre p à modules généraux (*voir* ces *Atti*, t. XXXV, 1899-1900, p. 443), l'auteur avait laissé de côté la question des correspondances spéciales (5, 5) de valence 1, existant sur les courbes de genre 5. Ce cas est traité ici, et l'auteur trouve que ces correspondances, qui ne proviennent pas des séries g_6^1 spéciales (incomplètes), sont ∞^4.

Segre (*C.*) [P 4 *c*]. — Une observation relative à la réductibilité des transformations crémoniennes et des systèmes linéaires de courbes planes au moyen de transformations quadratiques. (645-651).

Conclusion : il n'est pas démontré que toute transformation crémonienne puisse se résoudre en un produit de transformations quadratiques.

Voir ci-dessous la Note de M. Castelnuovo (ce Tome, p. 861).

Picard (*E.*) [M_1 1 *f*]. — Sur les systèmes linéaires de genre zéro. (684-685).

Extrait d'une lettre à M. Segre.

Un système complet de genre zéro est régulier.

Ovidio (*E. d'*) [D 2]. — Sur certaines successions de moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques.

Étude de dix types de successions. Applications géométriques pour le cas de nombres réels et pour celui de nombres complexes.

Vaccaro (*A.*) [H 1]. — Intégration de systèmes d'équations différentielles. (708-720).

Sur la méthode des approximations successives.

Bellatalla (*A.*) [Q 2]. — Sur les variétés rationnelles normales composées d'un nombre ∞ d'espaces linéaires. (803-833).

Étant n l'ordre d'une variété composée d'un nombre ∞ d'espaces S_i, l'espace qui la renferme est un S_{n+i}, et la variété est représentée par le symbole

$$S_i - \mathfrak{L}_{i-1}^n.$$

Pour toute valeur de i et de n, on a plusieurs *espèces*, projectivement identiques, de ces variétés, caractérisées par les valeurs de certains nombres entiers, qui représentent les ordres des variétés minima.

Daniele (*E.*) [R 4 *b*]. — Sur la déformation infiniment petite des surfaces du deuxième degré. (837-860).

Application de la théorie des déformations infiniment petites d'une surface flexible et inextensible, traitée par l'auteur dans les *Mémoires de Turin*, t. L, 1900. Il a démontré dans ce Mémoire que, lorsqu'on connaît les flexions infiniment petites, on peut déterminer les déformations plus générales par des quadratures, et le problème des flexions a été résolu par M. Volterra (*Rendiconti dei Lincei*, 1885). Ici l'auteur, après avoir traité ce cas, s'occupe des déformations où les points ne se déplacent que suivant la normale à la surface, et qui ont aussi été traitées dans le Mémoire cité du Tome L (*extensions pures*). Deux cas particuliers d'extension pure d'une sphère conduisent respectivement à la surface minima d'Enneper et à une transformation involutive de Hazzidakis (*J. de Crelle*, t. 88).

Castelnuovo (*G.*) [P 4 ref. J 4 *f*]. — Les transformations génératrices du groupe crémonien dans le plan. (861-874).

Extrait d'une lettre à M. le professeur C. Segre.

Il est vrai que, dans certains cas, certaines transformations quadratiques employées par Nœther dans son procédé de réduction ne peuvent pas être employées pour abaisser l'ordre d'un système linéaire de courbes planes (comme M. Segre l'a remarqué dans sa Note de ce même Tome, p. 645), mais dans ce cas on peut se servir des transformations de Jonquières. Et comme l'auteur démontre que toute transformation de Jonquières peut se regarder comme le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques, il réussit à établir rigoureusement l'équivalence de toute transformation crémonienne avec le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques.

Jadanza (*N.*) [U 10]. — Sur le calcul de la convergence des méridiens. (887-890).

Perazzo (*U.*) [Q 2 ref. N_1 1 *j*]. — Sur une forme cubique à neuf droites doubles, de l'espace de cinq dimensions, et sur les complexes cubiques correspondants de droites de l'espace ordinaire (891-916).

Dans un S_5, les plans qui s'appuient à trois droites données (n'étant pas dans un même hyperespace) et à un plan général forment un système doublement infini L_1. L'auteur étudie la forme F déterminée par ce système, qui est du troisième ordre et de la troisième classe, et puis applique les propriétés de cette forme à l'étude de certains complexes cubiques de S_3.

Kantor (*S.*) [Q 2 ref. K 7 *a*]. — Les nombres rationnels en Géométrie. (916-923).

M. Busche (*Math. Ann.,* t. XLI, p. 591) a démontré analytiquement un théorème constituant une généralisation dans S_r des propriétés harmoniques du quadrilatère. L'auteur donne de ce théorème une démonstration géométrique, et puis une généralisation, qui conduit à la construction des nombres rationnels comme rapports anharmoniques.

Burali-Forti (*C.*) [M_1 3*i*, M_3 2*e* cf. B 12*c*]. — Sur certains points singuliers des courbes planes et gauches. (935-938).

Par la méthode des vecteurs, en considérant un point P(*t*), fonction d'une variable *t*, et le développement de Taylor relatif. l'auteur étudie les singularités des courbes, en prenant aussi en considération la courbure des courbes planes, et la courbure et la torsion des courbes gauches. Il trouve pour les courbes gauches cinquante types de singularités, et dix pour les courbes planes.

Volta (*L.*) [U]. — Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1902. (947-963).

Balbi (*V.*) [U]. — Éphémérides des planètes principales, calculées pour l'horizon de Turin en temps moyen de l'Europe centrale, pour 1902. (965).

Tome XXXVII, 1901-1902.

Enriques (*F.*) [M_2 1 ref. M_1 2]. — Sur les fondements de la Géométrie sur les surfaces algébriques. (19-40).

Les principes généraux de cette géométrie ont été posés par l'auteur dans deux Mémoires : *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (*Mém. de Turin,* 2ᵉ série, t. XLIV, 1893) et *Introduzione alla geometria sulle superficie algebriche* (*Mém. des XL,* 3ᵉ série, t. X). Du premier de ces Mémoires il a été donné un compte rendu dans ce *Bulletin* (t. XXXI_2, p. 131). Un travail ayant relation avec ce sujet est aussi le Mémoire de Castelnuovo et Enriques : *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (*Annali di Matematica,* 3ᵉ série, t. VI).

Ici l'auteur reprend l'étude de ces principes, en y introduisant des modifications, principalement en vue d'un but didactique. La difficulté principale dans ces recherches étant le fait qu'un point peut se transformer en une courbe, l'auteur réussit à la vaincre, en étudiant d'abord les propriétés des systèmes linéaires qui sont invariantes pour toute transformation ne produisant pas de courbes exceptionnelles, et puis, de ces propriétés invariantes relatives, il peut passer à d'autres qui possèdent une invariance sans restriction.

Morera (*G.*) [D 3 ref. D 5]. — Sur la définition de fonction d'une variable complexe (99-102).

Une variable

$$w = u + iv,$$

uniforme, continue et finie dans un champ connexe T, est une fonction de

$$z = x = iy,$$

lorsqu'on a

$$\int w\, dz = 0$$

sur le contour de toute portion de T simplement connexe.

La difficulté qu'on pourrait élever contre cette définition est que, .., w_1 étant deux fonctions de z, il ne s'ensuit pas de là que leur produit ww_1 le soit aussi. L'auteur démontre cette proposition.

Balbi (*V.*) [U]. — Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1903. (205-219).

Burali-Forti (*C.*) [O 5 ref. B 12 *c*]. — Les formules de Frenet pour les surfaces. (233-246).

L'auteur trouve par le calcul vectoriel des formules analogues à celles de Frenet.

P étant un point fonction de deux variables numériques q, q', ce qui fait que P est un point d'une surface, s étant l'arc d'une courbe

$$f(q, q') = 0$$

tracée sur la surface, s' celui d'une autre des ces courbes à angle droit avec la première, on a

$$\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s}, \qquad \mathrm{T}' = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s'},$$

T, T′ étant des vecteurs-unité tangents aux deux lignes. Soit U le vecteur-unité qui est le produit extérieur de U, U′, produit qu'on indique par |UU′. En posant

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s}\,\mathrm{U}, \qquad \mathfrak{C}' = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s'}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s'}\,\mathrm{U},$$

$$\mathfrak{N} = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial s^2}\,\Big|\,\mathrm{U}, \qquad \mathfrak{N}' = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial s'^2}\,\Big|\,\mathrm{U},$$

$$\mathcal{G} = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial s^2}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s}\,\mathrm{U}, \qquad \mathcal{G}' = -\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial s'^2}\,\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial s'}\,\mathrm{U},$$

ces expressions sont respectivement la *torsion géodésique*, la *courbure normale* et la *courbure géodésique* des courbes s, s' en P.

Les formules analogues à celles de Frenet sont

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s} = \mathfrak{N}\,\mathrm{U} - \mathcal{G}\,\mathrm{T}',$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}'}{\partial s} = \mathcal{G}\,\mathrm{T} - \mathfrak{C}\,\mathrm{U},$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s} = \mathfrak{C}\,\mathrm{T}' - \mathfrak{N}\,\mathrm{T},$$

et trois autres pour les dérivées par rapport à s'. Ces formules peuvent s'em-

2e Partie

ployer avec avantage dans l'étude des surfaces, au lieu des *conditions d'immobilité* employées par M. Cesaro dans ses *Leçons de géométrie intrinsèque*.

L'auteur définit aussi le paramètre différentiel comme vecteur. u étant un nombre fonction du point P, on appelle *paramètre différentiel de* u sur la surface le vecteur ∇u, parallèle au plan tangent en P, et tel que

$$du = \nabla u \mid d\mathrm{P}.$$

Il montre le parti qu'on peut en tirer pour l'étude des surfaces.

Finzi (*A.*) [R8]. — Sur les variétés à trois dimensions dont les géodésiques admettent des caractéristiques indépendantes. (300-301).

Soit V une variété ayant constants les coefficients de rotation relatifs aux congruences principales; soit

$$ds^2 = 2\,\mathrm{T}\,dt^2$$

l'élément linéaire, où

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_{rs}^{1..n} a_{rs}\,x'_r\,x'_s.$$

Alors T est l'expression de la force vive d'un système dont le mouvement est à *caractéristiques indépendantes*, suivant une dénomination de M. Volterra; ces *Atti*, t. XXXIII (voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 234).

Tanturri (*A.*) [Q2 ref. $\mathrm{N}_1 2$]. — Sur certaines simples infinités d'espaces, et sur un théorème de M. Castelnuovo. (322-330).

Nombre des espaces contenant le plus grand nombre d'espaces générateurs d'une variété ∞^1.

Burali-Forti (*C.*) [R 1 $f\alpha$ ref. B 12 c]. — Engrenages plans. (393-413).

Tanturri (*A.*) [Q2 ref. $\mathrm{N}_1 2$]. — Comment quelques nombres, relatifs à des infinités elliptiques d'espaces, se déduisent des nombres analogues relatifs à des infinités rationnelles (413-420).

Ovazza (*E.*) [S5 ref. T2$a\varepsilon$]. — Contribution à la théorie des ressorts pneumatiques. (421-431).

Laura (*E.*) [S2c]. — Sur le mouvement, parallèlement à un plan, d'un fluide où il y a n tourbillons élémentaires. (469-476).

Fano (*G.*) [$\mathrm{N}_2 g\alpha$]. — Sur les congruences de droites, du troisième ordre, composées de tangentes principales d'une surface. (501-519).

Ces congruences sont représentables sur le plan et renfermées dans des complexes tétraédraux.

On n'a que les deux cas suivants :

1° La congruence des tangentes aux courbes asymptotiques du second système sur une surface réglée cubique;

2° Celle des tangentes aux courbes asymptotiques de l'un ou de l'autre système sur une surface cubique non réglée à trois points doubles biplanaires.

Baggi (*V.*) [U 10]. — Sur la manière d'éliminer l'erreur provenant de l'inégalité des diamètres des colliers dans les niveaux à lunette mobile. (545-552).

Severi (*F.*) [M_2 8]. — Le genre arithmétique et le genre linéaire en relation avec les réseaux de courbes tracées sur une surface algébrique. (625-643).

Étant donné sur la surface F un réseau dépourvu de points de base et de courbes fondamentales, p étant le genre et χ le nombre des courbes du réseau douées d'un point de rebroussement, l'expression

$$P_a = \frac{1}{24}\chi - p$$

ne change pas en changeant le réseau sur F. Elle est appelée par l'auteur le *genre arithmétique* de la surface, et elle est invariante pour toute transformation birationnelle.

π étant le genre de la jacobienne du réseau, σ le nombre de ses points de base ordinaires, e le nombre de courbes exceptionnelles de F, le nombre

$$P^{(1)} = \pi - 9p + \sigma + 9 + e$$

est un invariant absolu que l'auteur appelle le *genre linéaire* de F.

Fubini (*G.*) [H 10 *d*]. — Sur les fonctions harmoniques admettant un groupe discontinu. (644-654).

Existence et construction d'une fonction harmonique ayant des singularités données et qui est transformée en elle-même par un groupe de mouvements ayant un polygone ou un polyèdre générateur situé totalement à distance finie. L'espace (à deux ou trois dimensions) est supposé à courbure constante, mais quelconque. La méthode consiste en des applications successives du procédé alterné dont l'auteur reporte ici une modification qu'il avait déjà donnée dans son Mémoire : *I principi fondamentali della teoria delle funzioni armoniche negli spazi a curvatura costante* [*Annali delle R. Senola Normale superiore di Pisa*, t. IX, 1904 (le Mémoire est toutefois de 1902)].

Niccoletti (*O.*) [B 1 *a*]. — Sur les matrices associées à une matrice donnée. (655-659).

Tome XXXVIII; 1902-1903.

Peano (*G.*) [V 1 *a* ref. B 12 *c*]. — La Géométrie fondée sur les idées de points et de distance (6-10).

M. Pieri, dans une suite de travaux, particulièrement dans deux Mémoires (*Mém. de Turin*, 2e série, t. XLVIII et t. XLIX), a montré quelles peuvent être les idées primitives nécessaires pour fonder la Géométrie projective et ensuite la Géométrie élémentaire. Il emploie pour cette dernière les notions de *point* et de *distance*. M. Peano, dans ces *Atti*, 1898 (*Analisi della teoria dei vettori*), a employé pour le même but les idées primitives de *point* et de *vecteur*, en y ajoutant ensuite le *produit intérieur de deux vecteurs*.

Ici il montre comment, au moyen du *point* et de la *distance*, on peut définir l'égalité entre deux vecteurs, celle entre leurs valeurs absolues, et leur perpendicularité.

Palatini (*F.*) [B 9]. — Sur la représentation des formes, et en particulier de la cubique quinaire, par une somme de puissances de formes linéaires. (43-50).

L'auteur commence par des considérations d'ordre général relatives à la représentation d'une forme d'ordre n par une somme de $n^{\text{ièmes}}$ puissances; considérations fondées sur le fait que le système linéaire de variétés V_{r-1}^n dans l'espace fondamental S_r $\left(\text{système dont la dimension est } m = \frac{(n+1)\ldots(n-r)}{r!} - 1\right)$ peut se représenter linéairement par les points d'un espace S_m. Alors, étant M la variété de S_m formée par les points qui correspondent à celles des variétés V_{r-1}^n qui dégénèrent en un hyperplan compté n fois, la condition pour que l'équation d'une V_{r-1}^n générale puisse se mettre sous la forme

$$a_1 A_1^n + a_2 A_2^n + \ldots + a_k A_k^n = 0,$$

les A_i étant des formes linéaires, est que par tout point de S_m passe un espace S_{k-1} qui soit sécant de la variété M, c'est-à-dire qui ait avec M en commun k points.

Il déduit de là que la cubique quinaire générale ne peut se représenter par une somme de sept cubes. Elle est représentable par une somme de huit cubes, l'un des huit plans pouvant être pris arbitrairement.

Campetti (*A.*) [T 7 *b*]. — Sur la chaleur de dissociation électrolytique (64-75).

Morera (*G.*) [R 6 *b* α]. — Sur les équations dynamiques de Lagrange. (121-134).

Ces équations ne subissent aucun changement lorsqu'à la force vive on ajoute

$$\varphi = \frac{dU}{dt} + \lambda_1 \frac{df_1}{dt} + \lambda_2 \frac{df_2}{dt} + \ldots.$$

U étant une fonction arbitraire des p_i et de t, les λ des fonctions arbitraires des p_i, p'_i et de t, et les f_1, f_2, ... des intégrales des équations différentielles des liens, et même de celles du mouvement, mais ne renfermant pas les p'_i.

Panichi (*U.*) [ ]. — Contributions à la cristallographie zonale. (135-149).

Application de l'homologie et du principe des forces normales.

Maroni (*A.*) [M_2 8]. — Sur les surfaces algébriques qui possèdent deux faisceaux de courbes algébriques se rencontrant en un seul point. (149-154).

π_1 étant le genre du faisceau K_1 et π_2 celui du faisceau K_2, le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface est

$$p^{(1)} = 8(\pi_1 - 1)(\pi_2 - 1) + r;$$

la dimension r du système complet $|C|$ obtenu en ajoutant une série linéaire $g_{m_1}^{\rho_1}$ de K_1 à une $g_{m_2}^{\rho_2}$ de K_2 est

$$r = \rho_1\rho_2 + \rho_1 + \rho_2.$$

Burali-Forti (*C.*) [R 1 *c* ref. B 12 *c*]. — Sur le mouvement d'un corps rigide. (155-170).

Application de la méthode de Grassmann, qui donne des démonstrations d'une grande simplicité et permet aussi d'éliminer la considération des moments.

Boggio (*T.*) [D 2 *b*]. — Sur le développement en série de certaines fonctions transcendantes. (171-178).

La valeur de la fonction est comprise entre la somme d'un nombre pair et celle d'un nombre impair de termes du développement. Démonstration de cette proposition pour les fonctions

$$e^{-x},\quad \log(1+x),\quad \text{arc tang}\, x,\quad (1+x)^m,\quad \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

pour les fonctions de Bessel et pour la série hypergéométrique.

Severi (*F.*) [M_2 8]. — Sur les surfaces représentant les couples de points d'une courbe algébrique. (185-200).

Le cas relatif aux courbes de genre 2 a été étudié par M. Humbert. L'auteur suppose le genre $\pi \geqq 3$. Alors pour les surfaces en question, P_g étant le genre géométrique, P_a le genre arithmétique, $p^{(1)}$ le genre linéaire, on a

$$P_g = \tfrac{1}{2}\pi(\pi - 1),$$
$$P_a = \tfrac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi,$$
$$p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

En représentant la surface par la congruence des cordes d'une courbe canonique $\gamma_{\pi}^{2\pi-2}$ de l'espace $S_{\pi-1}$, l'auteur trouve que sur cette congruence le système canonique complet est rencontré par les complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$.

Ensuite il considère les intégrales de différentielles totales de première espèce relatifs aux variétés représentant les groupes de 2, 3, ..., π points de la courbe, et trouve que la surface possède π de ces intégrales.

Enfin, au moyen des intégrales doubles, il trouve la génération des courbes canoniques, pour les surfaces représentant les couples, et indique l'usage qu'on peut faire des intégrales multiples dans la question analogue relative aux surfaces représentant les groupes de 3, 4, ... points de la courbe.

Balbi (*V.*) et *Volta* (*L.*) [U]. — Passages des bords de la Lune, et détermination de l'ascension droite du cratère Mösting A, observés au cercle méridien de Turin en 1901 et 1902. (241-276).

Gatti (*E.*) [T3*a*]. — Propriété relative à une forme spéciale du prisme réfringent. (301-313).

Regis (*D.*) [K23]. — Sur la perspective parallèle. (314-329).

Fubini (*G.*) [Q2 ref. J4]. — Sur la théorie des espaces admettant un groupe conforme. (404-418).

Si un groupe G de transformations conformes d'un espace S_n admet des variétés invariantes minima $V_m (m \leqq n)$, le groupe peut se réduire, par un changement de variables, à un groupe opérant sur m variables, avec m seules transformations linéairement indépendantes. Et si $m < n$, l'espace S_n est représentable conformément sur un S'_n pour lequel G est un groupe de mouvements.

Avec les $V_m (m < n)$ on peut former au moins une simple infinité de V_{n-} invariantes, qu'on prend comme variétés $x_1 =$ const.; comme surfaces coordonnées $x_2, x_3, \ldots, x_n$, on prend des variétés formées par les trajectoires orthogonales des V_{n-1}; alors le groupe se réduit à opérer sur $n-1$ variables et transforme conformément en lui-même l'espace S_n et chacune des V_{n-1}.

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

étant l'élément linéaire, où

$$a_{11} = 1, \qquad a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0,$$

les conditions pour que la transformation

$$X = \sum_{1}^{n} \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

soit conforme sont

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr}\frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et la transformation est un mouvement.

La condition pour qu'un groupe opérant dans un espace euclidien puisse être considéré comme un groupe conforme est que le sous-groupe Γ, qui ne change pas un point général A, ne change pas non plus les directions partant de ce point et situées sur un cône quadrique.

Si un groupe conforme G peut être considéré comme un groupe de mouvements, tout espace S admettant G comme groupe conforme est conformément représentable sur un autre espace admettant G comme groupe de mouvements.

Pour les espaces admettant un groupe conforme qui ne peut être regardé comme groupe de mouvements, on voit que, si le groupe renferme une transformation du premier ordre

$$x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m + \ldots$$

ou d'ordre supérieur, l'espace est conformément applicable sur un espace euclidien. En dehors de ce cas, le groupe ne peut renfermer que des transformations d'ordre zéro

$$(A) \qquad X_1 = p_1 + \ldots, \qquad \ldots, \qquad X_m = p_m + \ldots$$

et des transformations du premier ordre du type

$$(B) \qquad \alpha(x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m) + \sum b_{ik} x_i p_k + \ldots \qquad (b_{ik} = - b_{ki}).$$

Le groupe des (B) est isomorphe à un sous-groupe de mouvements d'un espace à courbure constante et de $m - 1$ dimensions.

Boggio (*T.*) [T 7 c]. — Résolution du problème général de l'induction électrodynamique dans le cas d'un plan conducteur indéfini. (448-466).

F′ étant le potentiel électrique et (U′, V′, W′) le potentiel vecteur du champ induisant, il faut trouver les potentiels F_1, U_1, V_1, W_1 provenant des distributions induites sur le plan $z = 0$. Tous ces potentiels doivent satisfaire à l'équation

$$\Delta_2 - A^2 \frac{d^2}{dt^2} = 0 \qquad \left(\frac{1}{A} = \text{vitesse de la lumière}\right),$$

et à celle de la conservation de l'électricité

$$A\frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

En supposant (champ électromagnétique sinusoïdal)

$$F' = f(t)F'', \qquad U' = u(t)U'', \qquad V' = v(t)V'', \qquad W' = w(t)W'',$$

où les F'', U'', ... dépendent seulement de x, y, z, on trouve que f, u, v, w doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0,$$

ce qui leur donne la forme

$$ce^{mt} + c_1 e^{-mt}.$$

En supposant d'abord

$$F' = e^{iat}F'', \qquad U' = e^{iat}U'', \qquad V' = e^{iat}V'' \qquad \text{(parties réelles)},$$

on peut prendre pour F_1, U_1, V_1 les parties réelles des expressions

$$F_1 = e^{iat}F_2, \qquad U_1 = e^{iat}U_2, \qquad V_1 = e^{iat}V_2,$$

où F_2, U_2, V_2 sont des fonctions de x, y et de la valeur absolue de z, satisfaisant aux équations

$$\begin{gathered}
\Delta_2 + a^2 A^2 = 0, \\
iaAF_2 - \frac{dU_2}{dx} + \frac{dV_2}{dy} = 0, \\
\frac{dF_2}{dx} + iaAU_2 - h\frac{dU_2}{d|z|} = P, \\
\frac{dF_2}{dy} + iaAV_2 - h\frac{dV_2}{d|z|} = Q,
\end{gathered}$$

où P, Q sont des fonctions connues. L'auteur intègre ces équations et puis transforme les valeurs de F_2, U_2, V_2. Suit la recherche analogue pour le cas où l'on prend

$$\left.\begin{aligned}
F' &= e^{iat}F''_1 + e^{ibt}F''_2 \\
U' &= e^{iat}U''_1 + e^{ibt}U''_2 \\
V' &= e^{iat}V''_1 + e^{ibt}V''_2
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(parties réelles)}.$$

Enfin, il suppose un champ électromagnétique quelconque, les potentiels étant les parties réelles des expressions

$$F' = \sum_0^\infty {}_n e^{int}F''_n, \qquad U' = \sum_0^\infty {}_n e^{int}U''_n, \qquad V' = \sum_0^\infty {}_n e^{int}V''_n;$$

le problème est résolu par les parties réelles de

$$F_1 = \sum_0^\infty {}_n e^{int}F_{2,n}, \qquad U_1 = \sum_0^\infty {}_n e^{int}U_{2,n}, \qquad V_1 = \sum_0^\infty {}_n e^{int}V_{2,n},$$

où les $F_{2,n}$, $U_{2,n}$, $V_{2,n}$ sont données par des formules plus compliquées, mais analogues à celles des cas précédents.

Bianchi (*L.*) [O6*k*]. — Sur les surfaces applicables sur les paraboloïdes et sur leurs transformations. (515-534).

L'équation aux dérivées partielles dont dépend la recherche des surfaces applicables sur les quadriques a été mise sous une forme nouvelle par M. Calapso (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XVI, 1902, p. 297), par la considération du système conjugué *permanent*, c'est-à-dire commun à la surface et à toutes ses déformées. Un tel système est toujours réel lorsque la surface est à points elliptiques; lorsqu'elle est à points hyperboliques, on a les déformations *de première espèce*, à système permanent réel, et celles *de deuxième espèce* à système permanent imaginaire.

M. Bianchi traite un cas plus général que celui des paraboloïdes. Pour toutes les surfaces où dans l'élément linéaire on a

$$E = a_{11}u^2 + 2a_{12}u + a_{22},$$
$$F = \mp 2(a_{11}uv + a_{13}u + a_{12}v + a_{23}),$$
$$G = a_{11}v^2 + 2a_{13}v + a_{33},$$

la déformation dépend d'équations d'un type analogue à celles du cas des paraboloïdes, et pour lesquelles on peut établir une théorie de transformation analogue à celle de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \sin \omega,$$

dont dépend la recherche des surfaces à courbure constante.

I. Pour le cas où l'on prend le signe $+$ dans l'expression de F, et que le déterminant A des a_{ik} soit > 0, les équations sont

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$
$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right] = \frac{H}{A},$$

où

$$H = EG - F^2,$$

qu'on transforme en un système linéaire homogène par la méthode employée par M. Calapso dans le cas des paraboloïdes. En posant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 = \lambda^2,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2 = \mu^2,$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial u} = H_1, \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = H_2,$$

et en indiquant par ω un angle auxiliaire, on obtient le système

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\lambda \sin \omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \lambda \cos \omega,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \frac{H_1}{2A}\sin \omega - \frac{H_2}{2A}\cos \omega - \frac{\partial \omega}{\partial \beta}\mu,$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}\lambda.$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \mu \cos \omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial \beta} = \mu \sin \omega,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \mu,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \beta} = \frac{H_1}{2A} \cos \omega + \frac{H_2}{2A} \sin \omega + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \lambda,$$

ω satisfaisant à l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \frac{A_{22} - A_{33}}{A} \sin \omega \cos \omega - \frac{A_{23}}{A} \cos 2\omega,$$

où les A_{ik} sont les compléments algébriques des a_{ik} en A. Le système conjugué permanent (α, β) donne un système conjugué sur la surface déformée.

II. Pour $A < 0$ (et toujours le signe + pour F), on obtient un système linéaire analogue au précédent et une condition d'intégrabilité, analogue à (3), qui se réduit à l'équation dont dépend la recherche des surfaces pseudosphériques.

III et IV. Le cas où l'expression de F a le signe — est aussi étudié, dans l'hypothèse d'une déformation de première espèce, en supposant successivement $A > 0$, $A < 0$. Dans ces deux cas, lorsqu'on a aussi

$$A_{22} + A_{33} = \pm 2 A_{23},$$

la condition d'intégrabilité se réduit à la forme de Liouville.

V. Enfin l'auteur traite le cas des déformations de seconde espèce, qu'on a seulement pour le signe — et pour $A > 0$.

En particulier, pour le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

qui rentre dans le cas I, on a l'équation

$$(I) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Pour le paraboloïde hyperbolique (cas III), les déformations de première espèce dépendent de l'équation

$$(III) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} = \sin h\theta \cos h\theta.$$

et celles de seconde espèce (cas V) de l'équation

$$(V) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \cos h\, 2\omega.$$

L'auteur, en se rapportant à ces cas particuliers, donne les principes d'une théorie des transformations des surfaces dont l'élément linéaire a la forme (1). Dans le cas qui correspond à l'équation (I), il convient d'associer à cette équa-

tion l'autre

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} = \sin h\theta \cos h\theta,$$

qui appartient aux déformations de première espèce pour le cas du signe — et de $A < 0$, par exemple aux surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = (u^2+1)\,du^2 - 2uv\,du\,dv + (v^2 - \tfrac{1}{2})\,dv^2.$$

Entre les solutions des équations (I), (I′), on peut établir la relation

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \cos\sigma\cos\omega\sin h\theta - \sin\sigma\sin\omega\cos h\theta,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = \sin\sigma\cos\omega\sin h\theta + \cos\sigma\sin\omega\cos h\theta,$$

σ étant une constante arbitraire. En connaissant une surface applicable sur le paraboloïde elliptique, on connaît ω en fonction de α et β, et des dernières équations on déduit θ par intégration; au moyen de θ on a un nombre infini de surfaces (1). Celles-ci, en intégrant les mêmes équations en ω, donnant un nombre infini de surfaces applicables sur le paraboloïde, et ainsi de suite.

Pour l'équation (III) on a aussi un système de formules de transformation, mais de manière que toute solution θ de (III) conduit à une autre solution θ_1 de la même équation. Semblablement pour la (V).

Segre (*C.*) [V 7]. — Inductions sur l'influence de Gérome Saccheri sur la formation de la Géométrie non euclidienne. (535-547).

De certaines données historiques et biographiques on peut induire avec vraisemblance que l'*Euclides ab omni nævo vindicatus* du P. Saccheri a eu une influence directe sur Lambert, Gauss, Bolyai, Legendre et Lobatschefsky.

Bianchi (*L.*) [J 4]. — Sur les groupes finis continus de transformations conservant les aires ou les volumes. (596-611).

Une transformation de l'espace euclidien S_n en soi-même (pour des coordonnées cartésiennes orthogonales)

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est *équivalente* (conserve, pour $n = 2$, les aires; pour $n = 3$, les volumes) lorsqu'on a

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1.$$

La condition pour que la transformation infinitésimale Xf appartienne au groupe des transformations en question est

$$\sum_1^n \frac{\partial\xi_i}{\partial x_i} = 0,$$

et alors les transformations finies

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$$

du groupe à un paramètre, engendré par Xf, sont équivalentes.

L'auteur étudie les groupes G finis continus de ces transformations, dans le but de déterminer tous les sous-groupes dépendant d'un nombre fini de paramètres.

Deux groupes G_r, $\overline{G_r}$ de transformations équivalentes sont dits de même type lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation de variables

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où

$$I = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \text{const.},$$

et la question se réduit à trouver tous ces types. Une transformation infinitésimale Xf (comme l'auteur le montre d'abord) est changée en une transformation équivalente par les seules transformations

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

dont le déterminant fonctionnel est un multiplicateur de $Xf = 0$.

On trouve alors que la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe

$$G_r \equiv (X_1 f, \ldots, X_r f)$$

soit semblable à un groupe de transformations équivalentes, est que les $X_1 f$, ..., $X_r f$ aient un multiplicateur en commun. Les conditions pour l'existence de ce multiplicateur sont établies par l'auteur et puis transformées en employant une ampliation remarquable du groupe; elles se réduisent à ce que la caractéristique de la matrice

$$\left| \begin{matrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} & \sum_1^n{}_\lambda \dfrac{\partial \xi_{1\lambda}}{\partial x_\lambda} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \ldots & \xi_{rn} & \sum_1^n{}_\lambda \dfrac{\partial \xi_{r\lambda}}{\partial x_\lambda} \end{matrix} \right|$$

ne soit pas abaissée par la suppression de la dernière colonne.

Une classe de groupes semblables à des groupes de transformations équivalentes s'obtient aussi en partant d'une forme différentielle

$$\varphi = \sum a_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k,$$

admettant un groupe continu G_r de transformations en elle-même. Une transformation de variables

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour laquelle

$$\frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \sqrt{|a|};$$

a étant le déterminant de φ, change G_r en un groupe de transformations équivalentes.

Si tous les types de groupes à n variables étaient connues, on pourrait voir lesquels d'entre eux sont semblables à des groupes de transformations équivalentes, et faire ainsi la classification de ces derniers. Pour $n = 2$ et $n = 3$ les types ont été assignés complètement par Lie, et l'auteur s'appuie sur ses résultats pour trouver tous les types en question pour $n = 2$. En vue de cette recherche, il change d'abord la forme du problème, en introduisant la *fonction génératrice* de Xf, définie de la manière suivante :

Si

$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

est une transformation infinitésimale équivalente, puisqu'il doit être

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} = 0,$$

il en résulte qu'une fonction $I_1(x, y)$, satisfaisant à

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \eta_1, \qquad \frac{\partial I_1}{\partial y} = -\xi_1,$$

est déterminée à moins d'une constante. Cette I_1 est la *fonction génératrice* de $X_1 f$, et l'on écrit

$$X_1 f = \frac{\partial(I_1, f)}{\partial(x, y)}.$$

Alors on peut dire qu'à tout groupe

$$G_r \equiv (X_1 f, \ldots, X_r f)$$

de transformations équivalentes, correspondent r fonctions génératrices

$$I_1, \ \ldots, \ I_r$$

qui ont les propriétés suivantes :

1° Il n'y a entre elles aucune relation linéaire à coefficients constants;

2° Tous les déterminants fonctionnels

$$\frac{\partial(I_k, I_l)}{\partial(x, y)}$$

sont des combinaisons linéaires à coefficients constants de $I_1, \ldots, I_r$. Cela posé, la recherche est dressée à trouver tous les types de systèmes de fonctions I ayant les propriétés énoncées.

Par cette méthode on trouve quatre types de groupes primitifs :

1° Le groupe linéaire spécial de Lie

$$\boxed{p, \quad q, \quad xq, \quad yp, \quad xp - yq};$$

2° Le groupe des mouvements du plan

$$\boxed{p, \quad q, \quad xq - yp};$$

3° Le groupe de mouvements

$$\boxed{q,\quad \sqrt{1-y^2}\cos y.p + \frac{x \sin y}{\sqrt{1-x^2}} q,\quad \sqrt{1+x^2}\sin y.p - \frac{x \cos y}{\sqrt{1-x^2}} q}$$

de la sphère;

4° Le groupe de mouvements

$$\boxed{q,\quad xp - yq,\quad 2xyp + \left(\frac{1}{x^2} - y^2\right) q}$$

de la sphère.

Pour les groupes imprimitifs on a, avec un nombre illimité de paramètres :

5° Le groupe

$$\boxed{p,\quad q,\quad xq,\quad x^2 q,\quad \ldots,\quad x^r q,\quad xp - yq} \quad r > 0;$$

6° Le groupe

$$\boxed{q,\quad xq,\quad F_1(x) q,\quad F_2(x) q,\quad \ldots,\quad F_r(x) q} \quad r > 0;$$

et, avec un nombre limité de paramètres :

7° Le groupe

$$\boxed{p,\quad xp - yp,\quad x^2 p - 2xyq};$$

8° Le groupe

$$\boxed{p,\quad xp - yq,\quad x^2 p + (1 - 2xy) q};$$

9° Le groupe

$$\boxed{p,\quad q,\quad xp - yq},$$

avec ses trois sous-groupes :

10° $$\boxed{q,\quad xp - yq},$$

11° $$\boxed{p,\quad q},$$

12° $$\boxed{q}.$$

Il n'y a que les types (6), (11) et (12) qui soient *abéliens*, c'est-à-dire constitués de transformations permutables deux à deux.

Rizzo (*G.-B.*) [U]. — Sur le calcul de la constante solaire. (612-628).

Jorio (*C.*) [K 11 *d*]. — Contribution à l'étude des courbes de raccordement à deux centres. (656-684).

Bianchi (*L.*) [J 4]. — Sur les groupes finis continus de transformations proportionnelles (703-717).

Ce sont les transformations qui changent les volumes (respectivement les aires) dans un rapport constant. Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que le déterminant fonctionnel de la transformation

$$I = \frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

soit constant.

La condition pour qu'un groupe

$$G_r \equiv (X_1 f, \ldots, X_r f)$$

soit de transformations proportionnelles est que pour chacune de ses transformations infinitésimales

$$Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

l'expression

$$\Omega = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}$$

soit une constante γ (lorsque toutes les γ sont égales à zéro, le groupe est de transformations équivalentes; *voir* la Note précédente, ce Tome, p. 596). Après avoir démontré que le groupe dérivé d'un groupe de transformations proportionnelles est formé par des transformations équivalentes, l'auteur démontre qu'un groupe G_r, possédant un sous-groupe invariant G_{r-1} semblable à un groupe de transformations équivalentes, est semblable à un groupe de transformations proportionnelles. Ainsi la recherche des types de groupes proportionnels est réduite à celle des groupes équivalents. Il suffit de faire pour chacun de ces derniers une ampliation, de manière que le nouveau groupe ait un paramètre de plus, et renferme le premier comme sous-groupe invariant. Ce procédé, appliqué aux douze groupes de la Note précédente (ce Tome, p. 596), conduit aux types suivants de groupes proportionnels :

(1') $\boxed{p,\ q,\ xq,\ yp,\ xp-yq,\ xp+yq}$ (groupe des affinités),

obtenus par ampliation de (1) de la Note précédente;

(2') $\boxed{p,\ q,\ xq-yp,\ xp+yq}$ (groupe des mouvements et des similitudes),

obtenu de (2). Pour les autres types primitifs (3) et (4), l'ampliation n'est pas possible.

Les groupes imprimitifs donnent :

(5′) $\boxed{p,\ q,\ xq,\ x^2q,\ \ldots,\ x^rq,\ xp-yq,\ xp+yq}$,

(6′) $\boxed{q,\ xq,\ F_1(x)q,\ F_2(x)q,\ \ldots,\ F_r(x)q,\ yq}$,

(7′) $\boxed{p,\ xp-yp,\ x^2p-2xyq,\ yq}$,

(9′) $\boxed{p,\ q,\ xp-yq,\ xp+yp}$,

(10′) $\boxed{q,\ xp-yp,\ \left(y+\frac{c}{x}\right)q}$ (c = const.),

(11′) $\boxed{p,\ q,\ (\alpha x+\beta y)p+(\gamma x+\delta y)q}$,

(12′) $\boxed{q,\ ap+yq}$.

L'ampliation n'est pas possible pour le groupe (8).

Balbi (*V.*) [U]. — Éphémérides du Soleil, de la Lune et des planètes principales pour l'horizon de Turin et pour 1904. (733-749).

Ovazza (*E. d'*) [R9*d*]. — Méthode graphique de calcul des arbres à coude avec plus de deux appuis. (751-764).

Ovidio (*E.*) [V]. — Luigi Cremona. Notice nécrologique (821-823).

Giambelli (*Z.*) [B1*c*]. — Sur certaines propriétés des fonctions symétriques caractéristiques. (823-844).

Le problème de déterminer des fonctions symétriques de degré d en x_0, x_1, ..., x_s, linéairement indépendantes et telles que toute fonction symétrique rationnelle entière puisse s'exprimer linéairement au moyen de ces fonctions, peut se résoudre d'une infinité de manières. Un des systèmes de fonctions résolvant le problème est constitué par les expressions

$$\begin{vmatrix} x_0^{h_0} & x_1^{h_0} & \ldots & x_s^{h_0} \\ x_0^{h_1} & x_1^{h_1} & \ldots & x_s^{h_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{h_s} & x_1^{h_s} & \ldots & x_s^{h_s} \end{vmatrix} : X,$$

X étant le déterminant de Vandermonde. Par cela ces expressions s'appellent fonctions symétriques *caractéristiques*.

Pour ces fonctions a lieu un principe de dualité qui permet de construire

entre elles des identités, particulièrement importantes à cause d'une interprétation symbolique qu'on en peut donner dans la géométrie énumérative pour le problème des espaces sécants.

Morera (G.) [H6 ref. H8*d* ref. J4]. — Les systèmes canoniques d'équations aux différentielles totales dans la théorie des groupes de transformations. (940-953).

Si

$$U_r f = \frac{\partial f}{\partial t_r} + (f, f_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

sont les symboles de m transformations infinitésimales sur les $2n + m$ variables

$$p_1, \ q_1; \ p_2, \ q_2; \ \ldots; \ p_n, \ q_n; \ t_1, \ t_2, \ \ldots, \ t_m,$$

les f_r vérifiant identiquemeut les $\frac{m(m-1)}{2}$ relations

$$\frac{\partial f_r}{\partial t_s} - \frac{\partial f_s}{\partial t_r} + (f_r, f_s) = 0,$$

où

$$(f_r, f_s) = \sum_i \left(\frac{\partial f_r}{\partial p_i} \frac{\partial f_s}{\partial q_i} - \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \frac{\partial f_r}{\partial q_i} \right),$$

ces transformations engendrent un groupe à m paramètres $z_1, \ldots, z_m$ dont la transformation infinitésimale la plus générale est

$$\delta p_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial q_i} \delta z_s,$$

$$-\delta q_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial p_i} \delta z_s,$$

$$\delta t_r = \delta z_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \ \ r = 1, 2, \ldots, m).$$

Les formules de transformation s'obtiennent en intégrant le système aux différentielles totales

(1) $$dp_i = \sum_s \frac{\partial f_s}{\partial q_i} dt_s, \qquad dq_i = -\sum_s \frac{\partial f_s}{\partial p_i} dt_s,$$

qui est un système *canonique*.

L'intégrale

$$I = \int \left(\sum_s q_i \, dp_i - \sum_r f_r \, dt_r \right),$$

étendue à une ligne fermée quelconque dans le champ des p_i, q_i, t_r, est un invariant intégral du système (1).

Par suite, lorsque le système (1) est intégré, on a identiquement

$$\sum q_i\,dp_i - \sum f_r\,dt_r = \sum q_i^0\,dp_i^0 - \sum f_r^0\,dt_r^0 + d\Omega,$$

Ω étant une fonction des variables indépendantes t, qu'on trouve exprimée par

$$\Omega = \sum_s \int_{t_s^0}^{t_s} \left(\sum_i q_i \frac{\partial f_s}{\partial q_i} - f_s \right) dt_s.$$

En posant

$$V = \Omega + \sum_i p_i^0 q_i^0,$$

et en éliminant les p_i^0 au moyen des équations intégrales des (1), on obtient une solution complète du système involutif

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t_r} = f_r\left(t_1, \ldots, t_m;\ p_1, \ldots, p_n;\ \frac{\partial V}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial p_n}\right)$$

qui est l'*associé* du système canonique.

En posant au lieu de t_r et dt_r respectivement

$$t_r^0 + (t_r - t_r^0)\,t, \qquad (t_r - t_r^0)\,dt,$$

pour fixer le chemin d'intégration, les (1) deviennent le système d'Hamilton

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

dont l'intégration équivaut à celle de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, p_1, \ldots, p_n;\ \frac{\partial V}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial p_n}\right) = 0.$$

Tout système canonique est changé en un autre par toute transformation de contact sur les p_i, q_i.

Par la transformation de contact

$$q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \qquad -q_i^\star = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^\star},$$

Ω étant une solution du système involutif (2), le système canonique (1) est intégré, et les $p_i^\star$, $q_i^\star$ sont les intégrales. Cette propriété d'être réduit à une forme résolue par des transformations de contact est caractéristique pour les systèmes canoniques.

Pizzetti (*P.*) [R5*a*]. — Sur certaines équations fondamentales dans le problème des *n* corps. (954-961).

En employant les transformations linéaires, l'auteur trouve les formules relatives à la force vive et aux intégrales des aires, pour un changement des coordonnées, lorsqu'on porte l'origine au point représentant l'un des corps du

système, ou lorsqu'on rapporte la position du $i^{\text{ème}}$ corps au barycentre des $i-1$ corps précédents (coordonnées jacobiennes).

Giudice (F.) [C2a]. — Sur l'intégration par substitution. (962-965).

Condition générale pour la validité de la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(\xi)]\,\varphi'(\xi)\,d\xi.$$

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome CXLVI; 1908 (1).

Buhl (A.). — Sur la sommabilité des séries de Fourier. (60-62).

A 5610

Denjoy (A.). — Sur le choix de l'exposant de convergence pour les fonctions entières de genre infini. (62-64).

A 3610

Eugène et François Cosserat. — Sur la statique de la surface déformable et la dynamique de la ligne déformable. (68-71).

B 2000 1260

Schlesinger (L.). — Sur un système différentiel du second degré. (106-108).

A 4850

Esclangon (E.). — Sur les solutions périodiques de certaines équations fonctionnelles. (108-110).

A 6030

Farman (H.). — Essais méthodiques d'un aéroplane cellulaire. (112-113).

B 2840

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXII_2, p. 45.

Bréguet (*L.*). — Sur le rendement des hélices de propulsion. (113-116).

B 2840

Tzitzéica. — Sur une classe de surfaces. (165-166).

A 8830

Levi (*Eugenio-Elia*). — Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. (167-168).

A 5650 5660 4470

Cartan (*E.*). — Sur la définition de l'aire d'une portion de surface courbe. (168).

A 8460

Eugène et François Cosserat. — Sur la théorie des corps minces. (169-172).

B 3200

Fejér (*L.*). — Sur le développement d'une fonction arbitraire suivant les fonctions de Laplace. (224-227).

A 5620 2420

Petrovitch (*M.*). — Théorème sur les séries de Taylor. (272-274).

A 3610

Cotton (*E.*). — Sur l'intégration approchée des équations différentielles. (274-276).

A 4820 4880

Crémieu (*V.*). — Sur la diminution du roulis des navires. (277-279).

B 2850

Goursat (*E.*). — Sur un théorème de la théorie des équations intégrales. (327-329).

A 4470

Popovici (*C.*). — Sur les congruences de courbes planes. (386-388).

A 8455

Holmgren (*E.*). — Remarque sur une communication de M. Eugenio-Elia Levi. (388-389).

A 5650 5660 4470

Rémoundos (*G.*). — Sur les singularités des équations différentielles du premier ordre. (389-390).

A 4870

Raffy (*L.*). — Sur les surfaces à lignes de courbure confondues. (459-462).

A 8830

Störmer (*C.*). — Cas de réduction des équations différentielles de la trajectoire d'un corpuscule électrisé dans un champ magnétique. (462-465).

C 6845 B 2020

Traynard (*E.*). — Sur une surface hyperelliptique du quatrième degré sur laquelle 30 droites sont tracées. (520-521).

A 8050 7650

Kolossoff (*G.*). — Sur les problèmes d'élasticité à deux dimensions. (522-525).

A 5630 B 3200

Störmer (*C.*). — Cas de réduction des équations différentielles de la trajectoire d'un corpuscule électrisé dans un champ magnétique. (526-527).

C 6845 B 2020

Buhl (*A.*). — Sur les séries de polynomes tayloriens (575-578).

A 3630

Korn (*A.*). — Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. (578-580).

A 5633 B 3200

Boussinesq (*J.*). — Théorie de l'écoulement sur un déversoir vertical en mince paroi et sans contraction latérale : cas de la

nappe ondulée et son raccordement au cas de la nappe plongeante. (607-610).

B 2810

Tannery (*J.*). — Hommage des manuscrits de Galois à l'Académie. (611).

A 0010

Raffy (*L.*). — Applicabilité et modes divers de représentation des surfaces à lignes de courbure confondues. (618-620).

A 8840

Zaremba (*S.*). — Sur l'application d'un procédé alterné au problème biharmonique. (620-622).

A 5660

Störmer (*C.*). — Remarque relative à ma Note sur les équations différentielles d'un corpuscule électrisé dans un champ magnétique. (623).

C 6845 B 2020

Amans (*P.*). — Études anémométriques des hélices zooptères. (656-659).

B 2840

Boussinesq (*J.*). — Propriétés diverses des courbes exprimant, soit par leur enveloppe, soit directement, les coefficients de débit m d'un déversoir vertical en mince paroi, sans contraction latérale et à nappe noyée en dessous, en fonction de la pression relative N′ exercée sous les nappes au niveau du seuil. (667-671).

B 2810

Tannery (*J.*). — Manuscrits d'Évariste Galois. (674-676).

A 0010 0032

Le Vavasseur. — Sur les sous-groupes du groupe linéaire homogène à quatre variables et les systèmes d'équations aux dérivées partielles qui leur correspondent. (737-739).

A 1230 4840

Raffy (*L.*). — Sur les réseaux conjugués persistants qui comprennent une famille de lignes minima. (740-742).

A 8830

Girardville. — Sur le poids utile maximum qu'on peut soulever en aéroplane. (742-745).

B 2860

Bouttieaux. — Sur les conditions d'utilisation des ballons dirigeables actuels. (745-748).

B 2860

Deprez (*M.*). — Sur le planement des oiseaux. (797-800).

B 2860

Secrétaire perpétuel. — Congrès des Mathématiciens (Rome). (845-846).

A 0010

Darboux (*G.*). — Sur un problème relatif à la théorie des courbes gauches. (881-885).

A 8420 8830

Secrétaire perpétuel. — Communication à l'Académie du portrait de Descartes, par David Beck, envoyé par l'Académie des Sciences de Stockholm. (905).

A 0010

Humbert (*J.*). — Formules relatives aux minima des classes de formes quadratiques binaires et positives. (905-908).

A 2830

Duhem (*P.*). — Sur la découverte de la loi de la chute des graves. (908-913).

B 0010

Krigowski (*Z.*). — Sur les intégrales hyperelliptiques canoniques de seconde espèce. (914-915).

A 4060

Jouguet. — Application des lois de la similitude à la propagation des déflagrations. (915-918).

B 2460 2490 D 7150

Jacob (Colonel). — Intégromètre à lame coupante qui permet l'intégration de l'équation d'Abel $yy' = Ay^2 + By + C$. (953).

A 0080

Crussard et Jouguet. — Application des lois de similitude à la propagation des détonations. (954-956).

B 2460 2490 D 7150

Deprez (*M.*). — Sur le planement stationnaire des oiseaux. (1003-1004).

B 2840

Renard (*P.*). — Virage des aéroplanes. (1005-1008).

B 2840

Zervos (*P.*). — Sur une méthode de M. Goursat dans le problème de Monge. (1080-1083).

A 4840

Bachelier (*L.*). — Le problème général des probabilités dans les épreuves répétées. (1085-1086).

A 1630

Auric. — Sur le développement en fraction continue d'un nombre algébrique. (1203-1205).

A 2815 2920

Picard (*E.*). — Sur une équation aux dérivées partielles relative à une surface fermée. (1231-1235).

A 5660 4470

Séguier (*de*). — Sur les formes bilinéaires. (1247-1248).

A 2840

Sanielevici (*S.*). — Sur l'équation aux dérivées partielles des membranes vibrantes. (1249-1251).

A 5660 5640 4470

Deprez (*M.*). — Étude des phénomènes que présentent les ailes concaves dans le planement stationnaire et dans le vol plané des oiseaux. (1299-1302).

B 2840

Borel (*E.*). — Sur l'analyse des courbes polymorphes. (1304-1305).

A 1635

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces réglées. (1381-1384).

A 8450 8830

Denjoy (*A.*). — Sur les produits canoniques de genre infini. (1384-1386).

A 3610

Sanielevici. — Sur l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes. (1387-1389).

A 5660 4470

Tome CXLVII.

Myllor (*A.*). — Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique. (30-33).

A 5660 4470

Jacob (*Col*[el]). — Nouvel intégromètre. (33-34).

A 0080

Soreau (*R.*). — Sur le poids utile des aéroplanes. (34-38).

B 2830

Maillet (*E.*). — Sur certains systèmes d'équations différentielles. (116-118).

A 4820 B 2800

Denjoy (*A.*). — Sur les produits canoniques de genre infini. (118-120).

A 3610

Tzitzéica. — Sur les surfaces réglées. (173-174).

A 8450 8830

Yung (*H.*). — Sur les fonctions algébriques de deux variables. (174-176).

A 8040

Popovici. — Sur les points d'équilibre d'un fluide en mouvement. (177-179).

A 4820 B 2400

Esclangon (*E.*). — Sur les solutions périodiques d'une équation fonctionnelle linéaire. (180-183).

A 6030

Mayor (*B.*). — Sur le calcul des tensions dans les systèmes articulés à trois dimensions. (183-185).

B 1250

Stuyvaert. — Une sextique gauche circulaire. (232-234).

A 7650

Darboux (*G.*). — Sur un problème relatif à la théorie des systèmes orthogonaux et à la méthode du trièdre mobile. (287-293).

A 8850 8420

Witz (*A.*). — Contribution à l'étude dynamique des moteurs. (293-296).

B 0160 1620 3600

Haceg (*J.*). — Sur les familles de Lamé composées de surfaces égales. (286-299).

A 8420 8830

Rémoundos (*G.*). — Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. (299-301).

B 3600

Darboux (*G.*). — Sur un problème relatif à la théorie des systèmes orthogonaux et à la méthode du trièdre mobile. (325-329).

A 8850 8420

Pellet (*A.*). — Sur les équations ayant toutes leurs racines réelles. (342-343).

A 2420

Haag (*J.*). — Sur quelques mouvements remarquables. (343-345).

A 8420

Darboux (*G.*). — Sur un problème relatif à la théorie des systèmes orthogonaux et à la méthode du trièdre mobile. (367-373).

A 8850 8420

Cousin (*P.*). — Sur les fonctions périodiques. (377-379).

A 4070

Darboux (*G.*). — Sur un problème relatif à la théorie des systèmes orthogonaux et à la méthode du trièdre mobile. (399-405).

A 8850 8420 7650

Demoulin (*A.*). — Sur la théorie des lignes asymptotiques. (413-415).

A 8450 8830

Rémoundos (*G.*). — Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles. (416-418).

A 4880 3620

Haag (*J.*). — Sur les variations de deux surfaces réglées. (418-421).

A 8420 8830

Stodolkievicz (*A.*). — Sur le problème de Pfaff. (456-459).

A 5210

Cousin (*P.*). — Sur les fonctions périodiques. (459-460).

A 4070

Darboux (*G.*). — Détermination des systèmes triples orthogonaux qui comprennent une cyclide de Dupin et, plus généralement, une famille de surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. (484-488).

A 8860 8830 7650

Demoulin (*A.*). — Sur la quadrique de Lie. (493-496).

A 8450 8830

Esclangon (*E.*). — Le vol plané sans force motrice. (496-498).

B 2840

Darboux (*G.*). — Détermination des systèmes triples orthogonaux qui comprennent une famille de cyclides et, plus généralement, une famille de surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. (507-510).

A 8860 8830 7650

Nörlund (*E.*). — Sur les différences réciproques. (521-524).

A 1640

Maillard (*L.*). — Sur une expérience de cours relative à la rotation de la Terre. (524-527).

B 0810

Störmer (*C.*). — Sur une forme particulière à laquelle on peut réduire les équations différentielles des trajectoires des corpuscules électrisés dans un champ magnétique. (527-530).

A 5630 B 2020 C 4900

Picard (*E.*). — Sur deux applications de l'équation de Fredholm à des problèmes de Physique mathématique. (547-552).

A 5660 4470

Carrus (*S.*). — Sur les systèmes de familles de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées. (561-565).

A 8450 8830

Demoulin (*A.*). — Sur quelques propriétés des surfaces courbes. (565-568).

A 8450 8455

Nörland (*E.*). — Sur la convergence des fractions continues. (585-587).

A 3220

Carrus (*S.*). — Sur les systèmes de familles de surfaces se coupant suivant des lignes conjuguées. (620-624).

A 8450 8830 8860

Demoulin (*A.*). — Sur quelques propriétés des surfaces courbes. (669-672).

A 8450

Remy (*L.*). — Sur la valeur de l'invariant S pour une classe de surfaces algébriques. (783-785).

A 8040 8060

Haag (*J.*). — Sur les applications géométriques de certains mouvements remarquables. (837-839).

A 8420

Bénard (*H.*). — Formation de centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement. (839-842).

B 2490 2500

Bertin (*E.*). — Sur la giration des aéroplanes. (895-902).

B 2840

Levy (*M.*) et *Sebert*. — Rapport sur un Mémoire intitulé : « Recherches expérimentales sur la résistance de l'air effectuées par M. G. Eiffel ». (909-913).

B 2860

Garnier (*R.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre dont l'intégration est uniforme. (915-918).

A 4880

Brillouin (*M.*). — Sur la résistance des fluides et les expériences nécessaires. (918-920).

B 2840

Picard (*E.*). — De l'influence des points multiples isolés sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce d'une surface algébrique. (954-955).

A 8040 8060

Remy (*L.*). — Sur les surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une surface de genre *trois*. (961-963).

A 8040 8060

Haag (*J.*). — Sur les applications géométriques de certains mouvements remarquables. (963-966).

A 8420 8830

Maillet (*E.*). — Sur les équations différentielles et les systèmes de réservoirs. (966-968).

A 4800 B 2800 2810

Bénard (*H.*). — Étude cinématographique des remous et des vides produits par la translation d'un obstacle. (970-973).

B 2480 2490 2500

Tzitzéica. — Sur les réseaux conjugués à invariants égaux. (1036-1038).

A 8450

Demoulin (*A.*). — Sur la cyclide de Lie. (1038-1040).

A 7260 7650

Fejér (*L.*). — Sur une méthode de M. Darboux. (1040-1042).

A 3220 3610

Lalesco (*T.*) — Sur une classe d'équations différentielles linéaires d'ordre infini. (1042-1044).

A 6030 4460 4470

Darboux (*G.*). — Rapport sur le grand prix des Sciences mathématiques : « Réaliser un progrès dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré ». (1104-1109). (Mémoires de MM. X. Bianchi et C. Guichard).

A 8850

Bertin. — Rapport sur un Mémoire intitulé : « Étude sur les mouvements d'eau qui peuvent se produire au contact et au voisinage d'une paroi plane verticale », par MM. Fortant et Le Besnerais. (1119-1122).

B 2480 2810

Poincaré (H.). — Rapport sur « l'Étude statistique et mathématique sur la mortalité et l'invalidité professionnelle » de M. Risser. (1199).

A 1635

Drach (J.). — Sur les lignes géodésiques. (1267-1269).

A 8810 8840

Remy (L.). — Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques. (1270-1272).

A 8040 8060

Voisin (G.). — Description de l'aéroplane Voisin expérimenté par MM. Farman et Delagrange. (1272-1275).

B 2840

Poincaré (H.). — Remarques sur l'équation de Fredholm. (1367-1371).

A 4470 6030

Demoulin (A.). — Sur la cyclide de Lie. (1385-1388).

A 7650 8450

Dienes (P.). — Sur les singularités des fonctions analytiques. (1388-1390).

A 3610

Boutroux (P.). — Sur les intégrales multiformes des équations différentielles du premier ordre. (1390-1393).

A 4870

Traynard (E.). — Sur la condition pour que sept droites soient situées sur une surface du quatrième degré. (1393).

A 8040

Thouveny (L.). — Principes du vol à voile. (1466-1468).

B 2840

Radiot. — Modèle spécial de ballon. (1468).

B 2860

Korn (*A.*). — Sur les problèmes des efforts dans la théorie de l'élasticité. (1468-1470).

A 5640 5660 B 3200

J. T.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

Tome CXXXI; 1906.

Gundelfinger (*S.*). — Trois lettres de C.-F. Gauss à Joh. von Müller. (1-7).

Ces lettres, datées de 1808, sont adressées au célèbre historien Joh. von Müller, alors directeur général de l'Instruction publique dans le nouveau royaume de Westphalie. Dans la première, Gauss demande l'exemption du service militaire pour Bessel, en raison des services que son rare talent promet de rendre à l'Astronomie; dans les deux autres, il plaide pour les intérêts de l'Observatoire de Gœttingue.

Thomé (*L.-W.*). — Sur les équations différentielles linéaires simultanées. (8-24).

Dans une série de Mémoires parus dans le même journal, l'auteur s'est occupé de la théorie d'une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques; dans le présent article, il étudie un système d'équations différentielles linéaires simultanées du premier ordre, en ramenant ce système à une équation différentielle linéaire d'ordre supérieur. Ces systèmes ont été étudiés directement par Sauvage, Grünfeld, Königsberger, Horn, Schlesinger.

Considérons un système de m équations différentielles linéaires

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}\,y + a_{12}\,u + \ldots + a_{1m}\,z, \\ \dfrac{du}{dx} = a_{21}\,y + a_{22}\,u + \ldots + a_{2m}\,z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{m1}y + a_{m2}u + \ldots + a_{mm}z, \end{cases}$$

où les a_{ik} sont des fonctions de x définies dans un domaine simplement connexe, uniformes et, à l'exception de certains points isolés, continues; ces coefficients peuvent être des fonctions rationnelles de x, ou encore des fonctions rationnelles de x et d'une fonction algébrique entière irréductible s.

Un calcul de proche en proche donne les formules

$$\frac{d^r y}{dx^r} = b_r y + \mathrm{A}_{r1} u + \ldots + \mathrm{A}_{r\,m-1} z \qquad (r = 1, \ldots, m),$$

d'où résulte l'équation

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{dy}{dx} - b_1 y & A_{11} & \dots & A_{1,m-1} \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} - b_2 y & A_{21} & \dots & A_{2,m-1} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{d^m y}{dx^m} - b_m y & A_{m1} & \dots & A_{m,m-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,m-1} \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ A_{m-1} & \dots & A_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul, l'équation (2) est équivalente au système (1) et les fonctions u, ..., z s'expriment linéairement au moyen de y, $\dfrac{dx}{dy}$, $\dots$, $\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$.

Si l'on considère, par exemple, la fonction u et si le déterminant $D(y)$ des coefficients de y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dots$, $\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ dans les expressions de u, $\dfrac{dx}{du}$, $\dots$, $\dfrac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}$, n'est pas identiquement nul, la fonction u satisfait à une équation analogue à l'équation (2) pour y, et qui peut la remplacer.

Si l'on prend m intégrales indépendantes y_1, y_2, $\dots$, y_m de l'équation (2) et les m valeurs correspondantes pour chacune des autres fonctions u, ..., z, on a m^2 fonctions dont le déterminant Δ est égal à

$$\Delta = \frac{D(y)}{D},$$

$D(y)$ désignant le déterminant des fonctions y_i et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. Certains points singuliers du système (1) peuvent ne pas être points singuliers de l'équation (2) et réciproquement.

L'auteur étudie ensuite le cas des équations non homogènes en supposant que les seconds membres ont la forme générale étudiée dans le n° 1 du Mémoire du même auteur publié dans le Tome CVII de ce journal. Il étudie directement la forme des intégrales et ensuite en ramenant le système à une seule équation différentielle linéaire d'ordre m avec second membre.

Schwering (*K.*). — Application des fonctions elliptiques à un problème de Géométrie. (25-39).

On considère deux arcs de cercle se coupant en deux points A et B et limités à ces points ; on peut d'une infinité de manières considérer une suite de circonférences tangentes aux deux arcs de cercle donnés et telles que chacune soit tangente à la précédente et à la suivante. L'auteur se propose d'étudier la somme des périmètres et la somme des arcs de cercle de ces suites.

L'auteur arrive par une inversion à l'expression générale du rayon ρ_n du $n^{\text{ième}}$ cercle de la suite (n variant de $-\infty$ à $+\infty$). Il appelle $2a$ la distance AB, γ l'angle (compris entre o et π) sous lequel se coupent les deux arcs de cercle ;

il introduit la constante positive δ définie par

$$\operatorname{ch}\delta = \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}, \qquad \operatorname{sh}\delta = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2},$$

puis la constante u_0 définie par

$$\operatorname{ch} 2u_0 = -\frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

en désignant par φ l'angle de la direction AB avec la tangente en A à l'arc de cercle qui bissecte l'angle des deux arcs de cercle donnés.

On a alors, en fonction d'un paramètre arbitraire u, la formule

$$\begin{aligned}\rho_n &= \frac{a\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{ch}[2u-(2n-1)\delta]-\operatorname{ch}2u_0}\\ &= \frac{a\operatorname{sh}\delta}{2\operatorname{sh}\left[u+u_0+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right]\operatorname{sh}\left[u-u_0+\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta\right]}.\end{aligned}$$

Le cas particulier $u_0 = 0$ est celui où l'un des arcs de cercle se réduit aux deux segments indéfinis de droite qui sont les prolongements de AB au delà de A et au delà de B. Les cercles de la suite considérée sont tangents *extérieurement* à l'arc de cercle unique.

Le cas particulier $u_0 = \frac{\pi i}{2}$ est celui où l'un des arcs de cercle se réduit au segment de droite AB; les circonférences de la suite sont tangentes *intérieurement* à l'arc de cercle unique.

Le cas particulier $u_0 = \frac{\delta}{2}$ est celui où les deux arcs de cercle sont symétriques par rapport à AB, le segment AB étant la bissectrice *extérieure* de leur angle.

Le cas particulier $u_0 = \frac{\delta}{2} + \frac{\pi i}{2}$ est celui où les deux arcs de cercle sont symétriques par rapport à AB, le segment AB étant la bissectrice *intérieure* de leur angle.

La série $\Sigma\rho_n$ est, dans le cas où aucun de ses termes n'est infini, absolument convergente; c'est une fonction doublement périodique de u, avec les périodes πi et δ. Si l'on considère les fonctions elliptiques de Weierstrass construites avec les périodes

$$2\omega = \pi, \qquad 2\omega' = i\delta,$$

on a

$$\sum \rho_n = \frac{1}{2}a\frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}2u_0}\left[-\frac{2\eta_1}{\omega}u_0 + i\zeta(ui - u_0 i + \omega') - i\zeta(ui + u_0 i + \omega')\right].$$

De là on déduit, par différentiation, la somme des aires des cercles; on a, en effet,

$$\begin{aligned}\sum \rho_n^2 &= \frac{1}{2}a\frac{\operatorname{sh}\delta}{\operatorname{sh}2u_0}\frac{\partial}{\partial u_0}\sum\rho_n\\ &= -\frac{1}{2}a^2\operatorname{sh}^2\delta\frac{\operatorname{ch}2u_0}{\operatorname{sh}^3 2u_0}\left[-\frac{2\eta_1}{\omega}u_0 + i\zeta(ui-u_0 i+\omega') - i\zeta(ui+u_0 i+\omega')\right]\\ &\quad -\frac{1}{4}a^2\frac{\operatorname{sh}^2\delta}{\operatorname{sh}^2 2u_0}\left[\frac{2\eta_1}{\omega} - \wp(ui-u_0 i+\omega') - \wp(ui+u_0 i+\omega')\right].\end{aligned}$$

L'examen des cas particuliers énumérés plus haut conduit à des théorèmes de Géométrie intéressants.

Mandl (M.). — Sur la décomposition des fonctions de plusieurs variables en facteurs irréductibles. (40-48).

Dans le Tome CXIII de ce journal (p. 252 et suiv.), l'auteur a indiqué une méthode pour décider si une fonction rationnelle entière d'une variable, à coefficients numériques entiers, est réductible ou non, et, dans le cas de la réductibilité, pour décomposer cette fonction en ses facteurs irréductibles. Dans le présent article, il étend sa théorie au cas des fonctions de plusieurs variables en ramenant le cas de n variables à celui de $n-1$ variables.

Rados (Gustav). — Le discriminant de l'équation générale de la division du cercle. (49-55).

Dans cet article, l'auteur détermine directement, par des moyens tout à fait élémentaires, le discriminant de l'équation qui donne les racines $n^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité, n étant un entier donné quelconque. Si n décomposé en ses facteurs premiers est de la forme $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_s^{\alpha_s}$, on a, comme on sait, pour le discriminant la valeur

$$(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \frac{n^{\varphi(n)}}{p_1^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_1)}} p_2^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_2)}} \cdots p_s^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(p_s)}}}.$$

Ermakoff (W.). — Équations différentielles du premier ordre ayant des multiplicateurs de la forme

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}.$$

(56-73).

Dans le Tome XXIV du Recueil mathématique de Moscou, Korkine a publié un Mémoire sous le titre : *Études des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre.* Il y donne la solution du problème suivant :

Trouver l'expression la plus générale des fonctions M *et* N *rationnelles et entières par rapport à y, telles que l'équation différentielle*

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

admette le multiplicateur

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n},$$

exposants α_i étant des constantes et les quantités u_i des fonctions de la variable x.

Korkine a montré qu'on pouvait toujours résoudre le problème à l'aide d'intégrales définies. L'auteur donne de la solution de Korkine une exposition très simplifiée et qui évite l'examen du cas, très compliqué, où la somme des exposants du multiplicateur est un nombre entier négatif.

Après avoir montré que les fonctions u_i sont nécessairement des intégrales particulières de l'équation (1), l'auteur montre que, si α_1 n'est pas égal à -1, de toute équation différentielle admettant pour multiplicateur

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}$$

on peut déduire une équation différentielle admettant pour multiplicateur

$$(y-u_1)^{\alpha_1+1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}.$$

Réciproquement, si l'on connaît l'équation différentielle la plus générale admettant le dernier multiplicateur, on peut en déduire l'équation différentielle la plus générale admettant le premier multiplicateur, en supposant toujours

$$\alpha_1 \gtrless -1.$$

D'une manière plus générale, la solution du problème pour les exposants α_1+m_1, α_2+m_2, ..., α_n+m_n, où les m sont des entiers positifs ou nuls, entraîne la solution du problème pour les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, à condition qu'aucun des nombres α_i+m_i ne soit un entier positif ou nul inférieur à m_i.

Cela étant, la solution générale du problème est évidente dans le cas où tous les exposants α_i sont des entiers négatifs. L'intégrale générale d'une équation différentielle admettant le multiplicateur donné est, en effet, de la forme

$$(y-u_1)^{\alpha_1+1}(y-u_2)^{\alpha_2+1}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n+1}\theta(y)+\sum A_i\log(y-u_i)=C,$$

où $\theta(y)$ désigne une fonction rationnelle entière de y, à coefficients fonctions arbitraires de x, et où les A_i sont des constantes. On en déduit, par différentiation et division par le multiplicateur, les expressions cherchées de M et N, qui dépendent ainsi d'une fonction arbitraire de y et de constantes arbitraires.

Dans le cas général, on peut toujours ramener le polynome N à être de degré $n-2$ au plus, en retranchant de $M\,dx+N\,dy$ une expression de la forme

$$(y-u_1)^{-\alpha_1}(y-u_2)^{-\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{-\alpha_n}\,d[(y-u_1)^{\alpha_1+1}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n+1}\theta(y)],$$

où $\theta(y)$ désigne un polynome en y convenablement choisi ; cela sera toujours possible si la somme des exposants du multiplicateur n'est pas un nombre entier négatif ou nul, ce qu'on peut toujours obtenir. Si N est de degré $n-2$, M est de degré $m-1$, et le *problème fondamental de Korkine* consiste à trouver toutes les formes possibles de ces polynomes M et N, c'est-à-dire à déterminer leurs $2n-1$ coefficients. Or, ceux de M s'expriment immédiatement en fonction de ceux de N, et ces derniers sont donnés par un système de $n-1$ équations différentielles linéaires du premier ordre.

Dans le cas particulier où l'un des exposants est un entier négatif, soit $\alpha_i=-m$, ces équations différentielles admettent l'intégrale première

$$\left|\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}(y-u_1)^{\alpha_1}\ldots(y-u_{i-1})^{\alpha_{i-1}}(y-u_{i+1})^{\alpha_{i+1}}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}N(y)\right|_{y=u_i}=A_i.$$

Dans le cas général, supposons que $\alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_n$ soient des entiers négatifs et non $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$; on pourra alors rendre ces μ exposants positifs et l'on

aura $n-\mu$ intégrales premières correspondant aux $n-\mu$ derniers exposants et les $\mu-1$ autres intégrales premières suivantes :

$$\int_{u_1}^{u_i} (y-u_1)^{\alpha_1} \dots (y-u_n)^{\alpha_n} X(y)\, dy = A_i \qquad (i=2, 3, \dots, \mu).$$

Le système différentiel est ainsi complètement intégré par des intégrales définies.

L'auteur examine ensuite les cas particuliers $n=1$, $n=2$.

Teixeira (F. Gomes). — Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances des sinus. (74-85).

Si $f(x)$ est une fonction holomorphe dans l'aire limitée par celle des ovales représentées par l'équation

$$|\sin z| = c \leqq 1$$

qui a le centre à l'origine des coordonnées, elle est développable en une série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_m \sin^m x,$$

où

$$A_0 = f(0),$$

$$A_{2n} = \frac{f^{(2n)}(0) + S_{2n}^{(1)} f^{(2n-2)}(0) + \dots + S_{2n}^{(n-1)} f^{(2)}(0)}{(2n)!},$$

$$A_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0) + s_{2n+1}^{(1)} f^{(2n-1)}(0) + \dots + s_{2n-1}^{(n)} f'(0)}{(2n-1)!}.$$

Dans ces formules, $S_{2n}^{(m)}$ représente la somme des produits distincts des nombres

$$2^2, \quad 4^2, \quad 6^2, \quad \dots, \quad (2n-2)^2,$$

pris m à m, et $s_{2n+1}^{(m)}$, la somme des produits distincts des nombres

$$1^2, \quad 3^2, \quad 5^2, \quad \dots, \quad (2n-1)^2,$$

pris aussi m à m.

On sait, d'autre part, que les coefficients A_m sont donnés par la formule

$$A_m = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(z) \cos z\, dz}{\sin^{m+1} z},$$

le contour d'intégration étant une circonférence de rayon égal à β, ayant pour centre l'origine et telle que la fonction soit holomorphe à son intérieur.

La comparaison des deux valeurs de A_m conduit à des formules donnant les valeurs d'un grand nombre d'intégrales définies ; l'auteur examine en particulier les cas où $f(x)$ est égale à $\frac{1}{\cos x}$, x^{2k}, x^{2k+1}.

On arrive, en se bornant aux premières expressions de A_{2n} et A_{2n+1}, à des relations de récurrence remarquables entre les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler. C'est ainsi qu'en partant du développement de $\frac{x}{\sin x}$, on trouve la

relation symbolique suivante,

$$B'(B'^2+2^2)(B'^2+4^2)\dots[B'^2+(2n-2)^2] = \frac{[1.3\dots(2n-1)]^2}{2(2n-1)},$$

où l'on a posé

$$B'_{2n-1} = (2^{2n-1}-1)B_{2n-1}.$$

En partant de la fonction tang x, on trouve de même la relation symbolique

$$B''(B''^2+1^2)(B''^2+3^2)\dots[B''^2+(2n-1)^2] = [1.3\dots(2n-1)]^2(2n-1),$$

où l'on a posé

$$B''_{2n-1} = \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{n}B_{2n-1}.$$

On a, de même, pour les nombres d'Euler E_2, E_4, ..., les relations symboliques

$$E^2(E^2+2^2)\dots[E^2+(2n-2)^2] = [1.3\dots(2n-1)]^2,$$
$$E^2(E^2+1^2)\dots[E^2+(2n-1)^2] = (2n+1)!$$

Mertens (*F.*). — Sur les équations cycliques. (87-112).

1. L'auteur se propose de donner une démonstration nouvelle du théorème de Kronecker d'après lequel les racines de toute équation cyclique à coefficients rationnels s'expriment rationnellement au moyen des racines de l'unité.

2. Après avoir défini les résolvantes de Lagrange $L(\omega)$, $L(\omega')$, ... d'une équation cyclique de degré n, en posant

$$L(x) = x_0 + x^{n-1}x_1 + x^{n-2}x_2 + \dots + xx_{n-1},$$

et en désignant par x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} les racines de l'équation, par ω, ω', ... les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité autres que 1, l'auteur rappelle la théorie de la *composition* des équations cycliques d'après Kronecker. Si $L'(\omega)$, $L''(\omega)$ sont les résolvantes de deux équations cycliques de degré n, l'équation dont les racines ont une somme rationnelle donnée et dont les résolvantes $L(\omega)$ sont les produits $L'(\omega)$, $L''(\omega)$ est dite *résulter* de la composition des deux équations données. Si $f_1 = 0$ est une équation cyclique de degré n dont les résolvantes sont toutes différentes de zéro, et si $f_2 = 0$ est une équation cyclique quelconque de même degré, il existe une équation cyclique qui, composée avec la première, donne la seconde.

3. Si une équation cyclique de degré $n = 2^\rho$ est telle que ses résolvantes soient toutes différentes de zéro et que le carré $[L(-1)]^2$ soit le carré d'un nombre rationnel, on a

$$L(\omega) = \mathfrak{F}(\omega)\,\mathrm{A}(\omega^2),$$

$\mathfrak{F}(\omega)$ désignant un nombre rationnel en ω, et $\mathrm{A}(\omega^2)$ la résolvante d'une équation cyclique de degré $\frac{n}{2} = 2^{\rho-1}$. D'une manière analogue, si $n = \lambda^\rho$, λ désignant un nombre premier impair, et si $[L(\alpha)]^\lambda$ est la $\lambda^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre $\psi(\alpha)$ rationnel en α, où α désigne une racine primitive $\lambda^{\text{ième}}$ de l'unité, les racines de l'équation sont rationnelles dans le cas $\rho = 1$; sinon on a

$$L(\omega) = \mathfrak{F}(\omega)\,\mathrm{A}(\omega^\lambda),$$

$\varphi(\omega)$ étant rationnel en ω et $\Lambda(\omega^\lambda)$ désignant la résolvante d'une équation cyclique de degré $\frac{n}{\lambda} = \lambda^{\rho-1}$.

4. Si $n = 2^\rho > 2$, il existe toujours une équation cyclique de degré n telle qu'on ait

$$L(-1) = \sqrt{2};$$

il suffit de prendre l'équation dont les racines sont

$$x_h = \cos\frac{5^h\pi}{2n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1).$$

5. De même, si $n = \lambda^\rho$ et si α désigne une racine primitive $\lambda^{\text{ième}}$ de l'unité, il existe une équation cyclique de degré n telle que

$$[L(\alpha)]^\lambda = \alpha.$$

En désignant par g une racine primitive de λ satisfaisant à la congruence

$$g^{\lambda-1} \equiv 1 - \lambda \pmod{\lambda^2},$$

par r une racine $(n\lambda)^{\text{ième}}$ de l'unité satisfaisant à l'équation

$$r^n = \alpha,$$

il suffit de considérer l'équation dont les racines sont

$$x_i = \frac{1}{n}\sum r^{\frac{1}{d}ng^i + hn} \qquad (d = \lambda, \lambda^2, \ldots, n;\ h = 0, 1, \ldots, \lambda - 2).$$

6. Ces préliminaires établis, l'auteur arrive à la démonstration du théorème lui-même, en examinant, ce qui, comme on le sait, est suffisant, le cas où n est une puissance d'un nombre premier.

Si $n = 2^\rho > 2$, le nombre $[L(-1)]^2$ est un nombre entier positif ; l'auteur démontre que les seuls facteurs premiers qui puissent entrer dans $[L(-1)]^2$ avec un exposant impair sont 2 et les nombres premiers p congrus à 1 (mod n). Or (n° 4) on peut former une équation cyclique de degré n pour laquelle $L(-1) = \sqrt{2}$, et, d'après les théories de la division du cercle, on peut former une équation cyclique pour laquelle $L(-1) = \sqrt{p}$, p étant un multiple de n plus 1.

L'équation cyclique donnée peut donc être regardée comme résultant de la composition de ces équations cycliques auxiliaires et d'une équation cyclique pour laquelle $[L(-1)]^2$ est un carré parfait; autrement dit, les racines de l'équation donnée s'expriment rationnellement au moyen de racines de l'unité et des racines d'une équation cyclique de degré $\frac{n}{2}$. On peut donc, de proche en proche, se ramener au cas $n = 2$ pour lequel le théorème de Kronecker est vrai.

La démonstration est analogue dans le cas où $n = \lambda^\rho$, λ étant un nombre premier impair. La quantité $[L(\alpha)]^\lambda$ est un nombre $F(\alpha)$ rationnel en α. Si dans le domaine de rationalité défini par α on le décompose en facteurs premiers, le facteur premier $1-\alpha$ ainsi que ceux qui divisent des nombres

premiers naturels non congrus à 1 (mod n) entrent avec des exposants multiples de λ. D'autre part, on peut former des équations cycliques tirées de la théorie de la division du cercle, pour lesquelles $[L(\alpha)]^\lambda$ reproduit les autres facteurs premiers et les unités de $F(\alpha)$ dont les exposants ne sont pas multiples de λ, et l'on arrive à la même conclusion que pour le cas $n = 2^\rho$.

7. La démonstration même donnée par l'auteur lui donne la forme générale des racines d'une équation cyclique de degré n. Si $n = \lambda^\rho$, si d désigne un quelconque des diviseurs de n, si s parcourt la suite des nombres entiers positifs inférieurs à n et premiers avec n, si s' désigne l'entier inférieur à n et satisfaisant à la congruence

$$ss' \equiv 1 \qquad (\bmod n),$$

si enfin s'' désigne l'entier inférieur à $\frac{n}{d}$ satisfaisant à la congruence

$$ss'' \equiv 1 \qquad \left(\bmod \frac{n}{d}\right),$$

on a

$$L(\omega^d) = F_d(\omega^d)\,\Pi f(\omega^s)^{\frac{1}{n}d(s'-s'')};$$

dans cette formule, F_d et f désignent deux fonctions rationnelles entières à coefficients rationnels.

8. Une représentation analogue existe si $n = 2^\rho$.

Busche (E.). — Sur les réseaux de points dans le plan. (113-135).

1. Étant donné un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires d'origine O, les points ayant pour coordonnées des nombres entiers constituent les sommets d'un réseau de carrés. Considérons deux de ces points A_1 et A_2 de coordonnées (a_{11}, a_{21}) et (a_{12}, a_{22}); ils déterminent ce que l'auteur appelle le *système* (a_{ik}); le déterminant

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

est un entier supposé toujours positif; de plus, les points O, A_1, A_2 déterminent un parallélogramme $OA_1A_3A_2$ d'aire a et un réseau de parallélogrammes congruents, qui sera dit appartenir au système (a_{ik}).

Le plus grand commun diviseur τ des quatre coordonnées a_{ik} est dit le *diviseur des coordonnées du système;* si $\tau = 1$, le système est dit *primitif.*

Si l'on effectue sur les coordonnées des deux points A_1 et A_2 une même substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant égal à 1, on obtient un système (b_{ik}) *affine* du premier, et l'on a

$$(b_{ik}) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} (a_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{21} & \alpha a_{12} + \beta a_{22} \\ \gamma a_{11} + \delta a_{21} & \gamma a_{12} + \delta a_{22} \end{pmatrix}.$$

Si, au contraire, les sommets des réseaux de parallélogrammes appartenant à deux systèmes (a_{ik}) et (b_{ik}) sont les mêmes, les deux systèmes sont dits

associés et l'on a

$$(b_{ik}) = (a_{ik})\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \gamma a_{12} & \beta a_{11} + \delta a_{12} \\ \alpha a_{21} + \gamma a_{22} & \beta a_{21} + \delta a_{22} \end{pmatrix}.$$

2. Tout système est associé à un système *réduit* et à un seul de la forme $\begin{pmatrix} d & 0 \\ r & d' \end{pmatrix}$ où $d > 0$, $d' > r \geq 0$. Le nombre des systèmes non associés de déterminant a est égal à la somme $\Phi(a)$ de tous les diviseurs de a. Le nombre des systèmes non associés primitifs de déterminant a est égal à

$$\psi(a) = a\left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right)\cdots,$$

en désignant par p_1, p_2, ... les facteurs premiers de a.

Tout système est de même affine d'un système réduit et d'un seul de la forme $\begin{pmatrix} d & r \\ 0 & d' \end{pmatrix}$, où $d > 0$, $d' > r \geq 0$.

3. Deux systèmes (a_{ik}) et (b_{ik}) sont dits du même *type* s'ils sont affines ou bien si les deux parallélogrammes $OA_1A_3A_2$, $B_1B_3B_2O$ peuvent être transformés l'un dans l'autre par une substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant égal à 1; autrement dit, si les deux systèmes $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_{12} & -b_{11} \\ b_{22} & -b_{21} \end{pmatrix}$ sont affines.

Le nombre des types différents de déterminant donné a est égal à

$$\chi(a) = \frac{1}{2}\Phi(a) + \frac{1}{2}\eta\rho,$$

où ρ est le nombre des diviseurs de a, qui ne contiennent que des facteurs premiers $4n+1$, et où η est égal à 0 ou à 1, suivant que a contient ou non un facteur premier de la forme $4n+3$ avec un exposant impair.

4. On peut numéroter les systèmes réduits non associés de déterminant donné a. Tout point à coordonnées entières (x, y) est sommet d'un ou de plusieurs parallélogrammes appartenant à ces systèmes, c'est-à-dire tout point à coordonnées entières peut être affecté d'un ou de plusieurs numéros d'ordre; l'auteur désigne le nombre de ces numéros d'ordre par $\Phi(x, y, a)$. Si l'on ne considère que les systèmes primitifs, le nombre des numéros d'ordre se réduit à $\Psi(x, y, a)$; ce nombre est égal au produit des puissances des facteurs premiers du plus grand commun diviseur (x, y) qui entrent dans (x, y) avec un exposant inférieur à celui où ils entrent dans a, ce produit étant multiplié par la fonction $\psi(\overline{a})$, où $\overline{a}$ est formé des puissances des facteurs premiers de a qui entrent dans a avec un exposant inférieur ou égal à celui qu'ils ont dans (x, y).

5. Si, par l'origine, on mène une droite de coefficient angulaire rationnel, tous les points à coefficients entiers situés sur cette droite ont les mêmes numéros d'ordre. Pour que ces numéros d'ordre soient les mêmes pour deux droites de

coefficients angulaires $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{m}{n} = \frac{m' + ka}{n' + la},$$

où k et l sont des entiers arbitraires.

La transformation affine $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ transforme entre elles les différentes droites à coefficients angulaires rationnels ; si l'on a

$$\alpha \equiv \delta, \qquad \beta \equiv 0, \qquad \gamma \equiv 0 \qquad (\bmod a),$$

cette transformation ne change pas les numéros d'ordre.

6. Le système b_{ik} est dit divisible par le système (a_{ik}) si l'on a

$$(b_{ik}) = (a_{ik})[\alpha_{ik}],$$

où les α_{ik} sont des entiers. Le nombre des systèmes non associés de déterminant a, qui sont divisibles par un système donné de déterminant c, est $\Phi\left(\frac{a}{c}\right)$, c étant supposé, bien entendu, un diviseur de a.

7. Si b est divisible par a, le nombre des systèmes (a_{ik}) de déterminant α, qui sont diviseurs d'un système donné (b_{ik}) de déterminant b et admettant ρ pour diviseur des coordonnées, est égal à $\Phi\left(\frac{b}{a}, \rho, a\right)$, où Φ est la fonction définie au n° 4.

8. Après avoir défini la somme et la différence de deux systèmes, l'auteur définit la congruence de deux systèmes par rapport à un troisième pris comme module; on a

$$(n_{ik}) \equiv (r_{ik}) \qquad [\bmod(m_{ik})]$$

si

$$(n_{ik}) = (m_{ik})[\mu_{ik}] + (r_{ik}).$$

Si les systèmes (n_{ik}) et (m_{ik}) sont donnés, on peut toujours déterminer (r_{ik}) de manière que son déterminant soit inférieur à celui de (m_{ik}). On peut alors, par l'algorithme d'Euclide, définir le plus grand commun diviseur de deux systèmes donnés ; en réalité, ce n'est que l'ensemble des sommets du réseau de parallélogrammes appartenant à ce plus grand commun diviseur qui est complètement déterminé.

9. Si deux systèmes sont premiers entre eux, leur *produit* est, par définition, un des systèmes auxquels appartient le réseau de parallélogrammes dont les sommets sont tous les points communs aux deux réseaux appartenant aux deux systèmes donnés. Tout système admettant pour déterminant un nombre

$$a = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\pi_i}$$

et pour diviseur des coordonnées le nombre

$$\tau = \prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\mu_i} \qquad \left(0 \leq \mu_i \leq \frac{\pi_i}{2}\right)$$

peut être regardé comme le produit de ν systèmes; le $i^{\text{ième}}$ système admet pour déterminant $p_i^{\pi_i}$ et pour diviseur des coordonnées $p_i^{\mu_i}$. Le nombre total des diviseurs du système considéré est égal à

$$T(a, \tau) = \prod_{i=1}^{\nu} \left[\pi_i + 1 + (\pi_i - 1)p_i + \ldots + (\pi_i - 2\mu_i + 1)p_i^{\mu_i}\right].$$

10. Enfin le nombre des systèmes incongrus suivant un module (a, τ) donné et premiers avec ce module est égal à

$$\varphi(a, \tau) = a^2 \prod_{i=1}^{\rho} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) \prod_{j=1}^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{q_j^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q_j}\right),$$

en désignant par $q_1, \ldots, q_\sigma$ les facteurs premiers de τ, et par $p_1, \ldots, p_\rho$, $q_1, \ldots, q_\sigma$ ceux de a. La somme des fonctions $\varphi(a, \tau_a)$ étendue à tous les systèmes qui divisent le système donné est égale à a^2.

Stéphanos (*Cyparissos*). — Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques. (136-151).

L'auteur reprend le problème examiné par Bertrand, résolu complètement par Darboux et Halphen, de la détermination de toutes les lois de forces qui font décrire à un point mobile dans un plan une conique, quelles que soient les conditions initiales. Mais il ne suppose pas, comme Bertrand, que la force ait en chaque point une direction unique.

I. En partant de l'équation différentielle des coniques, où l'on suppose x et y exprimées en fonction d'un paramètre t, et en y remplaçant x'' et y'' par X et Y, projections de la force, on arrive à l'équation

$$15(Yx' - Xy')^2E + 9(Yx' - Xy')F + G = 0,$$

où E, F, G sont des polynomes entiers par rapport à x', y', X, Y et leurs dérivées, ces polynomes étant, par rapport à x', y', respectivement d'ordres 0, 3, 6. L'équation devant être vérifiée quelles que soient les conditions initiales, on doit avoir

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad G = 0.$$

II. L'équation $E = 0$ signifie que la droite passant par le point (x, y) et ayant la direction de la force (X, Y) reste toujours tangente à une courbe fixe.

III. En tenant compte de l'équation $E = 0$, on peut simplifier les expressions de F et G.

IV. Les équations $E = F = 0$ entraînent comme conséquence que la force

(X, Y), supposée non constamment nulle, doit être soit centrale, soit parallèle à une direction fixe. De plus, on a : soit

$$\frac{X}{x-x_1} = \frac{Y}{y-y_1} = [\Phi(x-x_1, y-y_1)+\mu]^{-3},$$

x_1, y_1, μ désignant des constantes, Φ une fonction linéaire et homogène de ses deux arguments ; soit

$$\frac{X}{a(x-x_1)} = \frac{Y}{b(y-y_1)} = \left[\varphi(ay-bx)-\frac{\mu x}{a}\right]^{-3},$$

$\varphi(ay-bx)$ désignant une fonction arbitraire de son argument et μ une constante.

V. L'équation $G=0$ entraîne $E=0$; de plus, elle exige que la force soit centrale ; enfin que la grandeur de la force soit de la forme $\tau^{-\frac{3}{2}}$, τ désignant un polynome du second degré en x et y.

VI. En réunissant les résultats précédents, on retrouve ceux de Darboux et d'Halphen.

Landsberg (*Georg*). — Remarques sur la théorie des courbes algébriques. (152-164).

Cet article peut être regardé comme un complément à la *Théorie des fonctions algébriques d'une variable*, publiée par K. Hensel et l'auteur lui-même. Il se compose de deux Notes.

Dans la première, l'auteur compare les deux représentations différentes dont est susceptible le système des points d'inflexion d'une courbe algébrique plane. Ces points peuvent, en effet, être obtenus soit en annulant le hessien du premier membre de l'équation de la courbe, soit en annulant le déterminant des coordonnées d'un point de la courbe et de leurs différentielles des deux premiers ordres. Ce dernier déterminant est plus simple que le hessien, en ce sens que le hessien contient, en plus que ce déterminant, le cube d'un facteur qui s'annule pour tous les points singuliers de la courbe, et en chacun d'eux avec le degré de multiplicité correspondant.

Dans la seconde Note, l'auteur indique les calculs effectifs à faire pour obtenir les points doubles d'une courbe algébrique gauche. Après avoir formé l'équation du cône ayant pour sommet un point donné et pour directrice la courbe donnée, il forme l'équation des génératrices doubles de ce cône. Le premier membre se décompose en un facteur indépendant du sommet du cône et qui fournit les points doubles de la courbe et en un autre facteur qui fournit les points doubles *apparents* (vus du sommet du cône).

Farkas (*Julius*). — Contribution aux fondements de la Mécanique analytique. (165-201).

Dans ce Mémoire, l'auteur se propose de serrer le plus près possible la réalité dans la mécanique des systèmes formés d'un nombre fixe de points matériels, au lieu de regarder cette mécanique comme un ensemble de pures

abstractions destinées à préparer la mécanique des systèmes formés d'une infinité de points matériels.

I. *Définitions et hypothèses.* — L'auteur suppose toujours le système de coordonnées choisi de manière que les coordonnées des différents points matériels du système soient des fonctions deux fois dérivables du temps. Il suppose de plus que la position de ce système de coordonnées ne dépende que de la suite des états *effectifs* du système de points matériels.

L'auteur désigne par la lettre d un changement infiniment petit *effectif*, par la lettre ∂ un changement infiniment petit *possible*.

Les points matériels M sont supposés reliés entre eux par un corps sans masse $\mathcal{K}$ et reliés aussi à d'autres corps K dont l'état mécanique est supposé indépendant des points M. Les points M doivent aussi se trouver en contact immédiat avec ces corps K, qui peuvent d'ailleurs subir des déplacements, même des déformations, indépendantes des points M. Le système formé par les points M, les corps $\mathcal{K}$ et K s'appelle le *système intérieur;* le *système extérieur* est formé par tous les autres corps de l'espace. L'ensemble des corps $\mathcal{K}$ et K constitue la *liaison* à laquelle est soumise le système de M.

L'auteur suppose que cette *liaison* se traduit analytiquement par un certain nombre d'égalités et d'inégalités entre les déplacements infiniment petits possibles (∂x, ∂y, ∂z) des points M et l'élément de temps correspondant ∂t. Il suppose de plus que, si $\partial t > dt$ et si (dx, dy, dz) désigne le déplacement effectif pendant le temps dt, le déplacement

$$(\partial x - dx, \partial y - dy, \partial z - dz)$$

soit un déplacement possible à partir de l'instant $t + dt$ pendant l'élément de temps $\partial t - dt$.

La liaison peut s'exprimer analytiquement de la manière suivante. Les composantes ∂x_i, ∂y_i, ∂z_i des déplacements possibles pendant le temps ∂t sont des formes linéaires d'un certain nombre de paramètres ∂v_1, ∂v_2, ..., ∂w_1, ∂w_2, ... et de ∂t; les paramètres ∂w_1, ∂w_2, ..., ainsi que ∂t, étant assujettis à l'unique condition d'être *positifs*, les paramètres ∂v_1, ∂v_2, ... n'étant assujettis à aucune condition.

La liaison est *continue* pendant l'intervalle de temps (t_0, t_1) si le nombre des paramètres ∂v et celui des paramètres ∂w restent les mêmes quand t varie entre t_0 et t_1, les coefficients de ces paramètres dans ∂x_i, ∂y_i, ∂z_i étant des fonctions continues de t (sauf en un nombre fini de valeurs particulières).

Dans un mouvement *effectif* du système, si la liaison reste *continue*, les paramètres dw_1, dw_2, ... sont nécessairement nuls.

Si, pour un instant t', il y a discontinuité spontanée de la liaison, certains des paramètres ∂w disparaissent et peuvent être remplacés par d'autres.

L'auteur définit ensuite ce qu'il appelle l'*accélération libre* et la *force libre* d'un point M du système; elles correspondent au cas où l'on éloignerait du point M les corps $\mathcal{K}$ et K. L'auteur définit ensuite une liaison stable.

II. *États mécaniques sans frottement.* — L'auteur définit la *force de réaction* qui agit sur un point M du système comme la différence entre le produit de la masse du point par son accélération effective et la force libre de ce point. Le travail de la liaison est la somme des travaux des forces de réaction.

On peut regarder comme un fait d'expérience pour un état mécanique sans frottement le principe suivant : Le travail de la liaison pour le déplacement

effectif pendant l'élément de temps dt est au plus égal au travail de la liaison pour tout autre déplacement *possible* pendant le même élément de temps. Si l'on appelle déplacement *relatif* ($\delta x, \delta y, \delta z$) la différence géométrique entre le déplacement possible ($\partial x, \partial y, \partial z$) et le déplacement effectif (dx, dy, dz), on voit que le travail de la liaison pour tout déplacement relatif est positif ou nul.

L'auteur montre comment, en partant de ce principe, on peut déterminer le mouvement du système (par exemple, à l'aide des équations aux multiplicateurs) et comment aussi on peut déterminer les instants de discontinuité de la liaison. Il insiste sur le fait, méconnu par un grand nombre d'auteurs, que le nombre des inégalités indépendantes qui définissent la liaison peut être supérieur au nombre de ceux des premiers membres de ces inégalités qui sont indépendants. Il en donne comme exemple le cas d'un système formé d'un nombre fini de points matériels liés invariablement les uns aux autres et reposant sur une surface plane inébranlable polie.

III. *Sur le frottement.* — On peut rattacher les liaisons avec frottement aux autres de la manière suivante. Tout point M en équilibre et touchant le corps K peut être regardé comme ayant creusé dans la couche superficielle élastique de K un petit cône de révolution avec lequel il est en contact immédiat. Tout point M en mouvement touchant le corps K peut être regardé comme traçant un sillon dans la couche superficielle élastique de K et étant à chaque instant en contact avec un petit plan incliné placé devant lui qui raccorde ce sillon avec la surface de K. En partant de ces conventions, on retrouve toute la mécanique du frottement.

L'auteur attire l'attention sur certains paradoxes signalés déjà dans cette théorie par Painlevé.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur la théorie des systèmes linéaires et homogènes. (202-215).

Cette Note complète sur deux points particuliers un article paru précédemment dans le même Journal (t. CXXVIII, p. 263 et suiv.).

I. L'auteur considère un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_\varkappa}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(x) y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $a_{\lambda\varkappa}(x)$ sont des fonctions de la variable réelle x définies dans un intervalle (p, r), finies et intégrables dans cet intervalle. Il partage l'intervalle (p, q) où $(p < q < r)$ en un certain nombre m d'intervalles partiels au moyen des points de subdivision

$$p = x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, \qquad q = x_m,$$

et il considère, $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ étant des valeurs données à l'avance, les valeurs $y_\varkappa^{(1)}, y_\varkappa^{(2)}, \ldots, y^{(m)}$ définies par les équations

$$y_\varkappa^{(\nu)} - y_\varkappa^{(\nu-1)} = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda\varkappa}(\xi_{\nu-1}) y_\lambda^{(\nu-1)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \varkappa = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix};$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ désignent dans ces formules des valeurs arbitrairement prises dans les m intervalles de décomposition de l'intervalle (p, q).

L'auteur démontre par un procédé analogue à celui de Cauchy-Lipschitz que, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre des intervalles partiels de manière que chacun d'eux tende vers zéro, les nombres $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ tendent vers des limites bien déterminées $y_1, y_2, \dots, y_n$, indépendantes de la manière dont on choisit les ξ.

II. L'auteur considère le système d'équations aux différentielles totales

$$dy_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} [\alpha_{\lambda\varkappa}(\xi, \eta)\, d\xi + \beta_{\lambda\varkappa}(\xi, \eta)\, d\eta]\, y_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots, m),$$

où les $\alpha_{\lambda\varkappa}(\xi, \eta)$ et les $\beta_\varkappa(\xi, \eta)$ sont des fonctions des variables réelles ξ et η, continues dans un domaine simplement connexe S et admettant dans ce domaine des dérivées partielles du premier ordre également continues; on suppose de plus qu'elles satisfont aux conditions d'intégrabilité du système.

Cela étant, si (ξ_0, η_0), (ξ, η) sont deux points de S tels que le rectangle ayant pour sommets (ζ_0, η_0), (ζ_0, η), (ξ, η_0), (ξ, η) soit tout entier, ainsi que son intérieur, contenu dans S, l'auteur démontre que les deux matrices

$$(v_{i\varkappa}) = \int_{\eta_0}^{\eta} [\beta_{i\varkappa}(\xi_0, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa}] \int_{\xi_0}^{\xi} [\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}],$$

$$(\bar{v}_{i\varkappa}) = \int_{\xi_0}^{\xi} [\alpha_{i\varkappa}(\xi, \eta_0)\, d\xi + \delta_{i\varkappa}] \int_{\eta_0}^{\eta} [\beta_{i\varkappa}(\xi, \eta)\, d\eta + \delta_{i\varkappa})$$

sont des matrices intégrales du système donné; que, de plus, elles se réduisent à la matrice-unité pour le point (ξ_0, η_0); enfin qu'elles sont identiques entre elles.

De là il déduit l'existence d'une matrice intégrale bien déterminée, définie et contenue dans le domaine S, et se réduisant pour un point donné (ξ_0, η_0) à une matrice donnée de déterminant différent de zéro.

Fejér (*Léopold*). — Sur la stabilité et l'instabilité d'un point matériel dans un milieu résistant. (216-223).

L'auteur considère un point mobile dans l'espace sous l'action d'une force admettant une fonction des forces U (x, y, z) avec une résistance $f(v)$ dirigée en sens contraire de la vitesse v, nulle pour $v = 0$, positive pour $v > 0$ et croissant avec v.

Si, pour le point M_0, la fonction des forces U passe par un maximum isolé, l'auteur démontre qu'il y a stabilité dans l'avenir, mais qu'il peut y avoir instabilité dans le passé. Autrement dit, décrivons de M_0 comme centre deux sphères suffisamment petites, mais de rayons arbitraires R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$. Si, au temps t_0, le mobile se trouve à l'intérieur de la sphère R_1, il restera indéfiniment, pour $t > t_0$, à l'intérieur de la sphère R_2, pourvu que sa vitesse à l'instant t_0 soit plus petite qu'une quantité déterminée dépendant de R_1 et R_2. L'auteur démontre de plus que dans l'avenir la vitesse v deviendra une infinité de fois aussi petite qu'on veut.

Si, pour le point M_0, la fonction U possède un maximum isolé, provenant de ce que les termes de plus petit degré de la série de Taylor forment une forme définie positive, on ne peut arriver à un résultat aussi général. Néanmoins, si $\frac{f(v)}{v}$, pour v suffisamment petit, reste au-dessous d'une limite fixe M, la position d'équilibre est instable. On peut, en effet, décrire autour de M_0 une sphère de rayon R jouissant de la propriété suivante : si P_0 est un point quelconque intérieur à cette sphère et si l'on imprime au point mobile une vitesse aussi petite qu'on veut dirigée dans le sens M_0P_0, le point mobile sort nécessairement de la sphère au bout d'un temps fini.

Horn (*J.*). — Mouvements au voisinage d'une position d'équilibre. (224-245).

Soit donné un système mobile avec n degrés de liberté, les liaisons étant indépendantes du temps, et dont la position est définie par les n paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que l'origine

$$O(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$$

soit une position d'équilibre et que la fonction des forces U soit, au voisinage de O, développable en une série de puissances

$$U = \sum_{p=2}^{\infty} U_p,$$

U_p étant une fonction entière et homogène de degré p en $x_1, \ldots, x_n$, avec

$$U_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha x_\alpha^2;$$

on suppose

$$s_i = -\lambda_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$s_j = \mu_j^2 \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

les λ et les μ étant des quantités réelles et positives. La force vive

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}x'_\alpha x'_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

est une forme quadratique en $x'_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$ dont les coefficients $A_{\alpha\beta}$ sont des séries de puissances en $x_1, \ldots, x_n$; on suppose, en particulier, que pour le point O,

$$A_{\alpha\alpha} = 1, \qquad A_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \gtrless \beta).$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

peuvent se mettre sous la forme

$$(\mathrm{A.})\quad x''_\alpha + s_\alpha x_\alpha = \mathrm{F}_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n;\, x_1, \ldots, x_n) + \mathrm{G}_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \quad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

où F_α est une fonction entière et homogène du second degré en $x'_1, \ldots, x'_n$, dont les coefficients sont des séries de puissances en $x_1, \ldots, x_n$; G_α est une série de puissances en $x_1, \ldots, x_n$ commençant par des termes du second degré.

1. Les équations différentielles (A.) peuvent être vérifiées *formellement* si l'on prend pour x_α une série de la forme

$$x_\alpha = x_\alpha^{(1)} + x_\alpha^{(2)} + \ldots + x_\alpha^{(p)} + \ldots \qquad (\alpha = 1, \ldots, n);$$

dans cette série $x_\alpha^{(p)}$ est une fonction entière et homogène de degré p, de n constantes d'intégration $k_1, \ldots, k_n$, et une fonction composée d'expressions trigonométriques et exponentielles de n arguments

$$u_i = \rho_i t + l_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$
$$v_j = \sigma_j t \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

$l_1, l_2, \ldots, l_m$ sont m autres constantes d'intégration, et l'on a

$$\rho_i = \lambda_i + \rho_i^{(2)} + \rho_i^{(4)} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sigma_j = \mu_j + \sigma_j^{(2)} + \sigma_j^{(4)} + \ldots \qquad (j = m+1, \ldots, n),$$

$\rho_i^{(2p)}$, $\sigma_j^{(2p)}$ désignant des fonctions entières et homogènes de degré p en $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_m^2$.

En particulier, on a

$$x_i^{(1)} = k_i \cos u_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$x_j^{(1)} = k_j e^{-v_j} \qquad (j = m+1, \ldots, n).$$

Plus généralement, on a

$$x_\alpha^{(p)} = \sum k_1^{p_1} \ldots k_n^{p_n} e^{-p_{m+1}v_{m+1} - \ldots - p_n v_n}$$
$$\times [\mathrm{A} \cos(q_1 u_1 + \ldots + q_m u_m) + \mathrm{B} \sin(q_1 u_1 + \ldots + q_m u_m)];$$

dans chaque terme de la somme $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des entiers positifs dont la somme est égale à p ; $q_1, \ldots, q_m$ sont des entiers positifs ou négatifs de la forme $\pm(p_i - 2g_i)$ (g_i étant positif ou nul) ; de plus, dans les termes où $p_1 + \ldots + p_m$ est égal à p, B est nul.

2. La démonstration exige certaines conditions auxquelles doivent satisfaire les λ et les μ. Entre $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ne doit exister aucune relation

$$g_1 \lambda_1 + \ldots + g_m \lambda_m = 0$$

à coefficients entiers non négatifs et non tous nuls. De plus, entre $\mu_{m+1}, \ldots, \mu_n$ ne doit exister aucune relation

$$\mu_j = p_{m+1}\mu_{m+1} + \ldots + p_n \mu_n$$

à coefficients positifs ou nuls.

3. Si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ pour $t = 0$, par $c'_1, \ldots, c'_m$ les valeurs de $x'_1, \ldots, x'_m$ pour $t = 0$, on peut substituer ces $n + m$ constantes d'intégration aux $n + m$ constantes k et l, et l'on a pour les x des développements analogues aux précédents :

4. L'auteur examine quelques cas particuliers :

$$k_{m+1} = \ldots = k_n = 0;$$
$$k_1 = \ldots = k_m = 0;$$
$$k_2 = \ldots = k_m = k_{m+1} = \ldots = k_n = 0;$$
$$k_2 = \ldots = k_m = 0.$$

5. Les développements des x_α en fonction des valeurs initiales $c_1, \ldots, c_n$, $c'_1, \ldots, c'_m$ peuvent être obtenus directement en partant du système différentiel (A). On a, en particulier, pour les termes du premier degré,

$$x_i^{(1)} = c_i \cos u_i + \frac{c'_i}{k_i} \sin u_i, \qquad x_j'^{(1)} = c'_j e^{-v_j},$$

où l'on a posé

$$u_i = \rho_i t, \qquad v_j = \sigma_j t.$$

Knoblauch (*J.*). — Les invariants et covariants de déformation d'un ordre donné. (247-264).

Dans le Tome XVI des *Acta mathematica* (1892), Zorawski s'est proposé de déterminer, pour un ordre de différentiation donné, le nombre des invariants et des covariants de déformation indépendants. L'auteur doute que la méthode des transformations infinitésimales, dont il s'est servi, soit bien appropriée à ce problème; d'autre part, la complication de l'appareil de formules que la théorie de Lie traîne après soi l'a engagé à résoudre d'une autre manière ce problème intéressant et important. Les résultats de Zorawski lui semblent, d'ailleurs, contenir des erreurs.

I. Soient

$$A = \sum_{i,k} a_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (i, k = 1, 2)$$

une forme différentielle quadratique binaire et $\varphi(u_1, u_2)$ une fonction arbitraire. Si l'on effectue sur les variables u_1, u_2 un changement de variables quelconque, les nouvelles variables étant u'_1, u'_2, la fonction $\varphi(u_1, u_2)$ devient $\varphi(u'_1, u'_2)$. Un invariant de déformation est une expression

$$f\left(a_{11}, a_{12}, a_{22}, \frac{\partial a_{11}}{\partial u_1}, \cdots\right),$$

qui se reproduit quel que soit le changement de variable. Si la fonction f contient aussi φ et ses dérivées, c'est un covariant.

Il existe un covariant dépendant simplement des a_{ik} et des dérivées partielles du premier ordre de φ, c'est le paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami :

$$\Delta_a^1 \varphi = \frac{a_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + a_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

D'autre part, il n'existe pas d'invariant du premier ordre ; cela tient à ce que les dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i\, \partial u_k}$ peuvent s'exprimer au moyen des dérivées du premier ordre, des coefficients a_{ik}, a'_{ik} et de leurs dérivées. En posant

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} \right),$$

$$\begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} = \sum_l \alpha_{lm} \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix},$$

où α_{lm} désigne le mineur du déterminant de a_{ik} relatif à a_{lm}, mineur divisé par $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i\, \partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} = -\sum_{\lambda, \mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}.$$

II. En cherchant à éliminer les dérivées premières, secondes et troisièmes des fonctions u'_i, des u_k des équations qui donnent les dérivées des deux premiers ordres des fonctions a_{ik} en fonction des a'_{ik} et de leurs dérivées, on arrive, même si la forme A n'est pas binaire, aux équations

$$(imkl) = \sum_{\lambda, \mu, \nu, \rho} (\lambda\mu\nu\rho)' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l} \frac{\partial u'_\rho}{\partial u_m},$$

où l'on a posé

$$(imkl) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u_k\, \partial u_m} + \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial u_i\, \partial u_l} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l\, \partial u_m} - \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial u_i\, \partial u_k} \right)$$
$$+ \sum_{p, q} a_{pq} \left(\begin{Bmatrix} il \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} km \\ q \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lm \\ q \end{Bmatrix} \right).$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on déduit de là l'existence d'un invariant du second ordre

$$K = \frac{(1212)}{a} :$$

c'est la courbure totale de Gauss.

III. De là résulte immédiatement l'existence d'un invariant du troisième ordre, à savoir $\Delta_a^1 K$; l'existence d'un invariant du second ordre K et d'un seul invariant du troisième ordre $\Delta_a^1 K$ semble au premier abord contradictoire avec ce qu'indiquerait l'énumération des équations et des quantités à éliminer ; l'auteur montre à quelles particularités analytiques tient cette contradiction apparente.

Le paramètre $\Delta_a(\varphi, K)$ de Beltrami et le quotient $D_a(\varphi, K)$ du déterminant fonctionnel de φ et K, par $\sqrt{a}$, fournissent deux covariants du premier ordre linéaires en $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$. Les trois covariants $\Delta_a^1 \varphi$, $\Delta_a(\varphi, K)$, $D_a(\varphi, K)$ sont, d'ailleurs, liés par la relation

$$D_a(\varphi, K)^2 = \Delta_a^1 \varphi\, \Delta_a^1 K - \Delta_a(\varphi, K)^2.$$

Il existe trois covariants indépendants du second ordre linéaires par rapport aux dérivées $\frac{d^2\varphi}{du_1^2}$, $\frac{d^2\varphi}{du_1\,du_2}$, $\frac{d^2\varphi}{du_2^2}$; ce sont les covariants

$$D_a(\Delta_a^1\varphi, K), \qquad \Delta_a(\Delta_a^1\varphi, K),$$

joints au paramètre différentiel du second ordre de Beltrami.

IV. D'une manière générale, il existe m covariants indépendants d'ordre m, linéaires par rapport aux dérivées partielles du $m^{\text{ième}}$ ordre de la fonction φ ; ils se déduisent de ceux d'ordre $m - 1$ à l'aide des paramètres différentiels $D_a(f, K)$ et $\Delta_a(f, K)$.

Quant aux invariants d'ordre $m > 3$, il en existe $m - 1$ indépendants : ceux du quatrième ordre sont

$$D_a(\Delta_a^1 K, K), \qquad \Delta_a(\Delta_a^1 K, K), \qquad \Delta_a^2 K.$$

L'auteur démontre qu'il n'y en a pas plus de $m - 1$ par la méthode d'énumération.

Bauer (Michael). — Sur la progression arithmétique. (265-267).

L'auteur, en s'appuyant sur un théorème de Kronecker, donne une démonstration simple du théorème, d'après lequel il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 (mod t).

Bohl (P.). — Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations (268-321).

L'auteur étudie les équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x\,f(t) = \varphi(t),$$

où $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions périodiques au sens étendu, admettant les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; cela signifie que chacune de ces fonctions est développable en une série uniformément convergente pour toutes les valeurs de t et dont chaque terme est une fonction rationnelle entière de $\cos\frac{2\pi t}{\alpha_\mu}$ et $\sin\frac{2\pi t}{\alpha_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$.

S. Linstedt et Poincaré s'étaient déjà occupés d'équations analogues, quoique moins générales.

L'auteur fait l'hypothèse essentielle que toute solution de l'équation différentielle considérée est bornée supérieurement et inférieurement. Dans ces conditions, la solution générale est de la forme

$$x = c_1 \frac{\cos\int_0^t R\,dt}{\sqrt{R}} + c_2 \frac{\sin\int_0^t R\,dt}{\sqrt{R}} + T;$$

dans cette formule c_1 et c_2 désignent deux constantes arbitraires ; T et R sont des fonctions périodiques au sens étendu, admettant les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$;

ces fonctions possèdent des dérivées du premier et du second ordre également périodiques. R admet une borne inférieure positive.

La solution générale peut encore s'écrire

$$x = T + C \frac{\cos \int_c^t R\,dt}{\sqrt{R}},$$

où les constantes arbitraires sont C et c.

Réciproquement, si R et T sont des fonctions qui jouissent des propriétés indiquées, x est la solution générale d'une équation différentielle de la forme (1).

Pour que l'équation différentielle (1) possède, outre la solution $x = T$, une solution périodique au sens étendu, les périodes pouvant d'ailleurs être quelconques, il faut et il suffit que $\int_0^t R\,dt$ soit de la forme $\gamma t +$ une fonction périodique de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (γ étant une constante), et alors toutes les solutions de l'équation (1) sont des fonctions périodiques au sens étendu. Mais cette propriété n'appartient pas à toutes les équations (1).

I. *Rappel de résultats antérieurs.* — L'auteur rappelle les propriétés fondamentales des fonctions périodiques au sens étendu, étudiées par lui-même dans sa dissertation magistrale (Dorpat, 1893) et aussi par Esclangon sous le nom de *fonctions quasi périodiques uniformément continues* (*Comptes rendus*, t. CXXXV, p. 137; *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*, 1904). Pour qu'une fonction soit périodique au sens étendu, avec les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, il faut et il suffit que, ε étant un nombre positif donné, on puisse lui faire correspondre un nombre η tel qu'on ait

$$|f(t_2) - f(t_1)| < \varepsilon$$

toutes les fois que les m quantités $\frac{t_2 - t_1}{\alpha_\lambda}$ diffèrent de nombres entiers de moins de η.

Les périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont dites *indépendantes* s'il n'existe aucune relation à coefficients entiers non tous nuls de la forme

$$\frac{n_1}{\alpha_1} + \frac{n_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{n_m}{\alpha_m} = 0.$$

On appelle *partie constante* d'une fonction périodique au sens étendu $f(t)$ la limite pour t infini de $\frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt$.

L'auteur rappelle encore quelques résultats de sa dissertation doctorale (Dorpat, 1900) sur certains systèmes d'opérations différentielles linéaires à coefficients constants avec seconds membres.

II. *Lemmes et notations.* — Toute fonction périodique au sens étendu admet une borne supérieure G et une borne inférieure K finies; la différence $S = G - K$ est l'oscillation de la fonction. A tout nombre positif p on peut faire correspondre un nombre q tel que l'oscillation de la fonction dans *tout* intervalle de longueur q soit supérieure à $S - p$.

Si donc la série qui représente une fonction $f(t)$ périodique au sens étendu, de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, on remplace $\frac{t}{\alpha_\mu}$ par x_μ, on obtient une nouvelle série uniformément convergente pour les points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tels qu'on ait

$$x_1 = \frac{t}{\alpha_1}, \qquad x_2 = \frac{t}{\alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad x_m = \frac{t}{\alpha_m}$$

à des nombres entiers près.

Si l'on appelle Ξ l'ensemble formé de tous ces points *et aussi de leurs points limites*, la nouvelle série est uniformément convergente dans l'ensemble Ξ et définit dans cet ensemble une fonction $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ périodique par rapport à chacune des variables, la période étant 1. On a, de plus,

$$f(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \ldots, \frac{t}{\alpha_m}\right).$$

Si $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ est un point de l'ensemble Ξ, la fonction

$$\varphi(t) = \Psi\left(\frac{t}{\alpha_1} + \sigma_1, \frac{t}{\alpha_2} + \sigma_2, \ldots, \frac{t}{\alpha_m} + \sigma_m\right)$$

est encore périodique au sens étendu avec les périodes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; elle est dite appartenir à la même famille que la fonction $f(t)$ et posséder, par rapport à $f(t)$, les *phases* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$.

Deux fonctions périodiques appartenant à la même famille ont même partie constante.

III. *L'intégrale d'une fonction périodique au sens étendu.* — Si $f(t)$ est une fonction périodique au sens étendu, de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, et si, de plus, l'intégrale $\varphi(t) = \int_0^t f(t)\,dt$ est bornée, $\varphi(t)$ est aussi une fonction périodique au sens étendu, avec les mêmes périodes. Plus généralement, s'il existe une constante c telle que

$$\varphi(t) - ct$$

soit bornée, $\varphi(t) - ct$ est une fonction périodique de périodes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, et c est la partie constante de $f(t)$. Il ne résulte pas de là que si $c = 0$ l'intégrale $\int_0^t f(t)\,dt$ soit nécessairement bornée.

Si la partie constante de $f(t)$ est nulle et si l'intégrale $\varphi(t)$ n'est pas bornée, on peut toujours trouver un système de phases $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$, tel que

$$\int_0^t f(t, \sigma)\,dt \leq 0,$$

et un système de phases $s_1, s_2, \ldots, s_m$, tel que

$$\int_0^t f(t, s)\,dt \geq 0.$$

IV. *L'équation différentielle réduite.* — L'auteur considère maintenant l'équation

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t)x = 0,$$

et plus généralement l'équation

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, \sigma)x = 0,$$

où $\varphi(t, \sigma)$ est de la même famille que $\varphi(t)$ et possède, par rapport à $\varphi(t)$, les phases $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$.

Si l'une des équations (3) possède deux solutions indépendantes bornées, il en est de même de toutes les autres équations (3).

Cela étant, soient u et v deux solutions indépendantes de l'équation (2). Si μ est un nombre positif donné, on peut trouver trois constantes g_1, g_2, g_3 telles que la fonction

$$f = g_1 u^2 + 2 g_2 uv + g_3 v^2$$

satisfasse, quel que soit t, à l'inégalité $f \geqq p$ et telles de plus que f et ses deux premières dérivées soient des fonctions périodiques au sens étendu, de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. On a, de plus,

$$g_2^2 - g_1 g_3 < 0.$$

La fonction

$$z = \sqrt{f}\cos\left(c\sqrt{g_1 g_3 - g_2^2}\int_a^t \frac{dt}{f} + k\right),$$

où a et k sont des constantes arbitraires, et où c est la valeur constante de $uv' - vu'$, satisfait alors à l'équation (2). En posant

$$\mathrm{R} = \frac{c\sqrt{g_1 g_3 - g_2^2}}{f},$$

on obtient, pour la solution générale de l'équation (2), la forme

$$x = k_1 \frac{\cos\displaystyle\int_a^t \mathrm{R}\,dt}{\sqrt{\mathrm{R}}} + k_2 \frac{\sin\displaystyle\int_a^t \mathrm{R}\,dt}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

ou encore

$$x = \frac{k}{\sqrt{\mathrm{R}}}\cos\int_c^t \mathrm{R}\,dt.$$

V. *L'équation différentielle réduite (conclusion).* — Ce qui précède suppose que l'équation (2) admette deux intégrales indépendantes bornées. Si l'on suppose qu'elle admette deux intégrales indépendantes périodiques au sens étendu, de périodes $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$, on obtient des résultats plus précis. Dans ce cas, en effet, l'intégrale $\int_0^t \mathrm{R}\,dt$ est de la forme σt + une fonction périodique de périodes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Il suffit même, pour être sûr du résultat précédent, de supposer que l'intégrale (2) admet une intégrale bornée et une autre, indépen-

dante de la première, périodique au sens étendu, de périodes d'ailleurs quelconques. Mais il peut très bien arriver que, les intégrales de (2) étant toutes bornées, aucune ne soit périodique, au sens étendu.

VI. *L'équation différentielle non réduite.* — Avant de traiter l'équation non réduite (1), l'auteur démontre un certain nombre de lemmes.

Soit un système d'équations différentielles

$$(4)\qquad \frac{dx_i}{dt} = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{in}x_n + \mathrm{R}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les p_{ik} et les R_i sont des fonctions périodiques au sens étendu, de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; soit plus généralement le système de la même famille

$$(5)\qquad \frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t, \sigma)x_1 + \ldots + p_{in}(t, \sigma)x_n + \mathrm{R}_i(t, \sigma) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ désigne un système de phases et aussi le système réduit correspondant

$$(6)\qquad \frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t, \sigma)x_1 + \ldots + p_{in}(t, \sigma)x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Désignons, pour un instant, par *valeur absolue* d'une solution de l'un de ces systèmes la fonction $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Cela étant, supposons que pour un système de phases particulier les équations (5) possèdent une solution dont la valeur absolue ait une borne supérieure finie. Supposons d'autre part que, quel que soit le système de phases choisi, le système (6) n'admette aucune solution dont la valeur absolue ait une borne inférieure nulle et une borne supérieure finie. Dans ces conditions, les équations (5) admettent, quel que soit le système de phases, au moins une solution formée de fonctions périodiques au sens étendu de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

VII. *L'équation différentielle non réduite* (*conclusion*). — Si les équations (5), pour le système de phases (σ'), admet une solution pour laquelle $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ sont des fonctions périodiques au sens étendu, les équations (5), pour le système de phases (σ''), admet la solution $x_i(t, \sigma'' - \sigma')$.

L'auteur démontre enfin le dernier lemme suivant :

Soient les équations différentielles

$$(7)\qquad \frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les q_{ik} sont des fonctions périodiques au sens étendu, de périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. On suppose que ces équations n'admettent que des solutions dont la valeur absolue est bornée et que, de plus, l'intégrale

$$\int_0^t (q_{11} + q_{22} + \ldots + q_{nn})\, dt$$

est également bornée. Alors, aucun des systèmes appartenant à la même famille que le système (7) n'admet de solution dont la valeur absolue ait une borne inférieure nulle.

Les résultats énoncés dans l'Introduction sur l'équation différentielle (1) sont des conséquences immédiates des lemmes précédents.

E. CARTAN.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Troisième série; t. XXV, 1908 (¹).

Goursat (*E.*). — Sur les intégrales infiniment voisines des équations aux dérivées partielles (second Mémoire). (9-41).

Dans un premier Mémoire, publié sous le même titre par les *Annales de l'École Normale* en 1906, l'auteur considérait des variables comprises dans des champs complexes, indépendants les uns des autres. La question se pose tout autrement quand on a en vue les applications au domaine réel, auxquelles est consacré le présent Mémoire.

Après avoir rappelé quelques définitions, M. Goursat reprend pour la généraliser la démonstration de deux théorèmes importants du premier Mémoire. En appliquant le second au domaine réel, pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \lambda\right),$$

dont le second membre, développé suivant les puissances de λ, de u et de ses dérivées, ne contient pas les dérivées au premier degré, on reconnaît que, si les coefficients du développement sont des fonctions régulières de x, y, z à l'intérieur d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'axe des x, limité par deux plans $x = x_0$, $x = x_1$ et dont la section droite est une courbe fermée (C), l'intégrale qui est nulle pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1 est une fonction régulière de x, y, z à l'intérieur de tout cylindre intérieur au cylindre considéré, pourvu que la valeur absolue du paramètre λ soit suffisamment petite.

L'auteur définit ensuite la portion de l'espace qu'il appelle *un tube de caractéristiques* et qui est partiellement limitée par une famille de *caractéristiques* ou courbes intégrales des équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z).$$

Il applique cette notion à l'étude de l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -f\frac{\partial v}{\partial y} - \varphi\frac{\partial v}{\partial z}\,A v + B\lambda + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en v, v'_y, v'_z, λ, et tous les coefficients du second membre étant des fonctions analytiques régulières de x, y, z dans un certain tube de caractéristiques (T). Pour $\lambda = 0$, cette équation admet l'intégrale particulière $v = 0$. Elle admet une infinité d'intégrales infiniment voisines de $v = 0$ et régulières dans tout domaine intérieur à (T).

Étant donnée une équation de même forme que la précédente, mais ne con-

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. XXXII_2, p. 94.

tenant pas le paramètre λ, on suppose les coefficients du second membre réguliers en une région (E) de l'espace, tels en outre que la série soit convergente en tout point de cette région quand les modules de v, v'_y, v'_z restent inférieurs à un nombre positif convenable. Cette équation admet une infinité d'intégrales infiniment voisines de l'intégrale $v = 0$ et régulières dans une portion quelconque (E') de (E), pourvu que (E') soit compris dans un tube de caractéristiques.

Ce qui précède permet de reconnaître si une équation du premier ordre dépendant d'un paramètre λ et admettant pour $\lambda = 0$ l'intégrale particulière $v = 0$ possède des intégrales infiniment voisines de celles-là et régulières dans un domaine déterminé : M. Goursat enseigne à calculer directement les coefficients des puissances de λ dans le développement de ces intégrales, et il fait remarquer que ces considérations peuvent être étendues aux intégrales des équations linéaires dans le domaine complexe.

Il aborde ensuite l'équation du second ordre

$$s = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}z + \mathrm{D}\lambda + \ldots,$$

où les termes non écrits sont au moins du second degré en z, p, q, r, t, λ, tous les coefficients étant supposés réguliers dans un domaine bien défini, et il montre que, dans la recherche des intégrales infiniment voisines d'une intégrale particulière connue, la disposition des caractéristiques sur cette intégrale particulière est un élément essentiel à considérer.

Le Mémoire se termine par quelques indications sur le cas tout différent des équations du second ordre à caractéristiques imaginaires et sur certaines équations particulières qu'on peut étudier sans supposer que leurs coefficients soient des fonctions analytiques.

Fréchet (Maurice). — Sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les sommes trigonométriques limitées. (43-56).

Tchebicheff a montré que, étant donnée une fonction continue quelconque $f(x)$ définie dans un intervalle (a, b), il existe, pour chaque valeur de n, un polynome de degré n qui est plus voisin de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) que tout autre polynome de degré n.

L'auteur commence par généraliser la méthode de Tchebicheff. Il considère une fonction $f(x)$ définie et bornée dans l'intervalle (a, b) et une famille $\mathfrak{F}_p$ de fonctions continues de x,

$$\mathrm{S}(x, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p),$$

dépendant de $p+1$ paramètres et douées des propriétés suivantes :

1° La somme ou la différence de deux fonctions de $\mathfrak{F}_p$ appartient à $\mathfrak{F}_p$;

2° Lorsque p reste fixe,

$$|\mathrm{S}(x, \lambda'_0, \ldots, \lambda'_p) - \mathrm{S}(x, \lambda_0, \ldots \lambda_p)|$$

tend vers zéro, uniformément par rapport à x lorsque la plus grande des quantités

$$|\lambda'_0 - \lambda_0|, \quad \ldots, \quad |\lambda'_p - \lambda_p|$$

tend vers zéro dans (a, b);

3° Lorsque p reste fixe et que les λ varient de façon qu'en tout point de (a, b) la valeur absolue de $S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ soit inférieure à un nombre fixe quelconque, les λ restent bornés dans leur ensemble.

Sous ces hypothèses, on voit d'abord que

$$|f(x) - S(x, \lambda_0, \ldots, \lambda_p)|$$

a une limite supérieure déterminée $m(\lambda_0, \ldots, \lambda_p)$ lorsque, les λ restant fixes, x varie dans (a, b); la quantité $m \geqq 0$ a elle-même une limite inférieure $\mu \geqq 0$ lorsque, p restant fixe, les λ varient de façon quelconque. Si la limite μ est atteinte pour une fonction $S(x, k_0, \ldots, k_p)$, on dit que cette fonction est une *fonction d'approximation* de $f(x)$ dans $\mathfrak{F}_p$. Le problème de Tchebicheff consiste à déterminer s'il existe au moins une telle fonction et, dans ce cas, s'il en existe plus d'une.

L'auteur énonce divers lemmes qui servent à décider s'il en existe plus d'une et à faire voir comment varient les fonctions d'approximation des fonctions variables.

Dans la seconde Partie de son Mémoire, il applique les résultats précédents au cas où l'on prend comme fonctions S des sommes trigonométriques limitées

$$S(x_0, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2k}) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=k} (\lambda_{2m-1} \cos m x + \lambda_{2m} \sin m x)$$

et qu'on suppose $a = 0$, $b = 2\pi$.

Il démontre, notamment, que si $f(x)$ est une fonction continue et de période 2π et n un entier quelconque, il existe *une* somme trigonométrique d'ordre n,

$$u_0 + u_1 \cos x + v_1 \sin x + \ldots + u_n \cos n x + v_n \sin n x,$$

qui approche plus de $f(x)$ que toute autre somme trigonométrique d'ordre n, et que la suite des sommes trigonométriques d'approximation d'ordres croissants de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$. Il suit de là que les coefficients de la somme trigonométrique d'approximation d'ordre n de $f(x)$ tendent respectivement et uniformément vers les coefficients de $f(x)$ en série de Fourier lorsque n augmente indéfiniment. Il est enfin prouvé que, si une fonction continue de période 2π est donnée de façon qu'on sache calculer les coefficients de son développement en série de Fourier, la détermination des sommes trigonométriques d'approximation de $f(x)$ n'exigera, en outre, que des opérations algébriques.

Cartan (E.). — Les sous-groupes des groupes continus de transformation. (56-194).

Introduction. — Ce Mémoire peut être considéré comme une suite au Mémoire précédemment paru en deux Parties dans ces mêmes *Annales* (1904), où est exposée une théorie de la structure des groupes continus de transformations s'appliquant aussi bien aux groupes infinis qu'aux groupes finis. Dans la théorie classique de S. Lie, la structure d'un groupe fini est définie par ce qu'il appelle *les constantes de structure*, et ces constantes s'introduisent lorsqu'on compose entre elles les transformations infinitésimales du groupe; c'est donc la

notion de transformation infinitésimale qui est à la base de cette théorie classique de la structure; mais, en restant à ce point de vue, cette théorie devait se borner aux groupes finis et il a été impossible de l'étendre aux groupes infinis. Au contraire, dans la théorie que j'ai proposée, on prend pour point de départ les *équations de définition* des équations finies du groupe et ce sont ces équations de définition qui donnent naissance à des constantes que j'appelle les *constantes de structure* du groupe; ces constantes coïncident avec celles de S. Lie dans le cas particulier où le groupe est fini, mais elles existent toujours, que le groupe soit fini ou infini.

On sait comment l'introduction de la notion de structure a permis à S. Lie de ramener à des opérations purement *algébriques* le problème de la détermination et de la classification des sous-groupes d'un groupe donné, du moins tant qu'on se borne à chercher les transformations infinitésimales des sous-groupes, connaissant les transformations infinitésimales du groupe, ou encore tant qu'on se borne à rechercher les structures des sous-groupes, connaissant la structure du groupe.

Dans le présent Mémoire, il est montré comment la nouvelle notion de structure permet de ramener à des opérations purement *algébriques* la détermination des systèmes différentiels dont dépend l'établissement des équations de définition des sous-groupes d'un groupe donné, lorsqu'on connaît les équations de définition de ce groupe; si le groupe n'est donné que par sa structure, ces mêmes opérations purement algébriques permettent de déterminer et de classer les structures de ces différents sous-groupes; elles donnent immédiatement aussi, pour chacun des sous-groupes, la structure du plus grand sous-groupe dans lequel il est invariant.

La méthode développée dans ce Mémoire ramène la recherche des sous-groupes d'un groupe donné à la résolution d'un problème particulier d'équivalence vis-à-vis du groupe donné de certains systèmes d'équations aux différentielles totales complètement intégrables. Aussi ai-je dans un premier Chapitre exposé la solution du problème général de l'équivalence des systèmes différentiels, sous la forme la plus commode pour les applications que j'avais en vue. La solution générale du problème avait déjà été donnée par les travaux de S. Lie et tous ceux qu'ils ont inspirés; ce n'est donc que la *forme* de la solution donnée ici qui est neuve; je signalerai cependant un point important et qui est nouveau, c'est le suivant : lorsque deux systèmes différentiels sont équivalents vis-à-vis d'un certain groupe, l'ensemble des transformations du groupe qui permet de passer du premier système au second s'obtient en effectuant d'abord une transformation particulière jouissant de cette propriété et ensuite la transformation la plus générale d'un certain sous-groupe du groupe donné, celui qui laisse invariant le second système différentiel. C'est la *structure* de ce sous-groupe qui est mise en évidence dans la solution donnée du problème et par suite, jusqu'à un certain point, la *nature* des intégrations à faire pour transformer le premier système dans le second.

Le Chapitre II expose la méthode générale de recherche des sous-groupes d'un groupe donné; cette méthode est appliquée d'abord aux groupes finis, puis au groupe infini des représentations conformes du plan; les différents types des groupes conformes sont indiqués et, pour chacun d'eux, le plus grand groupe conforme dans lequel il est invariant.

Dans les deux Chapitres III et IV, la méthode est appliquée à la détermination des différents types de groupes continus, à deux variables, considérés comme sous-groupes du groupe général à deux variables. A côté de chaque groupe

obtenu est indiqué le plus grand groupe dans lequel il est invariant. Cela seul est nouveau comme résultat, S. Lie ayant déjà déterminé tous les groupes finis et infinis à deux variables. Le but des Chapitres III et IV est donc plutôt d'illustrer la méthode que de donner des résultats nouveaux. On remarquera que la détermination des groupes finis et celle des groupes infinis se font concurremment, par un procédé uniforme. On pourra remarquer aussi que la détermination des sous-groupes n'exige plus que des opérations *rationnelles*, une fois qu'on a déterminé les sous-groupes que j'appelle *de degré* I; quant à ceux-là, leur détermination revient essentiellement à celle des sous-groupes du groupe linéaire homogène à deux variables.

La détermination des groupes finis et infinis de l'espace ne présenterait d'ailleurs, en ce moment, d'autres difficultés que celles résultant de la longueur même de leur énumération. En se bornant, en effet, aux groupes *infinis transitifs,* il existe 137 types de groupes de degré I qui se déterminent facilement, puisqu'on connaît tous les sous-groupes du groupe linéaire et homogène à trois variables. Chacun de ces 137 groupes donne naissance à d'autres groupes de degré supérieur à I; l'un d'eux, par exemple, donne naissance à 98 groupes différents. D'ailleurs l'énumération complète ne semble pas devoir présenter un grand intérêt, elle ne fournirait aucun groupe simple transitif nouveau, mais peut-être y aurait-il lieu d'étudier, parmi les groupes intransitifs, ceux que j'ai appelés *improprement simples* et qui semblent rendre difficile le problème si important de la réduction d'un groupe à une série normale de sous-groupes.

Montessus (*R. de*). — Sur les fractions continues algébriques. (195-197).

Extrait d'une lettre discutant des questions de priorité.

Cahen (*E.*). — Sur une fonction continue sans dérivée. (199-219).

L'auteur enseigne à construire des fonctions continues sans dérivée qui dépendent de deux paramètres; il y a donc une double infinité de fonctions de ce type, mais leur étude peut être ramenée à celle d'une simple infinité de fonctions ne contenant qu'un paramètre.

Pour les définir, M. Cahen considère un nombre a réel, positif, inférieur à 1, et l'intercalant entre 0 et 1 forme deux intervalles dont le rapport est $a:(1-a)$. Il divise de même chaque intervalle partiel dans le même rapport, et ainsi de suite. Les intervalles ainsi formés tendent vers zéro et permettent d'approcher indéfiniment de tout nombre x compris entre 0 et 1.

A un choix déterminé d'intervalles successifs correspond un nombre x déterminé, et réciproquement, si x ne coïncide avec aucun des termes de l'ensemble dénombrable (E) intercalés entre 0 et 1. Si a est un nombre compris entre 0 et 1, tout nombre x compris entre 0 et 1 peut se mettre sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n a^{p_n+1} (1-a)^{q_n},$$

les ε_n étant égaux à 0 ou à 1, et p_n et q_n ayant pour valeurs respectives

$$q_n = \sum_0^{n-1} \varepsilon_n, \qquad p_n = n - q_n.$$

Cette représentation n'est en général possible que d'une seule manière.

Qu'on se donne maintenant deux nombres a et b de l'intervalle (o, 1) et une valeur x entre o et 1; à cette valeur correspond, relativement au nombre a, une succession déterminée d'intervalles ci-dessus définis; à cette même succession d'intervalles construits avec le nombre b, correspond une valeur $y = X_a^b(x)$ qui est une fonction de x, croissante, continue et dépourvue de dérivée, sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles.

Elle possède diverses propriétés remarquables : ainsi, notamment, il existe une relation d'homographie entre la portion de la courbe $y = X$ comprise entre les droites $x = 0$, $x = 1$ et la portion comprise entre les droites $x = p$, $x = q$, les nombres p et q étant ce que l'auteur appelle des nombres *conjoints*. On peut calculer sa fonction primitive et définir $X_a^b(x)$ en dehors de l'intervalle (o, 1) pour toutes les valeurs d'un ensemble composé des éléments de (E) multipliés par les puissances de a.

Lattès (S.) — Nouvelles recherches sur les courbes invariantes par une transformation $(X, Y; x, y, y')$. (221-254).

Introduction. — J'ai étudié dans un travail antérieur (*Annali di Matematica*, 1906) les courbes invariantes par une transformation $(X, Y; x, y, y')$, c'est-à-dire par une transformation de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f(x, y, y'), \\ Y = \varphi(x, y, y'), \end{cases}$$

en me bornant aux courbes contenant un élément double $(x_0, y_0; x_0, y_0, y'_0)$ de la transformation. Si $y = \psi(x)$ est l'équation d'une pareille courbe, la fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$(2)\qquad \psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi').$$

On peut se proposer, plus généralement, de chercher une courbe invariante par la transformation (1) et ne contenant pas d'élément double.

Sans aborder le problème dans toute sa généralité, je me propose d'étudier un cas qui nous est suggéré par le problème analogue relatif aux transformations ponctuelles; c'est le cas d'une courbe invariante composée de plusieurs branches

$$y = \psi_0(x), \quad y = \psi_1(x), \quad \ldots, \quad y = \psi_i(x), \quad \ldots, \quad y = \psi_p(x),$$

définies respectivement dans p intervalles distincts $x_i - h$, $x_i + h$ et se permutant circulairement, par la transformation (1). On est conduit, pour établir l'existence d'un pareil cycle de fonctions, à chercher une courbe invariante pour une certaine *puissance* de la transformation (1).

La définition précise des puissances de la transformation (1), de leurs éléments doubles et des courbes invariantes par ces puissances exigeait l'étude préalable des transformations de la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} X = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}), \\ Y = \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(p)}). \end{cases}$$

Ces transformations font correspondre un point X, Y à un élément

$$(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$$

d'ordre p. La première Partie de ce travail leur est consacrée : je généralise pour ces transformations (3) le théorème relatif à l'existence des courbes invariantes contenant un élément double que j'ai établi précédemment pour les transformations (1).

Dans la deuxième Partie, je m'occupe des courbes invariantes par une certaine puissance de la transformation (1). En appliquant à ces courbes le théorème d'existence démontré dans la première Partie, on trouve de nouvelles solutions de l'équation fonctionnelle (2); chacune de ces solutions est formée de l'ensemble de $p+1$ fonctions

$$y = \psi_0(x), \qquad y = \psi_1(x), \qquad \ldots, \qquad y = \psi_i(x), \qquad \ldots, \qquad y = \psi_p(x),$$

définies dans des intervalles distincts $x_i - h$, $x_i + h$. Si l'on désigne par $\Psi(x)$ une fonction égale à $\psi_0(x)$ dans l'intervalle $x_0 - h$, $x_0 + h$, à $\psi_2(x)$ dans l'intervalle $x_1 - h$, $x_1 + h$, à $\psi_i(x)$ dans l'intervalle $x_i - h$, $x_i + h$, la fonction $\Psi(x)$ ainsi définie constitue une solution de l'équation fonctionnelle. On peut définir une solution de cette nature quel que soit l'entier p, et le nombre de paramètres arbitraires dont dépend la solution va en croissant en même temps que l'entier p. Ceci s'applique en particulier aux équations fonctionnelles

$$\psi'(x) = \psi[f(x)], \qquad \psi'(x) = \psi[\psi(x)],$$

qui sont de la forme (2) et qui m'ont servi d'exemples.

Delassus (*Étienne*). — Sur les invariants des systèmes différentiels. (255-318).

Introduction. — Dans des Mémoires antérieurs publiés en 1896 et 1897 je me suis occupé des systèmes différentiels quelconques, et le Mémoire actuel est le développement de résultats que j'ai obtenus récemment en reprenant l'étude de ces questions.

On reconnaît immédiatement qu'un même système différentiel peut être mis de diverses façons sous *forme canonique* et que ces diverses formes conduisent à des façons bien différentes de déterminer l'intégrale au moyen de fonctions et constantes initiales. Par exemple, le système canonique

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (u, v, \text{ fonctions de } x, y, z)$$

définit, par application du théorème de Cauchy généralisé, une intégrale au moyen de deux fonctions initiales dépendant toutes deux de y et de z. Mais ce système peut être mis sous la forme canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

et, sous cette nouvelle forme, le même théorème de Cauchy généralisé détermine une intégrale par trois fonctions initiales, deux dépendant de y et z et une dépendant de z.

Existe-t-il des relations entre ces divers systèmes de fonctions et constantes initiales, fournis par l'application du théorème de Cauchy généralisé aux diverses formes canoniques d'un même système différentiel?

Si l'on se place au point de vue analytique pur, on sait que les fonctions arbitraires entrant dans l'intégrale générale n'ont, à la rigueur, aucune importance, ne constituant que des moyens plus ou moins commodes de grouper les constantes arbitraires en nombre infini qui figurent dans l'intégrale générale. Mais, si l'on s'assujettit à n'introduire que des fonctions arbitraires acceptables sous la seule condition d'être analytiques, on obtient déjà des groupements présentant incontestablement un certain intérêt, et si, en outre, comme cela se présente pour les *systèmes initiaux de Cauchy* fournis par le théorème de Cauchy généralisé, ces fonctions initiales se suivent suivant une loi régulière et ont une signification géométrique évidente, ces groupements s'imposent et leur étude est nécessaire.

La réponse à la question que nous venons de poser nous est fournie par des *invariants*, c'est-à-dire par certaines quantités formées avec les nombres fondamentaux des formes canoniques et qui restent invariables quand on passe à une autre forme canonique. J'ai exposé deux méthodes pour les obtenir; la première est plus simple et les donne simultanément, mais j'ai néanmoins tenu à exposer la seconde, qui les donne de proche en proche, car c'est elle qui m'a conduit à cette notion d'invariants et qui m'a permis de trouver leur loi de formation au moyen de fonctions qui se présentent dans l'analyse combinatoire élémentaire.

Ces invariants ne font pas que donner la réponse à la question posée. Ils ont une portée bien plus considérable, comme on le verra déjà dans ce Mémoire, et ils semblent devoir jouer un rôle important dans la théorie des systèmes différentiels, principalement à propos de leurs transformations.

Boutroux (Pierre). — Sur l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'une singularité transcendante. (319-370).

C'est l'étude systématique des fonctions inverses d'une fonction entière, que l'auteur aborde après MM. Hurwitz, Denjoy et Rémoundos, en la rattachant aux recherches que la théorie des équations différentielles l'a conduit à faire sur les points singuliers transcendants des fonctions multiformes. Voici les titres des divisions du Mémoire :

I. Le théorème de M. Schottky.
II. Les fonctions inverses des fonctions entières.
III. Points critiques transcendants de la fonction.
IV. Premier cas : point directement critique.
V. Deuxième cas : point directement et indirectement critique de première espèce.
VI. Troisième et quatrième cas : point indirectement critique et cas limite.
VII. Exemples.
VIII. Classification des langues.
IX. Frontières d'une langue.
X. Langues contiguës.
XI. Langues infinies contiguës.
XII. Propriétés des langues.
XIII. Propriétés des languettes.
XIV. Applications.

Nielsen (*Niels*). — Recherches sur les fonctions métasphériques et sur leurs formules d'addition. (371-398).

L'objet de ce Mémoire est moins d'ajouter aux résultats connus et aux travaux antérieurs de M. Nielsen lui-même, que de montrer l'avantage qu'il y a à adopter les définitions proposées par l'auteur, et d'étudier particulièrement les formules d'addition.

Après avoir rappelé sommairement les nombreuses recherches auxquelles ont donné lieu les polynomes de Legendre, l'auteur définit la *fonction métasphérique* $K^{\nu,\rho}(x)$ de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ par les deux équations fonctionnelles

$$(1-x^2)D_x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu)\,x K^{\nu,\rho}(x) - (\rho-1)K^{\nu,\rho+1}(x),$$
$$2(\rho-\nu)\,x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho-1)K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho-2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x);$$

les *fonctions ultrasphériques* sont celles pour lesquelles ρ est un entier non négatif, ν restant quelconque.

Les fonctions métasphériques s'expriment au moyen de la série hypergéométrique, ce qui permettrait leur étude. Mais le procédé serait trop compliqué; aussi l'auteur préfère-t-il établir directement leurs propriétés fondamentales; leur prolongement analytique résulte d'une proposition due à M. de Sonin.

Aux fonctions ultrasphériques qui se réduisent aux fonctions sphériques ordinaires quand $2\nu = 1$, l'auteur étend un théorème de C. Neumann sur les fonctions sphériques, en montrant qu'une série entière $f(x)$, dont le rayon de convergence est supérieur à l'unité, peut se développer suivant des fonctions métasphériques, les coefficients du développement étant des séries de fonctions ultrasphériques convergentes à l'intérieur de la plus petite ellipse qui a ses foyers aux points d'affixe ± 1 et qui passe par un point singulier de la fonction $f(x)$.

M. Nielsen compare ensuite les fonctions métasphériques aux *fonctions annulaires* de Gegenbauer et retrouve des intégrales obtenues par Laplace et Jacobi.

Dans la seconde partie du Mémoire, consacrée aux formules d'addition, il établit la formule connue (Heine) qui donne $P^{\nu+\frac{1}{2},n}(\alpha\beta + x\sqrt{\alpha^2-1}\sqrt{\beta^2-1})$, puis il en fait connaître une nouvelle qui exprime $P^{\nu,n}[\alpha^2+(1-\alpha^2)x]$.

Landau (*E.*). — Nouvelle démonstration pour la formule de Riemann sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, et démonstration d'une formule plus générale pour le cas des nombres premiers d'une progression arithmétique. (399-442).

On sait que Riemann, dans un Mémoire célèbre publié en 1859, a indiqué, sans prétendre l'établir rigoureusement, l'expression d'une fonction $f(x)$ qui ne diffère du nombre des nombres premiers inférieurs à x que d'une quantité de l'ordre de grandeur de $\sqrt{x}:\log x$. Des quatre théorèmes sur lesquels repose l'importante conclusion de Riemann, deux furent démontrés en 1893 par M. Hadamard; les deux derniers furent mis hors de doute en 1895 par M. von Mangoldt, grâce à une analyse longue et ingénieuse.

En revenant à la voie de Riemann, dont MM. Hadamard et von Mangoldt avaient dû s'écarter, M. Landau est parvenu à constituer une démonstration complète de la formule de Riemann, qui est relativement courte et forme la première partie de son Mémoire.

La même marche permettrait d'ailleurs de prendre comme point de départ l'intégrale que M. von Mangoldt a considérée et d'abréger considérablement les diverses parties de la démonstration. C'est cette façon de procéder que l'auteur adopte, dans la seconde partie de son travail, où il établit une formule entrevue dès 1884 par M. Piltz, imparfaitement démontrée par M. Torelli en 1901, et qui généralise celle de Riemann en supposant que les nombres premiers dont on cherche le nombre approché font partie d'une progression arithmétique $ky + l$ (k et l premiers entre eux).

Borel (*Émile*). — Les *paradoxes* de la théorie des ensembles. (443-448).

Les contradictions qu'on a cru trouver dans la théorie des ensembles proviennent de ce qu'on a admis comme évident que *tout ensemble dénombrable est effectivement énumérable;* l'auteur montre que cette proposition est inexacte.

Severi (*Francesco*). — La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique. (449-468).

L'auteur dit que deux courbes algébriques A, B, tracées sur une surface algébrique F, sont *algébriquement équivalentes* et il écrit $A \equiv B$, lorsqu'elles sont renfermées totalement dans un même système, dont les éléments (courbes) forment une variété algébrique irréductible.

Si h courbes $C_1, C_2, \ldots, C_h$ tracées sur F sont telles qu'on ait entre elles la relation

$$(1) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_h C_h,$$

les λ et μ étant des entiers positifs, les h courbes sont dites *algébriquement dépendantes*. Il résulte des travaux antérieurs de M. Severi qu'il existe sur la surface F un nombre fini ρ de courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ algébriquement indépendantes et telles que toute autre courbe tracée sur F dépende algébriquement de ces courbes; en d'autres termes, toute courbe C est donnée par la relation

$$(2) \qquad \lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho,$$

où les λ sont des entiers convenables. Le groupe des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ est appelé *base* des courbes tracées sur F et ρ est dit le *nombre base*. C'est le nombre ρ, envisagé par M. Picard au point de vue fonctionnel, qui acquiert ainsi une signification géométrique remarquable.

Mais la relation (2) suggère une question importante. Les ρ courbes de la base peuvent être choisies d'une infinité de manières, pourvu qu'elles satisfassent à une certaine condition arithmétique donnée par l'auteur. Dès lors il y a lieu de chercher si l'on peut choisir les ρ courbes de base de telle façon que, pour toute courbe C de la surface, le coefficient λ se réduise à l'unité; une telle base sera alors dite *base minima*.

L'objet du présent Mémoire est de démontrer que *sur toute surface algébrique il est toujours possible de construire une base minima;* mais il faut, en général, augmenter le nombre des courbes qui composent la base.

Si l'on ne veut pas augmenter le nombre de ces courbes, on peut arriver à construire *une base intermédiaire*, c'est-à-dire un groupe de ρ courbes C_1, C_2, ..., C_ρ telles que pour toute courbe C l'entier λ de la relation (2) soit un diviseur des entiers λ_1, λ_2, ..., λ_ρ. On voit que cette base particulière se réduit à une base minima lorsque la relation

$$\lambda C = \lambda(\varepsilon_1 C_1 - \varepsilon_2 C_2 + \ldots + \varepsilon_\rho C_\rho)$$

entraîne

$$C = \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \ldots + \varepsilon_\rho C_\rho,$$

c'est-à-dire lorsque l'*opération de division*, appliquée aux courbes d'un système algébrique, *est univoque*. C'est ce qui arrive pour des surfaces particulières dont l'auteur donne des exemples.

Il démontre, en général, que *le nombre des systèmes distincts qu'on obtient en divisant par un nombre entier λ un système algébrique donné admet un maximum fini σ indépendant de λ et du système envisagé.* De là résulte que *la base minima est formée par un groupe de $\rho + \sigma - 1$ courbes.*

Stekloff (*W.*). — Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton. (469-528).

Extrait de l'Introduction. — Dans le premier Chapitre, j'indique une méthode générale pour déduire les équations du mouvement d'une masse fluide incompressible contenue dans une membrane ellipsoïdale.

En y ajoutant la condition que la pression reste constante en tous les points de cette membrane, on obtient les équations du mouvement d'un ellipsoïde fluide libre sous une forme très commode pour l'étude de diverses questions qui se rattachent au problème de Dirichlet et de Riemann.

En supposant, d'un autre côté, que la membrane se réduit à une cavité appartenant á un corps solide, on en déduit les équations du mouvement d'un corps solide ayant la cavité de forme ellipsoïdale remplie par le liquide incompressible, ce qui nous conduit à un problème d'hydrodynamique dont le cas particulier (pour l'ellipsoïde de révolution) a été étudié par M. Joukowsky en 1878.

Moyennant les équations obtenues dans le premier Chapitre, je donne ensuite, dans le Chapitre II, la solution complète du problème suivant :

Trouver tous les cas possibles du mouvement d'un ellipsoïde fluide lorsqu'il conserve pendant le mouvement la forme d'un ellipsoïde de révolution.

L'analyse détaillée de ce problème m'a conduit aux cas nouveaux du mouvement non stationnaire, où la surface libre de l'ellipsoïde ne change pas sa forme pendant le mouvement.

Ce résultat ne s'accorde pas avec l'assertion de Riemann : *mit der Beständigkeit der Gestalt notwendig eine Beständigkeit der Bewegungszustandes verbunden ist* (*Werke*, p. 187), énoncée sans aucune restriction.

Ce désaccord et le manque d'analyse détaillée de ce problème chez Riemann m'ont poussé à le reprendre.

Korn (*Arthur*). — Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. (529-583).

Dans ce Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences (prix Vaillant, 1907) le problème de l'équilibre des plaques élastiques encastrées est résolu d'une manière générale pour un contour quelconque, sous la seule condition que ce contour possède en chacun de ses points une tangente unique et un rayon de courbure bien déterminé et différent de zéro.

Il y est fait usage de la méthode des approximations successives, d'abord appliquée à la résolution de ce problème préliminaire :

Trouver deux fonctions U *et* V, *continues ainsi que leurs dérivées premières à l'intérieur du contour* σ *et satisfaisant, à l'intérieur du contour, aux conditions*

$$\Delta U = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i f \log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

$$\Delta V = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i f \log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

sur le contour σ *aux conditions*

$$U = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

$$V = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

l'expression $V'_x - U'_y$ *étant harmonique à l'intérieur de* σ.

La fonction $f(x, y)$ est supposée finie, intégrable et telle qu'on ait

$$\Delta\int_i f \log\frac{1}{r}\,d\omega = -2\pi f.$$

Cette condition sera remplie, par exemple, si f est continue, ou continue par intervalles, de manière que le module de la différence de ses valeurs en deux points quelconques du domaine ou de ses intervalles, dont la distance est l, soit inférieur à $l^\lambda (\lambda > 0)$ multiplié par une constante finie.

Les fonctions U et V étant obtenues, les expressions

$$U - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega,$$

$$V - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega$$

sont respectivement les dérivées, par rapport à x et par rapport à y, d'une fonction

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\,d\omega$$

satisfaisant à l'intérieur du contour σ à l'équation

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = f$$

et sur le contour lui-même aux conditions

$$\varphi = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\nu} = 0.$$

Les Chapitres I et II contiennent la solution générale du problème, et il est démontré que cette solution est unique; l'auteur ajoute quelques remarques concernant le cas où la courbure du contour n'est pas continue, comme par exemple dans la plaque rectangulaire.

Au Chapitre III, il traite d'un problème hydrodynamique tout à fait analogue au problème proposé, savoir le problème d'équilibre d'un liquide doué de frottement au cas de deux dimensions.

Le Mémoire se termine par un aperçu sur les mêmes problèmes pour l'espace à trois dimensions.

Picard (*Émile*). — Sur la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann et sur le pouvoir refroidissant d'un courant fluide. (585-591).

Nombre de questions de Physique mathématique se résolvent au moyen de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Quand on a pu ramener le problème à une telle équation, il reste en général à examiner si l'on se trouve ou non dans un cas singulier. Il peut arriver cependant que des circonstances plus complexes se présentent. Ainsi, dans le premier exemple que traite M. Picard, le problème comporte non seulement une fonction inconnue, mais aussi une constante inconnue; dans le second, une discussion est nécessaire pour étudier la nature de la fonction cherchée en un point singulier.

I. Le problème général de la distribution électrique correspondant au potentiel de C. Neumann,

$$\frac{e^{-kr}}{r} \qquad (k > 0)$$

peut se ramener, comme le montre l'auteur, à une équation de Fredholm,

$$\rho_s + \frac{\lambda}{2\pi}\iint \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right)\cos\psi\,\rho_\sigma\,d\sigma = U_s,$$

où la fonction inconnue est la densité superficielle ρ_1; le second membre est le produit d'une fonction connue du point s sur la surface par la densité intérieure ρ_2, qui est une constante inconnue. On reconnaît aisément qu'on n'est pas dans un cas singulier, ce qui prouve que les problèmes relatifs au potentiel de Neumann sont plus faciles que les problèmes correspondants pour le potentiel newtonien ($k = 0$). La constante ρ_2 est déterminée par l'équation

$$\rho_2\left(\iint A_s\,d\sigma + W\right) = Q,$$

où W est le volume du conducteur, Q la charge et A_s une fonction connue du point s de la surface. Mais il reste à établir, et c'est ce que fait M. Picard, que le coefficient de ρ_2 ne peut pas être nul.

II. Une question rencontrée par M. Boussinesq dans l'étude du pouvoir refroidissant d'un courant fluide sur un solide revient à trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = v,$$

prenant des valeurs données sur un contour fermé Γ et telle que le produit ve^y soit nul à l'infini. M. Picard introduit une intégrale particulière u de cette équation, représentée par la formule

$$u = \int_{\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\, dz}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

qui correspond à l'équilibre calorifique d'une plaque isotrope indéfinie rayonnant au dehors, avec une seule source et nulle à l'infini. Il exprime ensuite l'intégrale cherchée v comme une sorte de potentiel de double couche

$$v = -\int_\Gamma \rho \frac{dv}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma,$$

r désignant la distance de l'élément $d\sigma$ de Γ au point (x, y) et (r, n) l'angle formé par cette direction r avec la normale intérieure. Il arrive ainsi à l'équation fonctionnelle

$$\rho_s + \int_\Gamma \rho \frac{du}{dr} \cos(r, n)\, d\sigma = \text{fonction donnée.}$$

C'est une équation de Fredholm ; on n'est pas dans un cas singulier. Des propriétés de la fonction auxiliaire u et de la façon dont v en dépend il résulte que la condition relative au produit ve^y est vérifiée. L. R.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PUBLIÉ PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe Série, Cahier XI ; 1906 ([1]).

Bricard (Raoul). — Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques. (1-93).

Ce Mémoire, qui a partagé le prix Vaillant décerné par l'Académie des Sciences en 1904, a pour objet la recherche et l'étude des *déplacements d'une figure de grandeur invariable dans lesquels tous les points de la figure décrivent des lignes sphériques*, déplacements auxquels l'auteur donne, pour abréger, le nom de D. S.

Quand une figure invariable (F') est animée d'un D. S., tous ses points restent, par définition, sur des sphères dont les centres forment une figure

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. XXXI$_2$, p. 157.

fixe (F). On peut relier par des tiges rigides les points correspondants de (F) et de (F′) : ces deux figures seront dites *liées*.

La détermination générale de tous les D. S. est un problème très compliqué, car les figures (F) et (F′) peuvent être des espaces, des surfaces, des courbes ou des points. On en connaît diverses solutions partielles dues à MM. Darboux, Mannheim, Duporcq et Bricard, qui sont rappelées dans le premier Chapitre.

Le Chapitre II contient l'équation fondamentale des D. S. et traite, ce qui importe pour la suite, des liaisons de points rejetés à l'infini.

Le Chapitre III est consacré aux D. S. de droites. M. Darboux a fait voir que, *si trois points d'une droite* D′ *sont liés à trois points d'une droite* D, *tout point de la droite* D′ *est lié aussi à un point de la droite* D.

Ce théorème a été généralisé par M. Mannheim de la façon suivante : *Si quatre points d'une droite* D′ *sont liés à quatre points situés dans un même plan* (P), *tout point de* D′ *est lié à un point d'une certaine conique qui contient les quatre points donnés dans le plan* P.

Ces énoncés font connaître deux D. S. dans lesquels la figure (F′) est une droite. Pour le premier (à deux paramètres) la figure (F) est une droite ; dans le second, c'est une conique. Duporcq avait recherché les conditions les plus générales de D. S. d'une droite et reconnu que le problème admet une troisième solution où D′ est liée à une cubique gauche.

M. Bricard ne revient pas sur les deux premières solutions, qui rentrent dans une solution plus générale donnée au Chapitre IV, et se contente de reprendre le cas de la cubique gauche par une méthode un peu plus directe que celle de Duporcq.

Dans le Chapitre IV, il étudie une classe particulière de D. S., qu'il appelle *les D. S. inconditionnels;* ce sont des D. S. où les figures peuvent être liées à partir d'une position relative quelconque. Ils conduisent à un théorème que M. Bricard avait donné sans démonstration en 1896, et qui s'énonce ainsi : *Soient dans l'espace* C *et* C′ *deux coniques quelconques,* m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5 *cinq points de* C′, *et* m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 *les cinq points de* C *qui leur sont homologues dans une correspondance homographique quelconque* T *établie entre* C *et* C′. *Si on lie les points* m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5 *respectivement aux points* m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, *tout point* m' *de* C′ *est lié au point* m *de* C *qui lui correspond dans la transformation* T.

Dans cette même étude, l'auteur retrouve un élégant théorème de Duporcq qui fait connaître un D. S. où les figures liées (E) et (F′) se réduisent à un nombre fini de points : *Si cinq points d'un plan* (P′) *sont liés respectivement à cinq points d'un plan* (P), *il existe un sixième point du plan* (P′) *qui est aussi lié à un point du plan* (P).

Le Chapitre V est consacré à un D. S. à cubiques planes liées, que l'auteur avait fait connaître sans démonstration en 1901 : *Soient* Γ *une cubique plane quelconque fixe,* m *et* m_1 *deux points de cette courbe tels que les tangentes en* m *et en* m_1 *vont concourir sur la courbe* (*couple steinérien*). *Construisons la cubique* Γ′, *symétrique de* Γ *par rapport à une droite quelconque de l'espace, et soit* m' *le point de* Γ′ *qui est symétrique du point* m_1. *On peut déplacer* Γ′ *en liant tous les couples de points analogues à* (m, m').

Le Chapitre VI contient la détermination du D. S. le plus général à espaces liés. M. Bricard avait fait connaître, en 1896, un D. S. dans lequel les figures (F)

et (F') sont toutes les deux à trois dimensions, et qui est ainsi défini : *La figure* (F') *se meut de telle manière qu'une de ses droites glisse sur une droite fixe ; en outre, un point de* (F') *est lié à un point fixe quelconque : dans ce mouvement, tout point de l'espace entraîné avec* (F') *est lié à un point fixe et décrit une biquadratique sphérique tracée sur un cylindre de révolution.* L'auteur n'avait pas recherché si ce déplacement était le plus général de son espèce. Duporcq avait plus tard affirmé que ce D. S. est le plus général de ceux où les figures liées ont trois dimensions, *si l'on suppose que les droites de* (F') *sont liées à des cubiques gauches.* M. Bricard démontre qu'il en est bien ainsi et s'affranchit même de la dernière restriction, qui est sans objet si on laisse de côté le D. S. à deux paramètres que l'on obtient en donnant à (F') une translation telle qu'un de ses points reste sur une sphère.

Les Chapitres VII et VIII sont consacrés à des recherches plus générales qui permettent entre autres résultats de retrouver les D. S. étudiés au Chapitre V, ainsi que ceux (étudiés par l'auteur en 1897) où les figures liées (F) et (F') se réduisent à deux plans, et qui mènent à la connaissance de quelques mouvements nouveaux, parmi lesquels un intéressant D. S. à hyperboloïdes liés dont il est fait une étude approfondie.

Lecornu (L.). — Sur les turbines à axes flexibles. (95-107).

Autonne (*Léon*). — Sur les coordonnées pluckériennes de droite, dans l'espace à $n-1$ dimensions. (109-202).

Extrait de l'Introduction. — On sait le rôle important que jouent en Géométrie soit la notion de l'espace réglé, c'est-à-dire considéré comme lieu de droites, soit les coordonnées pluckériennes d'une droite.

Les six variables homogènes p_{ij} sont liées par la relation fondamentale

$$\omega(p) = p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0.$$

Il m'a paru intéressant d'étendre ces notions à un espace $\mathcal{E}$ à un nombre quelconque $n-1$ de dimensions où les points sont définis par n coordonnées homogènes.

Prenons m points a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$; $m < n$) et leurs mn coordonnées a_{ij}. Le lieu des points x, tels que leurs coordonnées x_j sont données par les relations

$$x_j = \sum_i t_i a_{ij}, \qquad t_i = \text{paramètre variable} \qquad (i \leqq m,\ j \leqq n),$$

est, par définition, une *droite p*, ou p_m, de *degré m*. Un point est une droite de degré *un* ; un plan est une droite de degré $n-1$.

La droite p est définie par

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

coordonnées pluckériennes homogènes. On sait que les p_l sont liées par $\binom{n}{m} - 1 - m(n-m)$ relations fondamentales, homogènes, distinctes,

$\varphi_\sigma(p) = 0$, où l'on peut toujours prendre pour les φ_σ des formes quadratiques.

J'ai peu insisté sur cette matière des relations fondamentales. C'est un Chapitre, aujourd'hui passablement connu, de la théorie des déterminants. Je me suis borné à indiquer un procédé pour écrire immédiatement les équations $\varphi_\sigma = 0$; à montrer que les coefficients des formes φ_σ ne dépendent pas de l'entier n, mais seulement de l'entier m.

Est établie ensuite une théorie de la dualité. Comme contre-partie des coordonnées-points p_l s'introduisent des coordonnées-plans ϖ_l, lesquelles, du reste, coïncident avec les p_l, à l'autre près.

Tel est l'objet de la première Partie.

Effectuons dans l'espace $\mathfrak{E}$ et sur les coordonnées ponctuelles x_j la collinéation ou substitution linéaire n-aire

$$a = \left| x_j \quad \sum_k a_{jk} x_k \right| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les p_l se trouvent transformés par une substitution $\left(\frac{n}{m}\right)$-aire

$$\mathrm{A} = \Delta_m a = \left| p_g \quad \sum_l \mathrm{A}_{gl} p_l \right| \qquad \left[g, l = 1, 2, \ldots, \left(\frac{n}{m}\right)\right].$$

L'étude des dépendances mutuelles entre a et A constitue la matière de la deuxième Partie.

Les coefficients A_{gl} de A sont les $\left(\frac{n}{m}\right)^2$ mineurs m-aires, c'est-à-dire à m^2 éléments, du déterminant $|a_{jk}|$ des a_{jk}.

Nommons $\mathcal{A}$ la transformation géométrique que subit l'espace réglé $\mathfrak{E}$, à $n-1$ dimensions, quand les p_i subissent la collinéation A. Les groupes des opérations a, A, $\mathcal{A}$ sont isomorphes. On en discute l'hémiédrie.

Ici se présente une difficulté assez sérieuse : pour une opération $\mathcal{A}$ donnée, il n'est pas évident que la collinéation A soit définie sans ambiguïté.... Grâce à une discussion un peu minutieuse, je suis parvenu à établir que, dans l'étude des relations mutuelles entre les substitutions linéaires a et A, on n'avait pas à se préoccuper des relations fondamentales : tout se passe comme si les p_e étaient variables indépendantes.

Le problème essentiel est celui-ci : *Quelles sont les conditions* J, *nécessaires et suffisantes, auxquelles doit satisfaire la* $\left(\frac{n}{m}\right)$*-aire* A *pour qu'il existe au moins une n-aire a telle qu'on ait* $\mathrm{A} = \Delta_m a$?...

Il y a trois conditions. La condition J_1, à peu près évidente, signifie que la collinéation A admet pour invariant le système des relations fondamentales.

Nommons *faisceau-point* ou *gerbe* le système des droites qui ont en commun un point. La condition J_2 signifie que la transformation géométrique $\mathcal{A}$ change tout faisceau-point en un autre faisceau-point.

La condition J_3 est la contre-partie dualistique de la condition J_2.

J'indique un procédé régulier de calcul : 1° pour la vérification des conditions J (évanouissement de certains déterminants), sans irrationnalités; 2° pour la construction effective de la substitution a, quand A satisfait aux conditions J.

Dans la troisième Partie, on examine ce que fournissent les méthodes générales précédentes dans le cas de l'espace ordinaire.... Les conditions J sont

celles-ci : la substitution A a pour déterminant $+1$ et admet pour invariant absolu la forme quadratique

$$\omega(p) = p_{12}p_{34} - p_{23}p_{14} - p_{31}p_{24}.$$

Cahier XII ; 1908.

Belot (*Émile*). — Essai de Cosmogonie tourbillonnaire. (1-40).

Maillet (*Edmond*). — Sur les fractions continues algébriques. (41-62).

Les travaux de Stieltjes, qui avait indiqué des catégories étendues de fractions continues algébriques S égales à des fonctions méromorphes f d'une variable z, rapprochés des travaux récents sur l'ordre et la croissance des fonctions entières et métamorphes, posaient la question de la détermination de l'ordre réel ou apparent de ces fonctions f, de leurs zéros, de leurs pôles.

Les recherches de M. Auric sur ces sujets ont fait connaître, notamment, *une limite supérieure de l'ordre* du numérateur P et du dénominateur Q des fonctions quasi méromorphes que sont les fractions

$$S = PQ^{-1} = 1 + \cfrac{\mu_1}{1 + \cfrac{\mu_2}{1 + \ldots}}$$

où les μ_i sont des polynomes en z et $\frac{1}{z}$ de degré limité, la série $\Sigma\mu_i$ étant absolument convergente.

M. Maillet a surtout en vue d'indiquer des catégories étendues de pareilles fractions S, rentrant en partie dans les types de Stieltjes, et pour lesquelles *cette limite supérieure de l'ordre est, en même temps, la valeur exacte de l'ordre des zéros et de l'ordre des pôles.*

Il commence par établir certains résultats de même nature relatifs aux fractions continues *divergentes*

$$S = \lambda_0 + \cfrac{1}{\lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \ldots}}$$

où les λ_i sont de la forme $\frac{z}{\alpha_i}$, les α_i étant des constantes ; et la série $\Sigma\lambda_i$ absolument convergente. Les numérateurs P_{2n} et P_{2n+1}, les dénominateurs Q_{2n} et Q_{2n+1} de deux réduites, l'une de rang pair, l'autre de rang impair, ont pour limites des fonctions entières p, p', q, q' liées par la relation

$$p'q - pq' = 1,$$

de sorte que les fonctions entières p, q n'ont aucun zéro commun, non plus que p' et q'. Les réduites d'entre pair ont une limite $S_0 = pq^{-1}$, celles d'ordre impair une autre limite $S'_0 = p'q'^{-1}$. Les deux fonctions S_0, S'_0 peuvent se représenter

sous forme de fractions continues convergentes ayant respectivement pour réduites les $P_n Q_n^{-1}$ et les $P_{2n+1} Q_{2n+1}^{-1}$. M. Maillet fait connaître des classes étendues de fractions continues S_0 et S'_0, qui sont des fonctions méromorphes dans tout le plan et pour lesquelles l'ordre des zéros et des pôles peut être déterminé.

Pour les fractions continues *convergentes*

$$S = 1 + \cfrac{\mu_2 z}{1 + \cfrac{\mu_3 z}{1 + \dots}}$$

les μ_i étant des constantes et la série $\Sigma \mu_i$ absolument convergente, le numérateur P_n et le dénominateur Q_n d'un réduit ont des limites $p(z)$, $q(z)$, dont l'auteur démontre qu'*elles n'ont aucun zéro commun*. Il prouve de plus que :

Quand les $\nu_i = |\mu_i|$ décroissent constamment et suffisamment vite lorsque i croît, le numérateur et le dénominateur de la réduite d'ordre n ont pour limites des fonctions entières quasi algébriques $p(z)$ et $q(z)$, dont les racines ont respectivement les valeurs $-\mu_{2k}^{-1}(1 + \varepsilon_{2k})$ pour $p(z)$, et $-\mu_{2k-1}^{-1}(1 + \varepsilon_{2k+1})$ pour $q(z)$; les modules des quantités ε_{2k}, ε_{2k+1} peuvent être rendus aussi petits qu'on veut si la décroissance des ν_i est assez rapide quand i croît.

Le résultat relatif aux ordres des zéros et des pôles s'étend à des fractions continues d'une forme assez analogue aux précédentes représentant des fonctions quasi méromorphes, soit à un nombre fini de points singuliers essentiels, soit dans le domaine d'un point essentiel.

Carrus. — Sur les familles de Lamé engendrées par le mouvement d'une surface invariable. (63-85).

Ce Mémoire traite des surfaces qui, dans plusieurs mouvements, sont susceptibles d'engendrer une famille de Lamé.

L'auteur commence par démontrer géométriquement deux propriétés générales :

I. *A chaque direction de translation pour laquelle une surface engendre une famille de Lamé correspondent sur la surface autant de couples de lignes de courbure planes que l'on peut mener de plans tangents perpendiculaires à cette direction. Les plans de ces lignes de courbure coupent la surface orthogonalement.*

Il suit de là que, si une surface engendre une famille de Lamé dans *deux* mouvements de translation, cette surface est une sphère, ou un plan, ou un cylindre, dont les génératrices sont perpendiculaires aux deux directions de translation. C'est la généralisation d'un théorème de J. Bertrand.

II. *A chaque mouvement de rotation dans lequel une surface engendre une famille de Lamé correspondent autant de couples de lignes de courbure sphériques que l'on peut mener de plans tangents par l'axe de rotation. Les sphères correspondantes ont leur centre sur l'axe de rotation et coupent la surface à angle droit. Les deux sphères qui correspondent à un même plan tangent se coupent elles-mêmes orthogonalement.*

Il suit de cette proposition et de la précédente que les seules surfaces à lignes de courbure planes (dans un seul système) qui peuvent engendrer une famille de Lamé par translation ou par rotation sont des périsphères. Le cas de la translation a été traité par M. L. Lévy (1892).

M. Carrus considère ensuite l'équation de M. Maurice Levy sous la forme que lui a donnée M. Darboux, en la rapportant à des axes mobiles, et, entre les six symboles Δ qui y figurent, il établit quatre relations simples, et, en particulier, trois relations homogènes, d'où il tire tout d'abord cette conséquence :

Une surface qui engendre une famille de Lamé dans plus de deux mouvements indépendants engendre une famille dans un mouvement quelconque et, par suite, est une sphère ou un plan.

Il fait ensuite usage de ces relations pour déterminer les surfaces développables qui engendrent une famille de Lamé dans un mouvement de rotation; leur plan tangent a pour équation

$$z = ax + by + k\int\sqrt{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}\,d\alpha,$$

a, b désignant deux fonctions arbitraires du paramètre α; a', b' sont leurs dérivées et k une constante.

Il en déduit enfin la détermination des périsphères qui engendrent une famille de Lamé dans un mouvement de rotation. Voici leur génération :

La courbe lieu des centres des sphères enveloppées est une courbe quelconque située dans un plan passant par l'axe de rotation. Le rayon de chaque sphère enveloppée est proportionnel à la distance de son centre à l'axe de rotation.

Le périsphère ainsi engendré est la surface la plus générale à lignes de courbure planes dans un seul système qui engendre une famille de Lamé dans un mouvement de rotation.

Charbonnier (Commandant *P.*). — Étude de l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement des projectiles dans l'air. (87-199).

Pour les très longues trajectoires des canons de l'artillerie navale (10^{km} à 15^{km}), l'effet de la rotation de la Terre sur le mouvement des projectiles peut se traduire, en *portée,* par une augmentation ou une diminution atteignant 50^m; en *direction,* par un égal écart au plan de tir. Cette cause perturbatrice est donc du même ordre de grandeur que la *dérivation* due à la rotation du projectile et la *déviation* produite par le vent.

C'est pourquoi l'auteur a consacré à l'étude de cette influence un travail étendu dont il résume de la façon suivante les cinq Chapitres :

Chapitre I. *Théorie générale des termes secondaires du problème balistique.* — Nous donnons, sous forme générale, des intégrales qui permettent le calcul des altérations de la trajectoire sous l'action de petites forces quelconques appliquées au projectile....

Chapitre II. *Trajectoire relative dans le vide.* — Nous rappelons d'abord les équations différentielles de la Balistique quand on tient compte de la rotation diurne, en conservant seulement le terme en a, vitesse angulaire de rotation de la Terre.

L'étude de la trajectoire dans le vide est faite ensuite avec détail et renferme quelques propriétés nouvelles....

Chapitre III. *Trajectoire atmosphérique relative.* — Nous y traitons le problème (qui, jusqu'ici, n'avait reçu de Poisson qu'une solution partielle) de l'influence de la rotation de la Terre dans le cas du tir dans l'atmosphère, soit dans le plan de projection, soit perpendiculairement à ce plan....

Nous traitons encore, de la façon la plus générale, le problème dans le cas du mouvement vertical dans l'air, soit ascendant, soit descendant, et aussi dans le cas du tir tendu à grande vitesse.

Nous montrons ainsi que le problème est soluble dans tous les cas où l'on connaît les équations finies de la trajectoire principale.

Chapitre IV. *La méthode de Saint-Robert.* — Nous exposons la méthode géométrique directe due à de Saint-Robert, qui fait appel seulement aux propriétés du mouvement absolu ; nous la généralisons au cas du tir dans l'atmosphère et nous montrons comment s'établit la concordance des deux méthodes aussi bien dans l'air que dans le vide.

Chapitre V. *Les termes en* a^2. — ... Traiter un problème de Mécanique rationnelle consiste essentiellement à établir la hiérarchie des causes perturbatrices, à les ranger en série par ordre de grandeur, à négliger d'abord les plus petites, pour redescendre ensuite dans les détails....

On en verra des exemples dans le Chapitre V, où, en suivant la méthode de M. de Sparre, nous introduisons successivement les termes en a^2, qui représentent la seconde approximation dans le problème traité.

Ainsi qu'on le voit par ce sommaire, le présent Mémoire, outre les parties nouvelles qu'il contient, peut donner une idée d'ensemble des travaux des géomètres sur le problème de l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement des projectiles. L. R.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, t. XXXVI, 1908 (1).

Lebesgue (*Henri*). — Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm. (7-19).

La solution de l'équation de Fredholm, dit l'auteur, dépend d'expressions analytiques assez compliquées. Dans son Mémoire des *Acta mathematica*, M. Fredholm a montré comment l'on pouvait vérifier que ces expressions fournissent bien la solution cherchée, mais il n'a pas indiqué comment l'on était amené à la considération de ces expressions.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXXVI, p. 16.

M. Goursat a montré récemment (*Bull. Soc. mathém. de France*, 1907) que l'étude d'un cas particulier conduisait facilement à prévoir la forme de la solution; il devient alors tout naturel d'employer le procédé de vérification de M. Fredholm. D'ailleurs, cette vérification est inutile dans des cas étendus, comme il résulte d'un raisonnement rapidement indiqué par M. Goursat à la fin de sa Note. C'est ce raisonnement que je vais développer: il conduit à une conclusion très générale; cela m'a paru intéressant à noter, d'autant que la méthode de M. Goursat semble pouvoir s'appliquer à d'autres équations fonctionnelles.

De Séguier. — Sur la théorie des matrices. (20-40).

Dans la première partie de ce Mémoire, l'auteur, s'inspirant d'une analyse récente de M. Jordan, étend à la réduction d'un faisceau $\alpha = t\alpha_0 - s\alpha_1$ de matrices (ou formes bilinéaires) le procédé de réduction par des combinaisons de lignes et de colonnes que Kronecker a indiqué pour une seule matrice.

Dans la seconde partie, M. de Séguier considère le cas où α est réelle et symétrique ou hermitienne et celui où α_1 est la matrice unité ε. M. Loewy avait établi une inégalité importante entre la caractéristique d'une forme α_0 quadratique réelle ou hermitienne et les exposants des diviseurs élémentaires de tout faisceau $\alpha = t\alpha_0 + s\alpha_1$ qui la contient, lorsque $|\alpha_1|$ est différent de zéro. Par les mêmes procédés que dans la première partie, l'auteur en obtient une démonstration nouvelle et une extension au cas $|\alpha_1| \neq 0$.

Lorsque $\alpha_1 = \varepsilon$, la forme réduite de α fournit la forme canonique de α_0. En formant directement les fonctions entières de α_0 prise sous cette forme canonique, on retrouve immédiatement, ou par des combinaisons simples de lignes et de colonnes, les théorèmes de MM. Frobenius et Bromwich sur l'expression des fonctions de matrices par des polynomes et les diviseurs élémentaires de $\varphi(\alpha_0) - s\varepsilon$, $\varphi(x)$ étant un polynome. Grâce à un numérotage convenable des lignes et des colonnes, la même forme canonique fournit aisément le théorème de M. Rados sur les racines caractéristiques de la matrice dont les éléments sont les mineurs d'un certain ordre d'un déterminant donné.

La forme générale des matrices permutables à α_0, prise sous forme canonique, sert enfin à l'auteur de point de départ pour établir directement une généralisation d'un théorème fondamental de M. Frobenius sur les racines caractéristiques d'une fonction de matrices permutables et un autre théorème de M. Schur sur les diviseurs élémentaires correspondant à ces racines.

De Montcheuil. — Détermination des surfaces qui admettent une surface moyenne donnée. (40-58).

Introduction. — Nous nous proposons, dans cette étude, de fixer la nature de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème, de rappeler, en les complétant et les coordonnant, quelques-uns des résultats acquis, et enfin de déterminer une nouvelle catégorie de solutions. Nous essayerons, en effet, de déterminer l'équation qui définit les surfaces admettant un cylindre pour surface moyenne.

Barré. — Sur une propriété des surfaces cerclées. (58-68).

L'auteur appelle *point central de première espèce* sur une surface cerclée

tout point d'intersection du cercle générateur avec la caractéristique de son plan. Le lieu de ces points est *la ligne de striction de première espèce.*

Est dit *point central de seconde espèce* tout point pour lequel la distance du cercle générateur au cercle infiniment voisin est stationnaire. Le lieu de ces points est *la ligne de striction de seconde espèce.*

Laissant de côté les surfaces engendrées par des cercles tracés sur des plans isotropes, M. Barré étudie trois problèmes relatifs aux points centraux.

Problème I. — *Trouver les surfaces cerclées dont la ligne de striction de première espèce fait entièrement partie de celle de seconde espèce.*

Le problème comporte quatre solutions : 1° les surfaces enveloppes de sphères; 2° les surfaces engendrées par un cercle dont le plan reste osculateur au lieu de son centre; 3° les surfaces engendrées par un cercle dont le plan se meut normalement au lieu de son centre; 4° une autre classe de surfaces que l'auteur définit complètement, mais dont la génération n'est pas simple.

Problème II. — *Déterminer les surfaces dont la ligne de striction de seconde espèce fait complètement partie de celle de première espèce.*

Les surfaces cherchées sont les mêmes que celles qui résolvent le problème suivant.

Problème III. — *Déterminer les surfaces cerclées dont les deux lignes de striction coïncident complètement.*

Les surfaces répondant à la question sont celles qu'engendre un cercle dont le plan est osculateur au lieu des centres et dont le rayon ρ égale le rayon de torsion τ de ce lieu ou bien est lié à τ par la relation

$$\frac{d\rho}{ds} = \pm \frac{\rho^2 - \tau^2}{\tau^2},$$

où s désigne l'arc du lieu du centre.

Ayant, dans la solution de ces problèmes, laissé de côté les surfaces dont le cercle générateur est dans un plan de direction invariable, l'auteur indique ce que deviennent pour ces surfaces les deux lignes de striction.

Maillet (*Edm.*). — Sur la décomposition d'un entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers (problème de Waring). (69-77).

Waring s'est demandé si tout nombre entier N n'est pas la somme d'un nombre k, limité et indépendant de N, de puissances $n^{\text{ièmes}}$ d'entiers positifs. La réponse est affirmative pour les valeurs de n inférieures à 6. M. Fleck a prouvé récemment (*Math. Ann.*, t. LXIV, 1907) qu'il en est encore de même pour $n = 6$. M. Maillet, par une extension convenable de la méthode de M. Fleck, arrive à la même conclusion pour $n = 8$.

Il démontre en outre que k est au moins égal à $n + 1$ pour une infinité de valeurs de N.

Hadamard. — Sur l'expression asymptotique de la fonction de Bessel. (77-85).

On sait que la fonction de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(2!)^2} - \ldots - (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots$$

et la fonction $J_0(ix)$ admettent des développements formels qui en font connaître les valeurs asymptotiques pour x très grand, mais qui sont divergents.

M. Hadamard expose un moyen de rendre ces développements convergents, en ajoutant aux termes successifs des parties correctives dont chacune est sans influence sur la valeur asymptotique du résultat, mais qui, par leur ensemble, rétablissent la convergence de la série. Dans les séries ainsi obtenues figure une intégrale définie, mais elle est infiniment petite par rapport à toutes les erreurs commises, de sorte que ces séries possèdent bien la double propriété : 1° de converger et de fournir une expression exacte des fonctions $J(x)$ et $J_0(ix)$; 2° d'en fournir une valeur asymptotique, lorsqu'on les arrête à un nombre déterminé quelconque de termes.

Drach (Jules). — Sur les systèmes complètement orthogonaux de l'espace euclidien à *n* dimensions. (85-126).

Introduction. — La première partie de ce travail est consacrée à une étude *directe* de la généralité de la solution la plus étendue du système

$$\text{(A)} \qquad (i, k) = \mathbf{S}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_k} = 0 \qquad (i \neq k = 1, 2, \ldots, n)$$

qui définit les systèmes complètement orthogonaux de l'espace à n dimensions.

Une première détermination de cette généralité résulte de ce qu'on peut déduire des équations (A) et de leurs conséquences *une seule expression de toutes les dérivées de y par rapport aux x, exprimées à l'aide des seules dérivées*

$$\frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^p}, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p y_\lambda}{\partial x_i\,\partial x_\lambda^{p-1}},$$

où $i \leqq \lambda$. Ces dernières, qui sont alors les *dérivées paramétriques* de MM. Méray et Riquier, peuvent seules être prises arbitrairement en un point x_{i0} ($i = 1, \ldots, n$). Elles se groupent d'ailleurs immédiatement en fonctions arbitraires; on peut prendre arbitrairement les fonctions des deux variables x_i, x_λ, auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_i}$ ($i < \lambda$) quand on fixe toutes les variables, sauf x_i et x_λ, et aussi les fonctions d'une seule variable auxquelles se réduisent les dérivées $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\lambda}$ quand on y fixe toutes les variables, sauf x_λ.

Une seconde détermination de la généralité possible de la solution la plus étendue du système (A) résulte de ce qu'en différentiant une seule fois on obtient les deux systèmes

$$(\alpha) \qquad (i, kl) = 0 \qquad (i \neq k \neq l),$$

$$(\beta) \qquad (i, ki) + (i^2, k) = 0.$$

On fixe aisément la généralité de la solution la plus étendue du système (α). Cette solution dépend de $n(n-1)$ fonctions arbitraires de deux variables. On conclut seulement de là les équations du premier ordre

$$(i, k) = F_{i,k}(x_i, x_k),$$

et l'on montre que, pour annuler ces fonctions $F_{i,k}$, il est nécessaire et suffisant d'ajouter $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition qui lient deux à deux les $n(n-1)$ fonctions arbitraires obtenues. On retrouve ainsi les résultats de la première détermination.

La seconde partie du présent travail a pour but l'étude systématique des divers groupes d'équations qui se présentent quand on recherche les conditions pour qu'une relation

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

définisse une famille de surfaces appartenant à un système complètement orthogonal.

On rencontre d'abord les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations du *premier groupe* de M. Darboux. Une étude préalable des conséquences des relations

$$\sum u_i v_i = 0, \qquad \sum v_i w_i = 0, \qquad \sum u_{ik} v_i w_k = 0,$$

qui définissent les rapports des w_i, v_i, etc., nous permet de classer les conditions d'intégrabilité des équations de ce premier groupe, qui sont en apparence en nombre

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Elles se partagent en deux catégories d'égal nombre; les unes sont des *identités*, les autres sont les équations du *second groupe* de M. Darboux, qui expriment que *les lignes de courbure de chaque surface individuelle* $u =$ const. *sont coordonnées* :

$$\sum u_{ikl} v_i w_k t_l = 0.$$

Ces dernières équations sont donc *en général* des conséquences des premières. On fixe aisément les cas d'exception : ils résultent de ce que les conditions d'intégrabilité des équations du premier groupe sont des produits de deux facteurs, dont l'un dépend des racines de l'équation en λ qui définit les lignes de courbure de la surface $u =$ const.; ce n'est que si ce facteur est différent de zéro que le second $\sum u_{ikl} v_i w_k t_l$ s'annule identiquement.

M. Darboux avait été amené à ajouter le *second groupe* par la considération des *surfaces parallèles*, pour lesquelles le premier groupe disparait. On montre aisément que dans ce cas tous les facteurs autres que les $\sum u_{ikl} v_i w_k t_l$ sont nuls; les équations du second groupe ne peuvent plus se déduire du premier. Le paradoxe apparent est ainsi expliqué.

2de Partie

Dulac (*H.*). — Remarque sur les conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes. (126-128).

Les raisonnements par lesquels on établit les conditions pour qu'une équation différentielle du premier ordre n'ait pas de points critiques mobiles présentent une lacune qui pourrait faire craindre que, dans certains cas particuliers, les conditions énoncées ne soient pas nécessaires. De ce que la racine $\nu^{\text{ième}}$ Z de l'intégrale z est une fonction algébroïde à plusieurs valeurs, dans un certain domaine, on conclut qu'il en est de même de l'intégrale $z = Z^\nu$. Or un exemple simple prouve que l'intégrale peut être holomorphe et non algébroïde dans le domaine du point considéré x_0.

Cette circonstance exceptionnelle ne peut, comme le fait voir M. Dulac, se présenter que pour des valeurs isolées et fixes de x_0, de sorte que l'existence de pareilles valeurs de x_0 ne changera rien aux conditions nécessaires pour que l'équation n'ait pas de points critiques mobiles.

Le Roux (*J.*). — Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (129-133).

Pour exprimer qu'un système d'équations linéaires est incompatible ou indéterminé, il suffit d'écrire que les équations homogènes, qu'on obtient en négligeant dans ce système les termes indépendants des inconnues, admettent des solutions non toutes nulles.

Cette remarque permet à M. Le Roux de former les équations caractéristiques des systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles.

L'auteur applique sa méthode aux équations de la déformation des surfaces et retrouve le résultat classique relatif aux asymptotiques. Elle convient d'ailleurs au cas où les fonctions initiales seraient définies d'une manière différente pour chaque fonction inconnue.

Combebiac (*G.*). — Sur la génération des métriques. (133-141).

Les lignes qui jouent le rôle d'axes dans une métrique hyperbolique doivent posséder les propriétés géométriques attribuées aux lignes droites, sauf celle qu'exprime le postulatum. L'auteur établit qu'elles doivent, en outre, satisfaire à une autre condition qui se substitue au postulatum, de sorte que celui-ci devient un cas singulier de la condition d'existence d'une métrique; lorsque cette condition supplémentaire est réalisée, la métrique est complètement déterminée par ses axes.

Petrovitch (*Michel*). — Sur une suite de fonctions rationnelles rattachées aux équations algébriques. (141-150).

Étant donnée une équation algébrique de degré n, à coefficients réels $f(x) = 0$, soit $P_k(x) = 0$ l'équation qui admet pour racines les puissances 2^k des racines de $f(x) = 0$. Les polynomes $P_k(x)$ jouent un rôle important dans la méthode de Gräffe pour la résolution numérique des équations.

M. Petrovitch appelle *fonction* $N_k(x)$ *rattachée à l'équation* $f = 0$ la

fonction rationnelle

$$N_k(x) = \frac{x P'_k(x)}{P_k(x)}.$$

Il exprime $N_k(x)$ par des sommes d'expressions qui ne dépendent que de $f(x)$ et de la dérivée $f'(x)$; puis il établit une relation qui existe entre les fonctions rationnelles $N_k(x)$ et le nombre h des racines de l'équation $f = 0$ dont les modules sont inférieurs à un nombre R :

Étant donnée une couronne circulaire C *ayant l'origine comme centre, de rayon intérieur* R *et d'épaisseur* δ, *ne contenant aucune racine de l'équation* $f(x) = 0$, *de degré* n, *si l'on donne à l'entier* k *une valeur quelconque supérieure à*

$$\frac{1}{\log 2}\left[\log\log(n+1) - \log\log\frac{2R+2\delta}{2R+\delta}\right],$$

le nombre des racines entourées par la couronne C *sera égal à* M *ou bien à* M + 1, M *désignant la partie entière du nombre* $N_k(x)$ *pour*

$$x = \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^{2^k}.$$

Raffy (*L.*). — Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues. (150-184).

Après un historique du sujet, l'auteur établit géométriquement (§I) un théorème qui semble dû à S. Lie et d'après lequel il y a identité entre les surfaces de Monge dont les deux courbures principales sont partout égales et les surfaces réglées *gauches* à génératrices isotropes. Ces surfaces possédant la propriété caractéristique de n'admettre qu'une seule famille de lignes de courbure, on peut les appeler *surfaces à lignes de courbure confondues* ou encore *surfaces* (O_k) pour rappeler que tous leurs points sont des ombilics et qu'elles ont une courbure totale K, tandis que cette notion échappe quand il s'agit de développables isotropes dont tous les points sont aussi des ombilics.

M. Raffy définit ensuite la transformation de contact qui permet de déduire les surfaces (O_k) des surfaces à plan directeur, ce qui en fournit une représentation analytique simple et générale, à l'aide des coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 246). Pour que le plan représenté par l'équation

$$(\alpha + \beta)x - i(\alpha - \beta)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0$$

enveloppe une surface (O_k), il faut et il suffit que ξ soit une fonction linéaire de l'une des variables α et β. En posant

$$\xi = A(\alpha)\beta + A_0(\alpha)$$

et désignant les dérivées par des accents, on trouve pour les coordonnées des surfaces (O_k)

$$z = \frac{A_0 - \alpha A'_0 - A'\alpha\beta}{\alpha\beta + 1},$$

$$x - iy = -\frac{(A_0 - A')\beta + A'_0}{\alpha\beta + 1},$$

$$x + iy = -\frac{\alpha(A_0 - \alpha A'_0) + A'\alpha^2\beta}{\alpha\beta + 1} - A.$$

Les génératrices isotropes $\alpha =$ const. forment l'unique famille de lignes de courbure; elles sont à la fois lignes minima et lignes asymptotiques. La seconde famille de lignes minima dépend, comme la seconde famille d'asymptotiques, d'une équation de Riccati.

Le lieu de l'unique centre de courbure principal des surfaces (O_k) est une courbe; en la déterminant à l'aide de la représentation ci-dessus, on obtient des formules qui mettent en évidence le mode de génération indiqué par Monge : *toute surface à lignes de courbure confondues est l'enveloppe d'une sphère dont le rayon est égal à l'arc de la courbe décrite par le centre de cette sphère.*

Ces formules, qui donnent une solution rationnelle particulièrement simple de l'équation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dS^2,$$

savoir

$$X + iY = \alpha A' - A, \qquad 2Z = A_0 - \alpha A'_0 - A',$$
$$X - iY = - A'_0, \qquad 2S = A_0 - \alpha A'_0 - A',$$

sont propres à représenter une courbe quelconque (§III) sauf la droite. L'auteur en déduit en passant que *les courbes à courbure constamment nulle sont les courbes tracées sur un plan isotrope.*

Il détermine ensuite (§ IV) les deux nappes de l'enveloppe des sphères définies par Monge et cherche la condition pour qu'on puisse les appliquer l'une sur l'autre, en faisant correspondre les deux génératrices qui appartiennent à une même sphère enveloppée. Cette condition s'exprime par une relation où figurent les dérivées du cinquième ordre des fonctions A et A_0. Mais on peut en trouver une intégrale première qui traduit un fait géométrique simple : *le lieu des centres des sphères enveloppées est une courbe telle que le rapport de sa courbure à sa torsion varie proportionnellement à son arc.*

Les surfaces (O_k) ne sont qu'une variété d'une classe de surfaces plus générales, dont la courbure totale dépend seulement de l'un des paramètres des lignes de longueur nulle. Ces surfaces mettant en défaut, comme les surfaces à courbure totale constante, la théorie classique de l'applicabilité fondée sur l'emploi des paramètres différentiels, M. Raffy donne le moyen de décider si deux d'entre elles sont applicables l'une sur l'autre. Ensuite vient une proposition relative au problème général de la détermination d'une surface d'après ses deux formes quadratiques fondamentales : *connaissant l'élément linéaire d'une sphère et l'une de ses familles de génératrices rectilignes, on n'a qu'une seule équation de Riccati à intégrer pour obtenir l'autre famille.*

Enfin (§ VI) les surfaces (O_k) sont rapportées à leurs lignes minima et à leurs asymptotiques. La solution du premier de ces problèmes repose sur cette propriété que *l'élément linéaire de toute surface* (O_k) *devient celui d'une sphère de rayon* 1 *quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne*, ici la courbure totale; elle résulte des travaux antérieurs de l'auteur sur les surfaces isothermiques. Elle lui permet d'établir qu'*une surface gauche à génératrices isotropes ne peut être harmonique sans avoir sa courbure totale constante.* La solution du second problème est fondée sur des formules dues à M. Goursat et conduit immédiatement au résultat très général que M. Drach a fait connaître en 1903 relativement aux surfaces douées d'un réseau conjugué persistant.

Goursat (*E.*). — Démonstration élémentaire d'un théorème de Weierstrass. (209-215).

Le théorème, aujourd'hui classique, dont il s'agit est le suivant :

Si $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$ *est une série entière en* $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, *convergente tant que les modules des variables restent plus petits que des nombres positifs* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \rho$ *et si le développement de* $F(0, 0, \ldots, 0, y)$ *commence par un terme de degré n en* $y\,(n > 0)$, *on a identiquement*

$$F = (y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n)\,\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ *étant des séries entières en* $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *qui s'annulent pour*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0,$$

et Φ une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, avec un terme constant différent de zéro.

Les démonstrations qu'on a données jusqu'ici de ce théorème font appel à des notions assez élevées de la théorie des fonctions analytiques, bien que la proposition soit en elle-même d'une nature élémentaire. Le raisonnement de M. Goursat ne s'appuie que sur les propriétés les plus simples des séries entières.

Dulac (*Henri*). — Sur les intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle. (216-224).

Étant donnée l'équation différentielle

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0,$$

où X et Y sont des fonctions de x et y holomorphes et nulles pour $x = y = 0$, si l'on pose

$$y = t x^{\nu},$$

ν étant un exposant positif, on obtient *en général* l'équation

$$x(at^{q-1} + \ldots)\,dt + (bt^q + \ldots)\,dx = 0,$$

où les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$; a et t sont deux constantes dont l'une peut être nulle; q est un entier positif. On arrive *toujours* à cette forme lorsque ν est un nombre irrationnel, ce qui est le cas particulièrement examiné par l'auteur. Considérant les intégrales y de l'équation proposée et faisant tendre x vers zéro dans le champ complexe. M. Dulac démontre les deux théorèmes suivants :

I. *Si comme cela a lieu en général, on a* $b \neq 0$ *et si* t *tend vers une limite, cette limite est nulle ou infinie.*

II. *Si l'on a* $b \neq 0$, t *tend nécessairement vers une limite lorsque* x *tend vers zéro.*

Le premier a été fréquemment employé dans la recherche des intégrales passant par le point singulier $x = y = 0$, sans qu'on se soit, semble-t-il, suffi-

samment inquiété de savoir si l'on en possédait une démonstration rigoureuse valable dans tous les cas.

Cotton (*Émile*). — Sur l'intégration approchée des équations différentielles. (225-246).

Les équations différentielles qui se présentent en Mécanique ou en Physique ne sont pas, en général, exactement intégrables; aussi doit-on, le plus souvent, substituer aux solutions exactes des solutions approchées.

Afin de décider si les écarts constatés entre les nombres prévus par le calcul et ceux que donnent les observations sont imputables à l'approximation des procédés mathématiques ou à celle des lois physiques adoptées, il y a un grand intérêt à résoudre le problème important et néanmoins peu étudié, qui consiste à rechercher des limites supérieures pour les valeurs absolues des erreurs que comportent les solutions approchées.

Après une première tentative faite récemment (1905), l'auteur expose une méthode nouvelle propre à donner de bien meilleurs résultats. A cet effet il introduit, entre autres, la notion de *fonction dominante;* une fonction supérieure ou égale à la valeur absolue d'une autre fonction $f(t)$ dans un certain intervalle *domine* cette fonction $f(t)$ dans l'intervalle considéré.

Cela posé, on peut estimer l'ordre de grandeur des solutions d'un système Σ' d'équations différentielles linéaires en utilisant la solution d'un autre système Σ de même forme dont les coefficients positifs *dominent* les coefficients correspondants de Σ'. Après avoir précisé l'énoncé du problème principal, M. Cotton montre que les erreurs que comportent les solutions approchées d'un système d'équations différentielles quelconques peuvent être considérées comme solutions d'un système linéaire déterminé Σ' assez analogue aux équations aux variations de M. Poincaré. Bien que ce système ne soit pas entièrement connu, on peut lui appliquer la proposition précédente et retrouver ainsi des résultats très voisins de ceux que l'auteur avait obtenus dans ses premières recherches (*Acta mathematica*, t. XXXI).

Dans les méthodes nouvelles, on envisage aussi les erreurs comme solutions d'un système linéaire avec seconds membres σ dont la formation comporte un certain degré d'arbitraire. Les seconds membres dépendent encore des solutions exactes cherchées, mais doivent être, ainsi que leurs dérivées premières, petits en valeur absolue; les coefficients des premiers membres ne contiennent que des éléments connus. Si les seconds membres σ étaient connus, un procédé indiqué par Cauchy, pour l'intégration des équations linéaires non homogènes, donnerait les erreurs sous formes d'intégrales définies.

Ne pouvant calculer exactement ces intégrales, l'auteur détermine d'abord une limite supérieure de leurs valeurs absolues, ce qui donne une première solution du problème proposé.

M. Cotton calcule aussi par approximation les seconds membres σ et les intégrales définies, en estimant les erreurs comportées par ces approximations. Cette seconde méthode revient à déduire de solutions approchées, supposées connues, d'autres solutions paraissant plus approchées. Elle conduit à un procédé d'approximations successives qui comprend comme cas particulier celui de M. Picard et où les quadratures exigées par cette méthode sont remplacées par l'intégration de systèmes linéaires à seconds membres. M. Cotton justifie ainsi un procédé qui avait été parfois utilisé déjà et qui concourt à l'estimation des erreurs.

Les démonstrations de l'auteur ne font intervenir que des hypothèses assez larges concernant les systèmes différentiels considérés et semblent par là même bien appropriées aux problèmes de la Physique. Une application importante au mouvement du pendule de Foucault paraîtra dans les *Annales de l'Université de Grenoble*. L. R.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO;
Torino, C. Clausen; in-8°.

Tome XXXIX, 1903-1904.

Vitali (*G.*) [D 1]. — Sur les séries de fonctions analytiques. (22-32).

Pour qu'une série de fonctions analytiques représente une fonction analytique, M. Arzelà a donné une condition moins restrictive que celle de la convergence uniforme, en introduisant la notion de *convergence uniforme par couches* (*Mém. de l'Ac. de Bologne*, 1900). L'auteur démontre un théorème donnant une condition encore plus générale.

Coolidge (*J.-L.*) [N_2 1 ref. D 3]. — Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe. (175-186).

En prenant pour les points et les plans d'un espace non euclidien les coordonnées de Weierstrass, on détermine une droite par les coordonnées x_i d'un de ses points et les ξ_i du plan normal à la droite en ce point, et c'est par cette détermination que les droites ont été étudiées par M. Fibbi dans son Mémoire : *I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazi di curvatura costante* (*Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa*, t. VII, 1895). En 1896, la géométrie des rayons a été aussi étudiée par M. Bianchi dans son Mémoire : *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XXIV, 1896). M. Fubini, dans sa Thèse : *Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici* (*Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa*, t. IX, 1900), a introduit pour une droite de nouvelles coordonnées, appelées *parametri di scorrimento*, qui déterminent les translations de $\frac{\pi}{2}$ suivant la droite, et qui sont

$$
\begin{aligned}
X &= \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2 + \xi_4 x_3 - \xi_3 x_4,\\
Y &= \xi_2 x_4 - \xi_4 x_2 + \xi_3 x_1 - \xi_1 x_3,\\
Z &= \xi_3 x_2 - \xi_2 x_3 + \xi_4 x_1 - \xi_1 x_4,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
X' &= \xi_3 x_4 - \xi_4 x_3 + \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2,\\
Y' &= \xi_4 x_2 - \xi_2 x_4 + \xi_3 x_1 - \xi_1 x_3,\\
Z' &= \xi_4 x_1 - \xi_1 x_4 + \xi_2 x_3 - \xi_3 x_2,
\end{aligned}
$$

x_i et ξ_i étant les coordonnées de deux points conjugués de la droite (dont la distance est $\frac{\pi}{2}$). Les X, Y, Z sont relatives à une translation à droite, et les X′, Y′, Z′ à une translation à gauche. On a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1.$$

On peut donc prendre, comme représentant d'une droite de l'espace elliptique, un couple de points sur deux sphères euclidiennes, et à toute relation entre ces deux sphères correspond une congruence. C'est cette dernière observation qui est le point de départ de M. Coolidge ; il démontre qu'à toute correspondance continue et directement conforme entre deux sphères euclidiennes correspond une congruence *isotrope* de l'espace elliptique, et réciproquement. Une congruence est isotrope lorsque sur tout rayon les points de plus petite (et de plus grande) distance entre ce rayon et les rayons infiniment voisins de celui-ci coïncident en un même point (*centre*). Aux correspondances inversement conformes correspondent les polaires absolues des congruences isotropes. L'auteur retrouve aussi le théorème suivant avec son inverse (dans l'espace euclidien) : *Si dans une congruence isotrope on porte sur les rayons des longueurs constantes égales, de l'un ou de l'autre côté des centres, les deux surfaces ainsi construites sont applicables l'une sur l'autre.* Encore : *Les surfaces focales sont des développables circonscrites à l'absolu.*

En projetant stéréographiquement les sphères sur leurs plans équatoriaux, soient x, y et respectivement u, v les coordonnées des projections. La relation directement conforme entre les sphères en entraîne une entre les deux plans, et par suite en posant

$$z = x + iy, \qquad w = u + iv,$$

on aura w fonction monogène de z. Après, l'auteur traite la question de l'enveloppe centrale, qui n'est pas une surface minima, comme dans l'espace euclidien.

La Note est écrite en français.

Panetti (*M.*) [*T* 2 *b*]. — Une résolution directe du problème de la section réagissante. (249-255).

Burali-Forti (*C.*) [I 1]. — Sur la théorie générale des grandeurs et des nombres. (256-272).

Dans la *Rivista di Matematica* (t. VI, 1900) (*Propriétés formelles des opérations algébriques*), l'auteur a donné la définition formelle des nombres au moyen des postulata relatifs aux grandeurs. Ici, il reprend ces définitions en profitant des perfectionnements introduits par M. Huntington (*Trans. of the Americ. math. Soc.*, 1902 et 1903). Il réussit à montrer que l'Analyse est indépendante des postulata.

La Note est écrite en employant les notations symboliques du *Formulaire mathématique* de M. Peano (1902-1903).

Peano (*G.*) [V 1 *a*]. — Le latin comme langue auxiliaire internationale. (273-283).

Pieri (M.) [P 1 *f*]. — Sur le théorème fondamental de Staudt et sur les principes de la Géométrie projective. (312-331).

L'auteur se rapporte à son Mémoire publié dans les *Memorie della R. Accad. di Torino* (t. XLVIII, 1898) (*voir* ce *Bulletin*, XXXI_2, p. 190). Si des dix-neuf postulata introduits dans ce Mémoire on retranche le dix-huitième, qui affirme la continuité du segment projectif, et si on le remplace par une autre proposition moins restrictive, on peut démontrer le théorème de Staudt et fonder ainsi une géométrie projective de premier et de deuxième degré, indépendante de la continuité de la droite, et dont le champ minimum de validité est la classe des points représentables par des coordonnées homogènes, où n'entrent d'autres irrationalités que des extractions de racine carrée en nombre fini.

Morera (G.) [R 5 *b*]. — Sur l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène. (332-338).

Etant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'ellipsoïde, posons

$$\nu=\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s},$$

et indiquons par s_0 une quantité qui, pour un point intérieur à l'ellipsoïde, est le zéro et, pour un point extérieur, la plus grande racine de $\nu=1$.

Alors, p, q, r étant des entiers et $\alpha_{p,q,r}$ des constantes, la fonction

$$\text{(1)}\qquad V=\sum_{p,q,r}\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}\int_{s_0}^{\infty}\frac{(1-\nu)^{p+q+r+1}}{\mathcal{R}(s)}\,ds,$$

où

$$\mathcal{R}(s)=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$$

est la fonction potentielle d'une distribution de masse dans l'ellipsoïde, avec la densité

$$\text{(2)}\qquad \rho=\sum_{p,q,r}\alpha_{p,q,r}\frac{p+q+r+1}{\pi abc}\,\frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x'^p\,\partial y'^q\,\partial z'^r}(1-\nu')^{p+q+r},$$

les x', y', z' étant les coordonnées de l'élément, et

$$\nu'=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}.$$

Après cela l'auteur démontre que, lorsque la densité est une fonction rationnelle entière des coordonnées, on peut toujours lui donner la forme (2) et, par conséquent, à la fonction potentielle la forme (1). Il démontre cette proposition pour le cas où ρ est une fonction linéaire. La démonstration pour le cas général, donnée dans le paragraphe 3, qui est erronée, a été ensuite substituée par une autre dans le complément qui suit.

Morera (*G.*) [R 5 *b*]. — Complément à la Note *Sur l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène*. (338-341).

Morera (*G.*) [R 6 *b* β]. — Sur les équations dynamiques de Hamilton. (342-355).

Une transformation de contact, spéciale, ne change pas la forme hamiltonienne de l'équation des travaux virtuels

$$\delta\sum_i q_i\,dp_i - d\sum_i q_i\,\delta p_i = (\delta K - \delta L)\,dt.$$

Toute transformation sur les p et q, indépendante du temps, changeant tout système canonique en un autre, est nécessairement de contact.

Enfin, généralisation du théorème fondamental de la théorie des perturbations.

Bianchi (*G.*) [X_2 I ref. D 3]. — Sur la représentation de Clifford des congruences rectilignes dans l'espace elliptique. (381-396).

Aux résultats de M. Coolidge (*voir* la Note de cet auteur dans ce même Tome, p. 175) l'auteur ajoute une classe de congruences isotropes normales : les congruences des normales à une surface de courbure nulle. Une telle congruence peut se représenter sur le plan elliptique dans la manière indiquée par M. Fubini (*Ann. della Sc. Norm. sup. di Pisa*, t. IX, 1900), c'est-à-dire en conduisant par un point O les deux parallèles, de droite et de gauche, à tout rayon r de la congruence, et en prenant les points P, P′ où elles rencontrent le plan Π polaire de O ; ces points P, P′ donnent les deux représentations de Clifford.

Aux développables de la congruence correspondent, dans cette double représentation, les lignes isométriques (qui se correspondent entre elles à arcs égaux) ; la distance des foyers et l'inclinaison des plans focaux sont respectivement la demi-somme et la demi-différence des angles des lignes isométriques des deux représentations.

Après avoir retrouvé le théorème de M. Coolidge (*voir* ci-dessus), que *toute représentation conforme du plan elliptique sur lui-même détermine une congruence isotrope, et réciproquement*, et avoir observé que les résultats de M. Coolidge sont relatifs aux congruences isotropes *non normales*, il vient compléter ces recherches en déterminant les congruences isotropes normales qui constituent un cas d'exception pour le théorème de Coolidge. Celles-ci sont toutes et seulement les congruences formées par les normales aux surfaces de courbure nulle. Pour ces congruences, les images de Clifford ne sont plus à deux dimensions, mais se réduisent à des courbes.

Une autre application est celle que l'auteur fait au cas où les courbes images des développables sont deux réseaux de Tchebychef sur le plan elliptique ; on a alors une congruence de Guichard (dont les développables déterminent sur les deux nappes focales les lignes de courbure).

Nicoletti (O.) [A 3 *d*]. — Sur quelques applications du théorème de Sturm. (455-482).

Étant

$$f(x) = 0$$

une équation du degré n et $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ une succession de Sturm, si $\theta(x)$, $\omega(x)$ sont deux polynomes satisfaisant à certaines conditions, on pose

$$F(x) = \theta(x)\, f(x) + \omega(x)\, f_1(x).$$

Alors, suivant les hypothèses qu'on a faites sur θ et ω, les successions

$$(1) \qquad F,\ f,\ f_1,\ \ldots,\ f_n,$$
$$(2) \qquad F,\ f_1,\ \ldots,\ f_n$$

sont deux successions de Sturm *généralisées*, dans le sens de Netto (*Algèbre*, t. I, p. 238). On déduit que, si dans l'intervalle $\alpha\beta$ tombent k racines de f, F a dans cet intervalle $k-1$ ou $k-2$ racines, suivant qu'on se place dans les cas (1) ou (2). Autres théorèmes analogues : en particulier des généralisations d'un théorème de Laguerre (*Œuvres*, t. I, p. 140), d'un théorème d'Hermite (*Nouv. Annales de Mathém.*, 2e série, t. V, 1866, p. 478), ainsi que du théorème de Rolle, trouvées en considérant la succession (1). De l'autre cas, celui de (2), on obtient d'autres théorèmes, parmi lesquels une généralisation d'un théorème de Fouret (*C. R.*, t. CVI, p. 1220).

Tanturri (A.) [M_4 2]. — Sur certaines équations fonctionnelles et sur le nombre des groupes neutres de deuxième espèce dans une série linéaire. (483-487).

Si

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_s\} \qquad \text{ou bien} \qquad \{a_r;\ r = 0, 1, \ldots, s\}$$

indique une fonction des nombres entiers (positifs ou nuls) a_r, satisfaisant à la condition

$$\{a_r;\ r = 0, 1, \ldots, s\} = \sum_0^t \alpha_i \{a_r - \beta_{ri};\ r = 0, 1, \ldots, s\}$$

(les α_i entiers constants, les β entiers positifs ou nuls et $\beta_{ri} \leqq a_r$), c'est-à-dire exprimée, au moyen de cette formule de réduction, par des fonctions analogues d'arguments plus petits, on a

$$\{a_r;\ r = 0, 1, \ldots, s\}$$
$$= \sum \alpha_0^{k_0} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_t^{k_t} \frac{q!}{k_0!\, k_1! \ldots k_t!} \left\{ a_r - \sum_0^t k_i \beta_{ri};\ r = 0, 1, \ldots, s \right\},$$

les $k_0, k_1, \ldots, k_t$ étant toutes les solutions entières, positives ou nulles de

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_t = q,$$

et q le plus grand nombre entier qui ne dépasse aucun des nombres $\frac{a_r}{\beta_r}$.

Ensuite, l'auteur applique ce théorème arithmétique à la démonstration de la formule suivante, donnant le nombre des groupes de $2s$ points, chacun desquels est neutre de deuxième espèce pour une série linéaire d'ordre m et de dimension $3(s-1)$ sur une variété algébrique ∞^1 de genre p

$$\sum (-1)^i 2^{p-i-k} \frac{p!}{i!\,k!\,(p-i-k)!} \frac{1}{s+k+1} \times \binom{m-2s-p-i-k+2}{s-k} \binom{m-2s-p-i-k+1}{s-k},$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs i, k, pour lesquels

$$i+k \leq p.$$

Severi (F.) [M₂ 1]. — Observations sur les systèmes continus de courbes appartenant à une surface algébrique (490-506).

Étant C une courbe irréductible sur une surface F, on prend un système linéaire infini | E | renfermant C partiellement, mais non comme partie fixe, et soit | D | le système résiduel | E — C |. Si la série complète, à laquelle appartient la série que | E | détermine sur C, contient la série linéaire déterminée sur C par | D |, la différence entre la première et la seconde série s'appelle la *série caractéristique complète de* C. Une telle série, qu'on peut indiquer par | EC | — | DC |, est indépendante du choix du système | E |, et son ordre x est égal au degré virtuel de C.

La série caractéristique, définie aussi pour une courbe C isolée (n'appartenant pas à un système linéaire infini), a, avec la série déterminée sur C par les courbes canoniques de la surface, la même relation qui est propre à la série caractéristique d'un système linéaire infini, c'est-à-dire qu'elle est aussi résidu de la série déterminée sur C par les courbes canoniques, par rapport à la série canonique, et précisément :

Sur une courbe isolée C, n'ayant pas de points de base assignés, la série caractéristique, additionnée avec la série déterminée par les courbes canoniques, donne la série canonique augmentée des couples qui tombent dans les points doubles de C.

L'importance de la série caractéristique consiste principalement dans le fait que, si une courbe C appartient à un système continu, toute courbe du système infiniment rapprochée de C, détermine sur C un groupe de la série. Cela conduit l'auteur à établir la notion de *série caractéristique d'un système continu* ∞^r. C'est la série *linéaire* constituée de groupes caractéristiques, déterminée sur une courbe générale du système par les ∞^{r-1} courbes infiniment voisines. Suivant un théorème de M. Castelnuovo, la dimension de la série caractéristique complète, existant sur une courbe d'un système irréductible complet de dimension $r \geq 1$, est $\geq r - P_g - P_a - 1$; P_g, P_a étant les genres géométrique et arithmétique de la surface. Ce théorème peut aussi s'appliquer à une courbe isolée, dépourvue de points multiples et douée de série caractéristique ; en appliquant ce théorème on trouve, pour la dimension R du système algébrique complet, dont la courbe générale appartient à un système linéaire complet de dimension $r \geq 0$,

$$R \geq r + P_g - P_a.$$

où $P_g - P_a$ est appelée l'*irrégularité* de la surface. On en déduit que sur une surface régulière tout système algébrique de courbes est totalement renfermé dans un système linéaire (théorème de M. Enriquez), et l'on complète un théorème de Castelnuovo suivant lequel toute surface possédant un faisceau irrationnel de courbes est irrégulière, en prouvant que l'irrégularité de toute surface, qui possède un faisceau irrationnel de genre p, n'est pas inférieure à p. Enfin l'inégalité

$$R \leqq r + P_g - P_a$$

est appliquée à démontrer que l'irrégularité d'une surface ayant p intégrales finies de Picard, à $2p$ périodes, n'est pas inférieure à p. Sur une telle surface, comme M. Enriquez l'a démontré (*Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. III, 1901), il y a toujours un système continu de courbes, n'appartenant pas totalement à un système linéaire, et l'auteur donne une démonstration plus simple de ce théorème, avant d'aborder la question relative à l'irrégularité.

Boccardi (G.). — Orbite définitive de la planète 347 Pariana. (567-596).

Fano (G.) [Q 2]. — Sur les surfaces algébriques renfermées dans une variété de l'espace à quatre dimensions. (597-613).

M. Klein a démontré, en 1872 (*Math. Ann.*, t. XXII), que les quadriques de S_4 n'ayant pas de points doubles ne contiennent d'autres surfaces algébriques que celles qui sont leurs intersections complètes avec d'autres variétés algébriques à trois dimensions. Une propriété analogue a lieu pour les variétés cubiques de S_4 dépourvues de points doubles, et aussi pour celles qui ont un nombre de points doubles $\leqq 5$, indépendants entre eux.

Les variétés cubiques de S_4 renfermant des surfaces algébriques qui ne sont pas des intersections complètes sont :

1° Celles qui renferment des plans ;
2° Celles qui ont six points doubles indépendants ;
3° Celles à quartique double.

Les variétés 2° et 3° contiennent des systèmes de droites du premier ordre qu'on peut engendrer projectivement, et dans chacun desquels il y a ∞^2 surfaces réglées cubiques normales. Les surfaces existant sur ces variétés et n'étant pas des intersections complètes peuvent être obtenues par section avec des variétés qui passent par une ou plusieurs de ces surfaces réglées cubiques.

Tardy (P.) [I 25 *b*]. — Sur les séries arithmétiques de nombres entiers. (614-615).

Extension d'une propriété de la succession des nombres impairs. *Voir* une autre Note à la page 979.

Favaro (A.) [V 16,19]. — Une critique de J. Plana aux Dialogues de Galilée les *Nuove Scienze*. (643-651).

Filippini (*A.*) [T 1]. — Sur un système particulier de pendules représentant les molécules des corps composés. (652-663, 1 planche).

Zanotti-Bianco [O.] [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'histoire de la Géodésie : Note I de Laplace à Stokes. (689-715).

Voir la Note II dans le Tome XL, p. 18.

Fano (*G.*) [Q 2]. — Sur le système ∞^2 de droites renfermé dans une variété cubique générale de l'espace à quatre dimensions. (778-792).

Ce système peut se regarder comme une surface F contenue dans la variété M^5, de six dimensions et du cinquième ordre, formée par toutes les droites de S_4. Cette variété est déterminée par trois relations quadratiques entre les dix coordonnées homogènes des éléments d'un espace linéaire S_9. La surface F est de l'ordre 45, et ses sections hyperplanes sont du genre 46. Le genre géométrique est $p_g = 10$, le genre linéaire $p^{(1)} = 46$, et le système canonique est formé par les ∞^9 surfaces réglées qui sont les intersections de F avec les ∞^9 complexes linéaires de S_4. Si la variété cubique a k points doubles indépendants, comme $0 < k \leqq 5$, le système ∞^2 de ses droites est birationnellement identique au système des cordes d'une courbe de genre $5 - k$.

Gatti (*E.*) [T 3 *a*]. — Propriétés des segments à une base d'un cylindre droit réfringent. (839-855, 1 planche).

Nicolis (*U.*) [U]. — Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1905. (856-873).

Tardy (*P.*) [I 25 *b*]. — Sur les séries arithmétiques de nombres entiers. (979-980).

Théorèmes analogues à ceux de la Note précédente (*voir* ce Tome, p. 614).

Tome XL, 1904-1905.

Chini (*M.*) [H 2 *c*]. — Sur une particulière équation différentielle du premier ordre. (4-17).

Pour former toutes les équations du type

$$\frac{dy}{dx} = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + y^3 \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ fonctions de } x),$$

admettant un facteur intégrant

$$\mu = (y - x_1)^{m_1}(y - x_2)^{m_2}(y - x_3)^{m_3},$$

on doit fixer pour m_1, m_2, m_3 trois constantes liées par la relation

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

puis choisir pour x_1, x_2, x_3 trois fonctions de x satisfaisant à deux certaines, équations. Alors on trouve pour α, β, γ :

$$6\alpha = (\Sigma m x)^3 + 3\Sigma m x \Sigma m x^2 + 2\Sigma m x^3 - 2\frac{d}{dx}\Sigma m x,$$
$$2\beta = (\Sigma m x)^2 + \Sigma m x^2,$$
$$\gamma = \Sigma m x.$$

Entre les cas particuliers, citons celui où $m_2 = m_3 = 0$. On a alors les équations du type considéré, qui admettent un facteur intégrant

$$(y - x_1)^{-3}.$$

Ces équations sont celles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} + (y - X)^3,$$

X étant une fonction quelconque de x. Le facteur intégrant est

$$\frac{1}{(y - X)^3},$$

et l'intégrale générale

$$y = X + \frac{1}{\sqrt{c - 2x}}.$$

Zanotti-Bianco (*O.*) [U 10 *a*]. — Les idées modernes sur la figure mathématique de la Terre. Notes pour l'histoire de la Géodésie. Note II : Saigey et les variations de la gravité. (18-42).

La première Note est dans le Tome XXXIX, page 689, et une troisième Note dans le Tome XLI, page 2.

Giudice (*F.*) [A 3 *d*]. — Méthode de Newton perfectionnée et nouvelle méthode pour le calcul asymptotique des racines des équations. (105-113).

Levi (B.) [M_2 1 *b*]. — Points doubles uniplanaires des surfaces algébriques. (139-167).

A étant un point multiple d'une surface F et γ une branche de courbe tracée par F et sortant du point A, la surface a dans les points successifs de γ

des points d'une multiplicité déterminée: l'ensemble de ces multiplicités est appelé la *composition de la surface suivant cette branche.* Les relations entre la composition suivant une branche générale et celles suivant des branches spéciales, pour ce qui regarde le cas de certains points doubles, ont été déterminées par voie analytique par M. Segre (*Ann. di Matematica*, 2e série, t. XXV) et par M. Levi même (*Ibid.*, 3e série, t. II). Ici l'auteur traite complètement la question pour les points doubles uniplanaires. A la considération d'une branche on substitue celle d'un *itinéraire* correspondant, constitué par une succession finie quelconque de points de la branche, et, k étant le nombre des points doubles de l'itinéraire, on appelle *puissance* de l'itinéraire le nombre $2k$ ou $2k+1$, suivant que le dernier point double est biplanaire (ou conique) ou bien uniplanaire; et l'auteur établit une formule générale donnant la composition de la surface suivant une branche donnée, lorsqu'on connaît au point A la composition de la courbe double et celle de la courbe de contact de F avec le cône circonscrit ayant pour sommet un point qui n'appartient pas au plan tangent en A. (L'auteur a démontré auparavant que ces courbes de contact, quel que soit le sommet, ont toutes en A les mêmes tangentes.) La composition de la courbe de contact et de la courbe double est arbitraire, c'est-à-dire qu'en donnant arbitrairement cette composition en un point, on peut trouver une surface ayant ce point comme double uniplanaire, et pour laquelle la courbe de contact et la courbe double se comportent de la manière assignée. Puis, l'auteur trouve l'équation d'une surface qui a à l'origine un point uniplanaire de composition donnée, en commençant par le cas d'une courbe ayant à l'origine un nœud ou un rebroussement de k-ième espèce, et en étendant ensuite la méthode au cas d'une variété d'un nombre quelconque de dimensions.

Rimondini (F.) [C 2 j]. — Sur le calcul approché des intégrales doubles à limites constantes. (168-177).

Intégrale dans un rectangle, exprimée par les valeurs de la fonction aux sommets des n^2 rectangles partiels, obtenus par des parallèles aux axes.

Coolidge (J.-L.) [N_2 1 ref. D_3]. — Les congruences isotropes qui servent à représenter les fonctions d'une variable complexe. Note II. (202-218).

Le théorème principal démontré par l'auteur dans la Note précédente (t. XXXIX, 1903-1904, p. 175), suivant lequel *à toute correspondance continue et directement conforme entre deux sphères correspond une congruence continue isotrope, et réciproquement,* et *aux correspondances inversement conformes correspondent les polaires absolues des congruences isotropes*, a, comme M. Bianchi l'a observé (même Tome, p. 381), un cas d'exception, celui des congruences normales. L'auteur observe qu'on peut éliminer ce cas d'exception, en laissant de côté les congruences normales et en donnant des congruences isotropes la définition suivante :

Une congruence est isotrope lorsque le lieu des positions limites de toutes les perpendiculaires communes à une droite non singulière et à toutes les droites infiniment voisines de la congruence, sans exception, est constitué par deux faisceaux de droites, polaires l'un de l'autre par rapport à l'absolu.

Après cela, l'auteur reprend les résultats de la Note précédente en employant les coordonnées homogènes et aborde la question de la représentation des droites imaginaires et de la correspondance dans le domaine complexe. Comme une fonction monogène de la variable complexe, ainsi qu'il résulte des recherches précédentes de l'auteur, peut se représenter par une congruence isotrope, il examine le cas particulier de la fonction linéaire, qui donne un déplacement de la sphère de Gauss, et qui correspond à l'ensemble des rayons passant par un point fixe, dont les coordonnées homogènes sont les paramètres d'Euler du déplacement. Si la fonction ne donne pas de déplacement, elle correspond à une congruence de rayons située sur une congruence de droites du quatrième ordre et de deuxième classe.

Autres cas de fonctions monogènes.

Boggio (T.) [T 4 *a*]. — Sur la déformation des plaques élastiques sujettes à la chaleur. (219-240).

Les composantes u, v du déplacement longitudinal qu'un point (x, y) de la plaque éprouve pour un échauffement $\Phi(x, y)$ satisfont aux équations

$$(1-k)\Delta_2 u + (1+3k)\frac{dp}{dx} = k'\frac{d\Phi}{dx},$$

$$(1+k)\Delta_2 v + (1+3k)\frac{dp}{dy} = k'\frac{d\Phi}{dy},$$

p étant la dilatation superficielle

$$p = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy},$$

et k une constante, aux points du contour s de la plaque on a

$$\left[p' + 2(1+k)\frac{du}{dx}\right]\frac{dx}{dn} + (1+k)\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\frac{dy}{dn} = 0,$$

$$(1+k)\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\frac{dx}{dn} + \left[p' + 2(1-k)\frac{dv}{dy}\right]\frac{dy}{dn} = 0,$$

où

$$p' = 2kp - k'\Phi, \qquad k' = 2(1+3k)\varepsilon,$$

ε représentant le coefficient de dilatation et n la normale à s dirigée vers l'intérieur de la surface σ.

Le calcul des fonctions u, v se réduit au problème des valeurs au contour pour les fonctions biharmoniques. En posant

$$u = \xi + \frac{dF}{dx}, \qquad v = \eta + \frac{dF}{dy},$$

où la fonction F, régulière en σ, satisfait à l'équation

$$\Delta_2 F = \frac{k'}{2(1+2k)}\Phi,$$

ce qui donne

$$F(x, y) = -\frac{k}{4\pi(1+2k)} \int_\sigma \Phi(x', y') \log\frac{1}{r}\, d\sigma,$$

et puis, en posant aussi

$$T_{11} = (1+2k)\frac{d\xi}{dx} + k\frac{d\eta}{dy},$$

$$T_{12} = \frac{1+k}{2}\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right),$$

$$T_{22} = k\frac{d\xi}{dx} + (1+2k)\frac{d\eta}{dy},$$

il trouve que la solution est donnée par

$$T_{11} = \frac{d^2 U}{dy^2},$$

$$T_{12} = -\frac{d^2 U}{dx\, dy},$$

$$T_{22} = \frac{d^2 U}{dx^2},$$

si

$$\Delta_2 \Delta_2 U = 0,$$

et au contour

$$U = (1+k) F,$$

$$\frac{dU}{dn} = (1+k)\frac{dF}{dn}.$$

Soient alors

$$T = T_{11} + T_{22},$$

qui est une fonction harmonique, et T_0 sa fonction conjuguée; si l'on pose

$$T = \frac{d\tau}{dx}, \qquad T_0 = \frac{d\tau}{dy},$$

ou bien

$$T = \frac{d\tau_0}{dy}, \qquad T_0 = -\frac{d\tau_0}{dx},$$

on a

$$u = \frac{1+2k}{(1+k)(1+3k)}\tau - \frac{1}{1+k}\frac{d}{dx}[U - (1+k)F] - \omega y + c_1,$$

$$v = \frac{1+2k}{(1+k)(1-3k)}\tau_0 - \frac{1}{1+k}\frac{d}{dy}[U - (1+k)F] - \omega x + c_2,$$

ϖ, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

La détermination de la fonction biharmonique U se réduit à celle d'une autre plus simple, et les déplacements u, v peuvent se trouver en connaissant la seconde fonction de Green pour l'aire donnée.

Dans le cas où l'échauffement Φ est une fonction harmonique, on a

$$u = \frac{k'}{2(1+3k)}\frac{1}{\rho}\left(x\int_0^\rho \Phi\, d\rho + y\int_0^\rho \Phi_0\, d\rho\right),$$

$$v = \frac{k'}{2(1+3k)}\frac{1}{\rho}\left(y\int_0^\rho \Phi\, d\rho - x\int_0^\rho \Phi_0\, d\rho\right),$$

Φ_0 étant la conjuguée de Φ.

Pour la plaque circulaire, l'auteur retrouve, sous une forme plus simple, les résultats de Borchardt. Lorsque l'échauffement est une fonction polyharmonique, les u, v s'expriment par des intégrales simples. Lorsque Φ est un polynome, u et v sont aussi des fonctions rationnelles entières.

Severi (*F.*) [M_2 8]. — Sur la différence entre le nombre des intégrales de Picard, de la première et de la deuxième espèce, appartenant à une surface algébrique. (288-296).

P_g, P_a étant les genres, géométrique et arithmétique, d'une surface, l'irrégularité $P_g - P_a$ est égale à l'excès du nombre des intégrales distinctes de deuxième espèce sur le nombre de celles de première.

Laura (*E.*) [S 2 *c*]. — Sur les équations différentielles canoniques du mouvement d'un système de tourbillons élémentaires, rectilignes et parallèles, dans un fluide incompressible et indéfini. (296-312).

Le mouvement de n tourbillons élémentaires, perpendiculaires à un plan, dépend de l'intégration du système hamiltonien

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\mathrm{P} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{ik} m_i m_k \log \left[\left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k} \right)^2 + (p_i - p_k)^2 \right];$$

m_i est l'intensité du tourbillon dont la trace sur le plan xy a pour coordonnées

$$\frac{x_i}{m_i}, \quad p_i.$$

En observant que les fonctions

$$\rho_{ik} = \left(\frac{x_i}{m_i} - \frac{x_k}{m_k} \right)^2 + (p_i - p_k)^2$$

forment un groupe, on déduit du système (I) un autre système différentiel relatif aux ρ_{ik}

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{d\rho_{ik}}{dt} = -\frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{n} m_l \left(\frac{1}{\rho_{il}} - \frac{1}{\rho_{kl}} \right) (i, k, l),$$

où dans la somme on doit exclure les valeurs i, k, et le symbole (i, k, l) signifie

$$= \pm \sqrt{-\rho_{ik}^2 \rho_{kl}^2 - \rho_{il}^4 + 2\rho_{ik}\rho_{il} + 2\rho_{kl}\rho_{il} - 2\rho_{il} l_{ik}}.$$

L'intégration du système (II) permet d'intégrer, par une quadrature, le système (I).

Si $2n$ tourbillons sont initialement symétriques deux à deux par rapport à un point, ils restent tels pendant tout le mouvement. Dans le cas de quatre tourbillons deux à deux symétriques, on obtient les équations finies par des quadratures.

Panetti (*M.*) [T 2 *b*]. — Théorie de la résistance des plaques à tronc de cône, et application au calcul de certains organes mécaniques et des réservoirs cylindriques. (349-377).

Greco (*M.*) [T 2 *b*]. — Sur le calcul de la section et des armatures d'une poutre en ciment armé, soumise à une flexion droite simple. (507-530).

Levi (*E.-E.*) [J 4 *f*]. — Sur la constitution des groupes finis et continus. (551-565).

Tout groupe qui n'est ni demi-simple (constitué par des groupes simples permutables deux à deux), ni intégrable, se décompose en un groupe invariant intégrable et en un groupe demi-simple.

Théorème démontré par Killing, avec quelque inexactitude (*Math. Ann.*, t. XXXIV, p. 107), et qui, du moins dans sa forme générale, n'avait pas été considéré par M. Cartan, qui a donné dans sa thèse les démonstrations rigoureuses de plusieurs résultats de Killing.

Castellano (*F.*) [B 12 *d*]. — Le double rapport de quatre points de l'espace avec des applications à la Géométrie du tétraèdre. (579-601).

Par la théorie des quaternions, l'auteur définit le rapport simple (ABC) de trois points, qui est le quotient des vecteurs A — C, B — C; puis le double rapport (ABCD) de quatre points, qui est le quaternion (ABC)(BAD). Les 24 doubles rapports sont en général tous différents entre eux, et ils dépendent de trois angles et de quatre vecteurs-unité, éléments qui ont une importance particulière relativement au tétraèdre ABCD. On a ainsi des propositions remarquables, en particulier sur des tétraèdres spéciaux, par exemple sur le tétraèdre *équianharmonique*.

Fubini (*G.*) [H 9 *d*]. — Quelques nouveaux problèmes qui se présentent dans la théorie des équations aux dérivées partielles. (616-631).

Pour l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(\frac{u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right),$$

satisfaisant aux conditions de Lipschitz par rapport à $\frac{du}{dx}$, $\frac{dy}{dy}$ et u, l'auteur démontre un théorème plus général que celui de Goursat (*Ann. de la Fac. de Toulouse*, 1904), et qui est le suivant :

Dans le quart positif du plan (x, y) *soient donnés un arc de courbe* Γ, *terminé à un point* A *de la caractéristique* $y = 0$ *et à un point* C *de la* $x = 0$, *et un arc* Γ' *terminé respectivement aux points* A', B' *de ces caractéristiques*; *admettons que chacun de ces arcs ne soit rencontré par aucune caractéristique en plus d'un point, et ait en tout point une tangente variable avec continuité* (*n'étant jamais parallèle à un axe coordonné*); *que les deux arcs soient toujours à une distance finie entre eux, et les points* A, A', B, B' *soient distincts de l'origine* O; *soit par exemple* OA' > OA, *et par conséquent* OB' > OB. *Alors, si* OA' *et* OB' *sont suffisamment petits, il y a dans le rectangle* OA'B' *une intégrale u de l'équation* (1) *et une seule, qui sur les arcs* AB, A'B' *et sur le segment* AA' (*ou bien sur* BB') *prend des valeurs données arbitrairement.*

On en déduit : pour A, A' infiniment rapprochés, le théorème de Goursat; pour Γ, Γ' infiniment rapprochées, le théorème qu'il y a une seule intégrale prenant sur Γ des valeurs données et dont la dérivée normale prend aussi des valeurs données; pour B, B' infiniment rapprochés, il faut se limiter aux équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(u, x, y), \tag{2}$$

pour lesquelles on a le théorème :

Si les côtés du rectangle sont suffisamment petits, il y a une seule intégrale de l'équation (2) *qui, sur les deux courbes* Γ, Γ' (*sortant d'un même point* B *et terminées à deux points* A, A' *d'une même caractéristique*) *et sur le segment* AA', *prend des valeurs données.*

Une telle existence de contours fermés sur lesquels on peut fixer les valeurs d'une intégrale u d'une équation du type hyperbolique, comme il arrive pour celles du type elliptique, semble être en contradiction avec le théorème de Goursat, suivant lequel les valeurs sur AA' sont déterminées par celles données sur Γ, Γ'; mais la contradiction n'est qu'apparente, car l'intégrale u n'est pas continue en général, et a en B une discontinuité de seconde espèce.

Un autre cas limite est celui où A, A' coïncident en un point de $y = 0$ et B, B' en un point de $x = 0$.

Ces problèmes ont une relation étroite avec celui de l'inversion des intégrales définies, comme il a été aussi montré par Le Roux (*Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 1895) et Goursat (*loc. cit.*). On peut appliquer à ce problème la méthode des approximations successives, ainsi que l'ont montré Le Roux et Burgatti (*Rend. della R. Acc. dei Lincei*, 1903). L'auteur généralise ce problème d'inversion, en prenant l'équation

$$f(x) = \varphi(x) + F\left(\int_a^b \lambda(x, y)\,\varphi(y)\,dy,\ x\right),$$

où $f(x)$, $\lambda(x, y)$ et F sont connues et φ est la fonction inconnue. En posant

$$\varphi = \lim_{n-\infty} \varphi_n,$$

$$\varphi_0(x) = f(x), \qquad \varphi_n(x) = f(x) - \mathrm{F}\left[\int_a^b \lambda(x, y)\varphi_{n-1}(y)\,dy, x\right];$$

il démontre l'existence de la limite de φ_n, qui satisfait à l'équation donnée.

Puis, en revenant au sujet principal, il applique les considérations précédentes aux équations qu'il appelle de Bianchi-Nicoletti (Nicoletti, *Atti della R. Acc. di Napoli*, 2e série, t. VIII, 1897), pour le cas de trois variables

$$(3) \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, u, x, y, z\right),$$

en démontrant pour l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,dy\,\partial z} = \varphi(x, y, z)$$

un théorème analogue à celui du cas de deux variables; après quoi il suffit, pour l'équation (3), d'une application des approximations successives.

Enfin, il donne un exemple particulier des problèmes au contour qui peuvent se présenter lorsque les lignes caractéristiques sont en partie réelles et en partie imaginaires.

Jadanza (*N.*) [U]. — Nouvelle méthode pour déterminer le rapport diestimométrique en une lunette distantiométrique. (691-697).

Bianchi (*L.*) [O6*k*]. — Sur la déformation des surfaces flexibles et inextensibles. (714-731).

Étant tracées arbitrairement, sur une surface à courbures opposées, deux courbes C, C′ sortant d'un point ordinaire O et n'étant pas tangentes en ce point, il existe, dans une région suffisamment restreinte autour de O, une déformation de la surface, qui rend C, C′ asymptotiques (de systèmes différents) pour la surface déformée. Pour les surfaces analytiques et leurs déformations analytiques, on peut démontrer qu'il n'y a qu'une solution.

Si l'on suppose que l'une C des deux courbes soit initialement une asymptotique, on démontre qu'elle reste rigide dans la déformation qui réduit asymptotique l'autre courbe C′. La propriété par laquelle les lignes asymptotiques sont appelées *lignes de pliement* reste ainsi établie, et reste aussi fixé le degré de liberté de la déformation à asymptotique rigide, qui dépend d'une fonction arbitraire d'une variable (par exemple la courbure géodésique de C′ en fonction de l'arc s). Dans le cas d'une surface réglée (non développable) analytique, dont on conserve rigide une génératrice, on a que toutes les autres génératrices restent aussi rigides; théorème qui résulte aussi, comme l'auteur le démontre, des équations de Gauss et de Codazzi. Pour l'hélicoïde réglé *minima*, le théorème est valable, sans la restriction au cas analytique, dans l'espace euclidien aussi bien que dans les espaces elliptique et hyperbolique.

Dans le cas euclidien, l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + \left(u^2 + \frac{1}{T^2}\right) dv^2;$$

dans le cas elliptique

$$ds^2 = du^2 + \left(\cos^2 u + \frac{\sin^2 u}{T^2}\right) dv^2,$$

et dans le cas hyperbolique

$$ds^2 = du^2 + \left(\cosh^2 u + \frac{\sinh^2 u}{T^2}\right) dv^2.$$

et la raison de l'équivalence des problèmes de déformation pour ces surfaces est qu'elles sont représentables l'une sur l'autre de manière que les lignes asymptotiques actuelles (u, v) se correspondent, et les géodésiques se correspondent aussi; alors, par suite de certains résultats donnés par l'auteur dans *Rendiconti dei Lincei* (1902) (*Sopra un problema relativo alla deformazione delle superficie*), tous les systèmes d'asymptotiques virtuelles se correspondent aussi.

Aux résultats précédents se rattache la question des réseaux de Tchebycheff, qui doivent recouvrir la surface en formant des parallélogrammes, et on a le théorème :

Étant tracées arbitrairement les courbes C, C', *comme ci-dessus, on peut former un réseau de Tchebycheff de manière que deux fils s'étendent sur* C, C'.

Gatti (*E.*) [T 3 *a*]. — Particularités de la réfraction due à un cylindre creux. (732-746, 1 planche).

Severi (*F.*) [M_1 2 *c* α]. — Sur le théorème de Riemann-Roch et sur les séries continues de courbes appartenant à une surface algébrique. (766-776).

Sur une surface de genres p_a, p_g ($p_g \geqq p_a$), toute courbe, irréductible ou non, de genre et degré virtuels π, n et d'indice de spécialité i ($\geqq 0$), pour laquelle il soit

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqq 0,$$

appartient toujours :

1° A un système linéaire de dimension

$$r \geqq p_a + n - \pi + 1 - i;$$

2° A un système continu de dimension

$$\geqq p_g + n - \pi + 1 - i,$$

qui, pour $p_g > p_a$, se compose de $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires non équivalents.

Severini (*C.*) [H3*c*]. — Sur les intégrales des équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur au premier, avec des valeurs assignées en des points donnés. (853-869).

Severini (H3*c*). — Sur les intégrales des équations différentielles ordinaires du deuxième ordre avec des valeurs assignées en deux points donnés. (1035-1040).

L'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'),$$

f étant finie et absolument continue, admet une intégrale, qui, pour $x = a$, $x = b$, prend respectivement les valeurs A, B. Sous certaines conditions pour a, b, A, B l'auteur démontre cette proposition, en appliquant les approximations successives, sans supposer la condition de Lipschitz; puis il démontre que si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$$

sont finies et absolument continues, et les quantités a, b, A, B satisfont aux conditions de Picard, on peut construire une série de polynomes rationnels entiers, uniformément convergente et représentant l'intégrale.

Dans l'autre Note, il résout ce dernier problème sous les mêmes conditions de Picard.

Almansi (*E.*) [R 8 *e*]. — Sur l'équilibre des systèmes désagrégés. (939-966).

Systèmes idéaux, représentés en nature, par exemple, par le sable, mais supposés continus. Les hypothèses fondamentales pour le traitement analytique de ces corps sont les deux suivantes :

1° Un tel système peut se décomposer en un nombre quelconque de parties, arbitrairement petites, chacune desquelles peut se mouvoir indépendamment des autres et se déformer comme un solide élastique ;

2° En supposant que le système soit en contact avec d'autres corps, la condition d'équilibre est que pour tout déplacement virtuel on ait

$$\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_a \overline{\gtrless} 0,$$

les $\mathcal{L}$ étant respectivement les travaux : des forces agissant sur les corps extérieurs, des forces de masse agissant sur le système, des forces élastiques et des forces de frottement.

Guidi (*C.*) [T2*a*]. — Sur une propriété des arcs élastiques. (967-969).

Vitali (G.) [C 2]. — Sur les fonctions intégrales. (1021-1034).

Ce travail se rattache aux recherches de M. Lebesgue (*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives;* Paris, Gauthier-Villars, 1904). Un *groupe d'intervalles distincts* est ainsi appelé lorsque deux quelconques de ces intervalles n'ont pas de points intérieurs communs, et *amplitude* du groupe est la somme des intervalles. *Incrément* de $F(x)$ dans l'intervalle (α, β) est $F(\beta) - F(\alpha)$, et incrément de $F(x)$ dans un groupe d'intervalles distincts, la somme des incréments dans chaque intervalle. Si, étant donnée une fonction $F(x)$ en (a, b), pour tout nombre $\sigma > 0$, il existe un autre nombre $\mu > 0$ tel que soit $< \sigma$ le module de l'incrément de $F(x)$ dans tout groupe d'amplitude $< \mu$ d'intervalles partiels de (a, b), on dit que $F(x)$ est *absolument continue*. On dit que $F(x)$ est une *fonction intégrale*, lorsqu'il existe une fonction finie et *sommable* (dans le sens de Lebesgue), pour laquelle il soit

$$F(x) + F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$$

pour $a \leqq x \leqq b$.

L'auteur démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $F(x)$ en (a, b) soit une fonction intégrale est qu'elle soit absolument continue en (a, b).

Giambelli (G.-Z.) [$N_4 2a$]. — La théorie des formules d'incidence et de position spéciale, et les formes binaires. (1041-1062).

Dans sa Note insérée au t. XXXVIII de ces *Atti*, page 823, l'auteur a appelé *fonction symétrique caractéristique* de $x_0, x_1, \ldots, x_s$ le quotient

$$\begin{vmatrix} x_0^{h_0} & x_1^{h_0} & \ldots & x_s^{h_0} \\ x_0^{h_1} & x_1^{h_1} & \ldots & x_s^{h_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^{h_s} & x_1^{h_s} & \ldots & x_s^{h_s} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^s & x_1^s & \ldots & x_s^s \end{vmatrix},$$

qu'on peut indiquer par $\{h_0, h_1, \ldots, h_s\}_s^{(x)}$.

On pose

$$S_{i,s}^{(x)} = \{0, 1, \ldots, s-i, s-i+2, \ldots, s+1\}_s^{(x)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s+1),$$
$$V_{i,s}^{(x)} = \{0, 1, \ldots, s-1, s+i\}_s^{(x)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

L'espace fondamental étant $[n]$, on a le théorème suivant :

Pour un couple d'espaces $[s]$, $[t]$ $(t \geqq t)$, *qui s'appartiennent, il y a toutes les formules d'incidence telles que si, au lieu de chaque condition caractéristique* $(a_0, a_1, \ldots, a_s)$ *imposée à l'espace* $[s]$, *on met la fonction symétrique caractéristique*

$$\{n - a_s, n - a_{s-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0\}_s^{(\delta)},$$

et, au lieu de chaque condition caractéristique imposée à l'espace $[t]$, *la*

fonction symétrique caractéristique

$$\{ n - b_t, n - b_{t-1}, \ldots, n - b_1, n - b_0 \}_t^{(\delta)},$$

on obtient une fonction identiquement nulle.

Cela permet d'écrire les formules d'incidence sans aucun raisonnement géométrique.

Une propriété semblable a lieu relativement aux formules de position spéciales.

En appelant *image* en $\delta_0, \delta_i, \ldots, \delta_s$ de la condition caractéristique $(a_0, a_1, \ldots, a_\varepsilon)$, la fonction

$$\{ n - a_\varepsilon, n - a_{\varepsilon-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0 \}_s^{(\delta)},$$

et image d'une fonction rationnelle des conditions caractéristiques imposées à plusieurs espaces la fonction que l'on obtient en substituant aux conditions caractéristiques leurs images, le théorème précédent exprime la validité de toutes les formules d'incidence, dont les images en $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_\varepsilon, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_t$ sont identiquement nulles; et la construction des formules d'incidence ainsi que de celles de position spéciale peut se faire au moyen de certaines identités algébriques, dont la recherche dépend des propriétés relatives à la condition pour qu'une ou deux formes binaires en contiennent une autre.

Autres considérations relatives aux formules de Schubert et aux relations entre la Géométrie énumérative et les formes binaires.

Balbi, Nicolis et *Virgilio* [U]. — Positions apparentes d'étoiles du Catalogue de Newcomb pour 1906 (1106-1129).

S. R.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
42685 Quai des Grands-Augustins, 55.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXIII; 1909. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXIII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
44950 Quai des Grands-Augustins, 55.